(Publikasjoner fra Chr. Michelsens Institutt. No. 11.)

Die Wellengleichung des Keplerproblems im Impulsraume.

Von **Egil A. Hylleraas** in Bergen.

(Eingegangen am 12. Dezember 1931.)

Es werden aus der einfachen Vertauschungsrelation allgemeinere Vertauschungsrelationen bei Funktionen der Koordinaten und Impulse abgeleitet. Diese werden zur Transformation der Wellengleichung des Keplerproblems im Koordinatenraum in die entsprechende Wellengleichung im Impulsraum benutzt.

Wie bekannt, kann man beim Keplerproblem für die Energie, den Absolutwert des Impulsmomentes und seine Komponente in einer gegebenen Richtung, bestimmte Werte angeben, für die Koordinaten oder Impulse des Elektrons dagegen nur statistische Verteilungen. Beide Verteilungen sind durch das Quadrat des Absolutwertes einer „Wahrscheinlichkeitsamplitude" gegeben, die wir im ersten Falle durch Lösung der Schrödingerschen Wellengleichung im Koordinatenraum erhalten. Im zweiten Falle können wir sie aus einer Schrödingerschen Eigenfunktion mit Hilfe der Dirac-Jordanschen Transformationstheorie ableiten, oder aber wir können sie durch Lösung einer transformierten Wellengleichung erhalten. In der erstgenannten Weise haben Podolsky und Pauling[1]) die Eigenfunktionen im Impulsraum entwickelt. Hier soll dieselbe Angabe gelöst werden, indem zunächst die Wellengleichung im Impulsraum aus der üblichen Wellengleichung mit Hilfe der Rechnungsregeln der nichtkommutativen Algebra abgeleitet wird.

Zu diesem Zweck wollen wir ein paar Formeln der nichtkommutativen Algebra aufstellen, die zwar bei der vorliegenden Aufgabe entbehrlich sind und nichts mehr enthalten als die einfache Vertauschungsrelation, die aber bei derartigen Rechnungen sehr bequem sind, weil sie schon eine ganze Menge von wiederholten Anwendungen der Vertauschungsrelation enthalten.

Wir fangen mit der einfachen Vertauschungsrelation an,

$$p q = q p + \frac{h}{2 \pi i}, \tag{1}$$

[1]) B. Podolsky u. L. Pauling, Phys. Rev. 34, 109, 1929.

aus der man die allgemeinere Formel

$$p\,f(q) = f(q)\,p + \frac{h}{2\pi i}\frac{d f}{d q} \tag{2}$$

entwickelt. Man kann die Gleichung als Definition von df/dq auffassen, wir wollen aber df/dq als in üblicher Weise definiert denken, d. h. als $f'(q)$, wobei $f'(x)$ die Ableitung einer gewöhnlichen Funktion $f(x)$ ist. Dann ist (2) eine Folge der Vertauschungsrelation (1), wenn $f(q)$ ein Polynom von q ist, oder noch allgemeiner eine Potenzreihe mit positiven Potenzen. Dies folgt daraus, daß, wenn Gleichung (2) für zwei Funktionen $f(q)$ und $g(q)$ gilt, so gilt sie auch für die Funktionen $f + g$ und fg.

Die Gleichung (2) gilt aber auch für noch allgemeinere Funktionen, die wir mit Hilfe der Diracschen Theorie[1]) definieren können. Bei allen solchen Funktionen gilt, daß je zwei, die als Funktionen voneinander oder von einer gemeinsamen Größe ausgedrückt werden können, immer kommutativ sind.

Nun ist z. B.

$$\left(p\frac{1}{f} - \frac{1}{f}p\right)f = p - \frac{1}{f}p\,f = -\frac{h}{2\pi i}\frac{1}{f}\frac{d f}{d q}.$$

Rechts steht eine Funktion von q, folglich müssen beide Glieder links Funktionen von q sein, weil f Funktion von q ist. Sie sind also kommutativ, und wir erhalten durch Multiplikation links mit $1/f$

$$p\frac{1}{f} - \frac{1}{f}p = -\frac{h}{2\pi i}\frac{1}{f^2}\frac{d f}{d q} = \frac{h}{2\pi i}\frac{d}{d q}\frac{1}{f}. \tag{3}$$

Dasselbe würden wir natürlich direkt durch Multiplikation rechts mit $1/f$ erhalten, weil $1/f$ und df/dq Funktionen von q sind und somit kommutiert. Gleichung (2) gilt also auch für $1/f$, wenn sie für f gilt, und speziell gilt sie dann bei allen negativen Potenzen von q.

Weiter ist z. B.

$$\begin{aligned}(p f^{\frac{1}{n}} - f^{\frac{1}{n}} p) f^{1-\frac{1}{n}} + f^{\frac{1}{n}}(p f^{\frac{1}{n}} - f^{\frac{1}{n}} p) f^{1-\frac{2}{n}} + \cdots \\ + f^{1-\frac{1}{n}}(p f^{\frac{1}{n}} - f^{\frac{1}{n}} p) = p f - f p = \frac{h}{2\pi i}\frac{d f}{d q}.\end{aligned}$$

Diese Gleichung multiplizieren wir rechts und links mit $f^{\frac{1}{n}}$ und bilden die Differenz. Wir erhalten dann

$$(p f^{\frac{1}{n}} - f^{\frac{1}{n}} p) f - f (p f^{\frac{1}{n}} - f^{\frac{1}{n}} p) = 0,$$

[1]) P. A. M. Dirac, Principles of Quantum Mechanics. Oxford 1930.

weil $f^{\frac{1}{n}}$ und df/dq kommutativ sind. $pf^{\frac{1}{n}} - f^{\frac{1}{n}}p$ kommutiert also mit f und somit auch mit jeder Funktion von f. Aus der obigen Gleichung finden wir also dann

$$n f^{1-\frac{1}{n}} (p f^{\frac{1}{n}} - f^{\frac{1}{n}} p) = \frac{h}{2\pi i} \frac{df}{dq},$$

oder

$$p f^{\frac{1}{n}} - f^{\frac{1}{n}} p = \frac{h}{2\pi i} \frac{1}{n} f^{\frac{1}{n}-1} \frac{df}{dq} = \frac{h}{2\pi i} \frac{d}{dq} f^{\frac{1}{n}}. \tag{4}$$

Wenn Gleichung (2) für eine Funktion f gilt, so gilt sie also auch für jede Wurzel von f.

Es sei nun $g(p)$ eine Funktion von p. Dann ist

$$\begin{aligned} g f &= f g + \frac{h}{2\pi i} \frac{df}{dq} \cdot \frac{dg}{dp} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \frac{d^2 f}{dq^2} \cdot \frac{d^2 g}{dp^2} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^n \frac{d^n f}{dq^n} \frac{d^n g}{dp^n}, \end{aligned} \tag{5}$$

denn aus (5) und (2) folgt

$$p g f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^n \frac{d^n f}{dq^n} \left(n \frac{d^{n-1} g}{dp^{n-1}} + p \frac{d^n g}{dp^n}\right),$$

und der letzte Klammerausdruck ist die n-te Ableitung von pg nach p. Folglich gilt die Formel allgemein, wenn g ein Polynom oder eine Potenzreihe mit positiven Potenzen von p ist, weil sie bei $g = p$ gilt. Auch gilt sie, wenn g eine ganz allgemeine Funktion von p, und f ein Polynom von q ist. Sie muß wohl auch gelten, wenn sowohl g als f allgemeinere Funktionen sind, doch ist sie dann jedenfalls von geringem Nutzen. Sie gilt noch, wenn f eine Funktion von mehreren q, und g eine Funktion eines der p, z. B. p_r ist, wobei wir $\partial/\partial q$ und $\partial/\partial p$ durch $\partial/\partial q_r$ und $\partial/\partial p_r$ zu ersetzen haben. f darf dabei sogar auch Funktion der p sein (natürlich eine „wohlgeordnete“ Funktion). Wenn g eine Funktion zweier p, z. B. p_1 und p_2, so lautet die entsprechende Gleichung:

$$\begin{aligned} g f &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^n \left[\frac{\partial^n f}{\partial q_1^n} \frac{\partial^n g}{\partial p_1^n} + \frac{n}{1} \frac{\partial^n f}{\partial q_1^{n-1} \partial q_2} \cdot \frac{\partial g}{\partial p_1^{n-1} \partial p_2} + \cdots\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^n \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{\partial}{\partial p_2}\right]^n f g, \end{aligned} \tag{6}$$

welche wir beweisen können, indem wir zeigen, daß sie bei $p_1 g$ oder $p_2 g$ gilt, wenn sie bei $g(p_1, p_2)$ richtig ist. In der symbolischen Schreibweise ist natürlich vorausgesetzt, daß $\partial/\partial p_1$ usw. nur auf g zu wirken hat, wenn f Funktion auch von den p ist. Wenn schließlich g eine Funktion mit positiven Potenzen von sämtlichen p ist, so lautet die Formel

$$gf = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^n \left[\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial p_2} + \cdots\right]^n fg$$
$$= e^{\frac{h}{2\pi i}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial p_2} + \cdots\right]} fg \tag{7}$$

in symbolischer Schreibweise. Bei Vertauschung „in der entgegengesetzten Richtung" haben wir überall $\frac{h}{2\pi i}$ durch $\frac{ih}{2\pi}$ zu ersetzen, also

$$fg = e^{\frac{ih}{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial p_1}\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\partial}{\partial p_2}\frac{\partial}{\partial q_2} + \cdots\right]} gf.$$

Wir gehen nun zur Aufstellung der Wellengleichung im Impulsraum über und begnügen uns dabei mit der Behandlung des Wasserstoffatoms. Die Energiegleichung lautet:

$$\frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \left(E + \frac{e^2}{r}\right) = 0. \tag{8}$$

Dies ist natürlich so zu verstehen, daß der angegebene Operator, angewandt auf eine Eigenfunktion $\psi(x, y, z)$, den Wert Null gibt, wenn E der entsprechende Eigenwert ist. Dasselbe muß auch der Fall sein, wenn der Operator auf eine Eigenfunktion oder „Wahrscheinlichkeitsamplitude" $\psi(p_x, p_y, p_z)$ im Impulsraum angewandt wird, nur läßt sich dann die Bedeutung des Operators $1/r$ erst auf indirektem Wege angeben und es empfiehlt sich, die Energiegleichung umzuformen.

Eine ganz naive Umformung mit Hilfe der gewöhnlichen Rechnungsregeln würde zu der brauchbaren Gleichung

$$(p^2 - 2\,mE)^2 r^2 - 4\,m^2 e^4 = 0 \tag{8a}$$

führen. Denn hier läßt sich der Operator $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ direkt durch $\left(\frac{ih}{2\pi}\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_z^2}\right)$ ersetzen. Die Gleichung (8a) ist aber nicht die richtige, weil man die Rechnungsregeln der nichtkommutativen Algebra verletzt hat. Dies zeigt sich z. B. darin, daß man nicht die Eigenwerte

$$E_n = -\frac{Rh}{n^2}, \text{ sondern } E_n = -\frac{Rh}{n^2 - \frac{1}{4}}$$

erhält. Die Gleichung muß also mit Hilfe der nichtkommutativen Algebra durch gewisse kleine Glieder ergänzt werden.

Zu diesem Zweck schreiben wir (8) in der Form

$$p^2 - 2mE = \frac{2me^2}{r}. \tag{9}$$

Wir multiplizieren nun links mit r, dann wieder links mit $r(p^2-2mE)$ und erhalten

$$r(p^2 - 2mE)\,r\,(p^2 - 2mE) = 4m^2e^4. \tag{9a}$$

Nun ist nach der Formel (7) oder (7a)

$$r(p^2 - 2mE) = (p^2 - 2mE)\,r + \frac{ih}{2\pi}2(p_x x + p_y y + p_z z)\frac{1}{r} + \left(\frac{ih}{2\pi}\right)^2\cdot\frac{2}{r}, \tag{9b}$$

daher

$$(p^2 - 2mE)\,r^2\,(p^2 - 2mE) + 2\frac{ih}{2\pi}(p_x x + p_y y + p_z z)(p^2 - 2mE)$$
$$+ 2\left(\frac{ih}{2\pi}\right)^2(p^2 - 2mE) = 4m^2e^4. \tag{9c}$$

Weiter ist

$$r^2(p^2 - 2mE) = (p^2 - 2mE)\,r^2 + 4\frac{ih}{2\pi}(p_x x + p_y y + p_z z) + 6\left(\frac{ih}{2\pi}\right)^2 \tag{9b}$$

und

$$x p^2 = p^2 x + \frac{ih}{2\pi}\cdot 2p_x, \quad \text{usw.}$$

Wir erhalten demnach

$$(p^2 - 2mE)^2 r^2 + (p^2 - 2mE)\left[6\frac{ih}{2\pi}(p_x x + p_y y + p_z z) + 8\left(\frac{ih}{2\pi}\right)^2\right]$$
$$+ 4\left(\frac{ih}{2\pi}\right)^2 p^2 = 4m^2e^4 \tag{9e}$$

oder

$$(p^2 - 2mE)^2 r^2 + (p^2 - 2mE)\left[6\frac{ih}{2\pi}(p_x x + p_y y + p_z z) + 12\left(\frac{ih}{2\pi}\right)^2\right]$$
$$+ 2m\left(E\left(\frac{ih}{2\pi}\right)^2 - 2me^4\right) = 0. \tag{9f}$$

Die Wellengleichung lautet somit

$$(p^2 - 2mE)^2\left[\frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_z^2}\right]$$
$$+ (p^2 - 2mE)\left[6\left(p_x\frac{\partial}{\partial p_x} + p_y\frac{\partial}{\partial p_y} + p_z\frac{\partial}{\partial p_z}\right) + 12\right] + 2m(E + 4Rh) = 0. \tag{9g}$$

Diese Gleichung führt zu den richtigen Eigenwerten und zu den von Podolsky und Pauling gefundenen Eigenfunktionen.

Wir können aber die Sache einfacher machen, indem wir zunächst in (9) mit r *rechts* multiplizieren. Das bedeutet eine Kontakttransformation, und die Lösung der entsprechenden Wellengleichung ergibt uns die mit $1/r$ oder $(p^2 - 2\,mE)$ multiplizierte Eigenfunktion.

In diesem Falle haben wir also

$$(p^2 - 2\,mE)\,r = 2\,me^2 \text{ und } (p^2 - 2\,mE)\,r\,(p^2 - 2\,mE)\,r = 4\,m^2 e^4, \quad (10)$$

die wir mit Hilfe von (9b) direkt schreiben als

$$(p^2 - 2mE)^2 r^2 + (p^2 - 2\,mE)\left[2\frac{ih}{2\pi}(p_x x + p_y y + p_z z) + 2\left(\frac{ih}{2\pi}\right)^2\right] = 4\,m^2 e^4. \quad \textbf{(10a)}$$

Die letzte Gleichung ist auch unmittelbar aus (9c) zu erhalten, indem man zunächst mit $(p^2 - 2\,mE)^{-1}$ rechts und dann wieder mit $(p^2 - 2\,mE)$ links multipliziert. Das bedeutet ja gerade die soeben erwähnte Kontrakttransformation.

Wir ersetzen nun die x, y, z überall durch $\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial p_x}$ usw. und erhalten die Wellengleichung im Impulsraum:

$$\left.\begin{aligned} &(p^2 - 2\,mE)^2\left[\frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_z^2}\right] \\ &+ (p^2 - 2\,mE)\,2\left[p_x\frac{\partial}{\partial p_x} + p_y\frac{\partial}{\partial p_y} + p_z\frac{\partial}{\partial p_z} + 1\right] + 8\,m\,R\,h = 0, \\ &R\,h = \frac{2\,\pi^2\,m\,e^4}{h^2}. \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(10b)}$$

Wir führen jetzt statt der rechtwinkligen Koordinaten p_x, p_y, p_z die Impulspolarkoordinaten p, Θ, Φ ein. Die Gleichung (10b) ist dann separierbar und wir können in der Eigenfunktion einen Faktor

$$P_l^m(\cos\Theta)\,e^{im\Phi}$$

abspalten. Für den p-abhängigen Teil ergibt sich dann die Gleichung

$$(p^2 - 2mE)^2\left[\frac{d^2}{dp^2} + \frac{2}{p}\frac{d}{dp} - \frac{l(l+1)}{p^2}\right] + (p^2 - 2\,mE)\left[2\,p\frac{d}{dp} + 2\right] + 8mRh = 0, \quad \textbf{(10c)}$$

und weiter durch die Substitution

$$\left.\begin{aligned} &p = \sqrt{-2\,mE}\,\xi, \\ &(\xi^2 + 1)^2\left[\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi}\frac{d}{d\xi} - \frac{l(l+1)}{\xi^2}\right] + (\xi^2 + 1)\left[2\,\xi\frac{d}{d\xi} + 2\right] + 4a = 0, \\ &a = -\frac{Rh}{E}, \qquad E = -\frac{Rh}{a}. \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(10d)}$$

Wir spalten nun aus der Eigenfunktion einen Faktor ξ^l ab, d. h. wir multiplizieren links mit ξ^{-l}, rechts mit ξ^l. Es ergibt sich dann

$$(\xi^2+1)^2\left[\frac{d^2}{d\xi^2}+\frac{2l+2}{\xi}\frac{d}{d\xi}\right]+(\xi^2+1)\left[2\xi\frac{d}{d\xi}+2l+2\right]+4a=0, \quad (10\text{e})$$

und weiter bei

$$\left.\begin{aligned}\eta &= \xi^2,\\ (\eta+1)^2\left[\eta\frac{d^2}{d\eta^2}+\left(l+\frac{3}{2}\right)\frac{d}{d\eta}\right]+(\eta+1)\left[\eta\frac{d}{d\eta}+\frac{l+1}{2}\right]+a &= 0.\end{aligned}\right\} \quad (10\text{f})$$

Die Lösung dieser Gleichung läßt sich in eine negative Potenzreihe nach $(\eta+1)$ entwickeln:

$$\sum_k \frac{c_k}{(\eta+1)^{\lambda+k}}.$$

Es ergibt sich für die c_k die Rekursionsformel

$$\left[(\lambda+k)\left(\lambda+k-l-\frac{3}{2}\right)+\frac{l+1}{2}\right]c_k = [(\lambda+k-1)^2-a]\,c_{k-1}. \quad (10\text{g})$$

Damit die Reihe nach beiden Seiten abbricht, z. B. $c_{-1}=0$, $c_{n_r+1}=0$, muß

$$\lambda^2-\left(l+\frac{3}{2}\right)\lambda+\frac{l+1}{2} = 0, \text{ d. h. } \lambda = \begin{cases} l+1 \\ \frac{1}{2}\end{cases},$$

und

$$(\lambda+n_r)^2-a=0$$

sein.

Wir müssen hier offenbar $\lambda = l+1$ nehmen, um die Grenzbedingungen im Unendlichen $\xi\to\infty$ zu befriedigen. Wir erhalten somit

$$\left.\begin{aligned} a &= n^2, \qquad E = -\frac{Rh}{n^2},\\ n &= n_r+l+1.\end{aligned}\right\} \quad (10\text{g})$$

Um nun einen einfachen expliziten Ausdruck der Eigenfunktion zu erhalten, spalten wir einen Faktor $(\eta+1)^{-(l+1)}$ ab, d. h. wir multiplizieren rechts mit diesem Faktor und links mit $(\eta+1)^{l+1}$. Wir finden dann

$$\begin{aligned}&(\eta+1)^2\eta\frac{d^2}{d\eta^2}\\ &+\left[-(2l+1)\eta(\eta+1)+\left(l+\frac{3}{2}\right)(\eta+1)^2\right]\frac{d}{d\eta}+n^2-(l+1)^2 = 0, \quad (11)\end{aligned}$$

und wieder bei

$$\left.\begin{aligned}&\zeta = \frac{\eta-1}{\eta+1}, \qquad \eta = \frac{1+\zeta}{1-\zeta}, \qquad 0\leqslant\eta\leqslant\infty, \qquad -1\leqslant\zeta\leqslant 1,\\ &\left[1-\zeta^2\right]\frac{d^2}{d\zeta^2}-(2l+3)\zeta\frac{d}{d\zeta}+n^2-(l+1)^2 = 0.\end{aligned}\right\} \quad (11\text{a})$$

Das ist die Differentialgleichung der von Pauling und Podolsky, a. a. O. angegebenen Gegenbauerschen Funktionen

$$C_{n-l-1}^{l+1}(\zeta).$$

Wir vergleichen die Differentialgleichung (11a) mit der Differentialgleichung der Legendreschen Polynome und ihrer Ableitungen

$$\left\{[1-\zeta^2]\frac{d^2}{d\zeta^2}-(2l+2)\zeta\frac{d}{d\zeta}+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\right\}P_n^{(l)}(\zeta) = 0, \quad (11\,\mathrm{b})$$

und, um an die Verwandtschaft der Gegenbauerschen und der Legendreschen Funktionen zu erinnern, schreiben wir

$$C_{n-l-1}^{l+1}(\zeta) = P_{n-\frac{1}{2}}^{\left(l+\frac{1}{2}\right)}(\zeta). \quad (11\,\mathrm{c})$$

Diese Funktionen lassen sich in ganz ähnlicher Weise wie die Legendreschen mit Hilfe einer erzeugenden Funktion $\psi(\zeta, t) = (1-2\zeta t+t^2)^{-(l+1)}$ definieren. Man hat in der Tat bis auf einen gemeinsamen numerischen Faktor

$$\psi(\zeta, t) = (1-2\zeta t+t^2)^{-(l+1)} = \sum_{n=l+1}^{\infty} P_{n-\frac{1}{2}}^{\left(l+\frac{1}{2}\right)}(\zeta)\, t^{n-l-1}, \quad (11\,\mathrm{d})$$

denn aus

$$(1-2\zeta t+t^2)\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} = (2l+2)t\psi, \quad (1-2\zeta t+t^2)\frac{\partial\psi}{\partial t} = (2l+2)(\zeta-t)\psi$$

folgt

$$(\zeta-t)\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} = t\frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad (1-\zeta^2)\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} = (2l+2)t\psi - t(\zeta-t)\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

und weiter

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\zeta}(1-\zeta^2)\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} &= (2l+2)t\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} - t\frac{\partial\psi}{\partial t} - t(\zeta-t)\frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta\,\partial t} \\ &= (2l+2)\left[\zeta\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} - t\frac{\partial\psi}{\partial t}\right] - t\frac{\partial\psi}{\partial t} - t^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - t\frac{\partial\psi}{\partial t} - t\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}.\end{aligned}$$

Durch Umformung des letzten Gliedes erhält man

$$(1-\zeta^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2} - (2l+3)\zeta\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} + t^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + (2l+3)t\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0. \quad (11\,\mathrm{e})$$

Aus dieser partiellen Differentialgleichung folgt die Differentialgleichung (11a) für die Entwicklungskoeffizienten $P_{n-\frac{1}{2}}^{\left(l+\frac{1}{2}\right)}(\zeta)$ von (11d).

Die Eigenfunktionen von (9g) lauten nun, wenn wir an die verschiedenen Transformationen erinnern,

$$\Psi_{nlm} = \frac{\xi}{(\xi^2+1)^{l+2}} P_{n-\frac{1}{2}}^{\left(l+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\xi^2-1}{\xi^2+1}\right) P_l^m(\Theta)\, e^{im\Phi}, \tag{12}$$

wobei

$$\xi = \frac{p}{\sqrt{-2mE}} = \frac{np}{\frac{2\pi e^2}{h} m} = \frac{np}{p_0}. \tag{12a}$$

p_0 ist der Gesamtimpuls eines Elektrons in der ersten Bohrschen Kreisbahn, denn $\alpha = 2\pi e^2/h$ ist ja gerade die Geschwindigkeit. Die Funktionen (12) sind bis auf einen Normierungsfaktor die von Podolsky und Pauling a. a. O. angegebenen.