ΔΗΜ. Δ. ΚΩΤΣΑΚΗ

Ὑφηγητοῦ τῆς Ἀστρονομίας ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ Ἀθηνῶν
καὶ τῷ Ἐθνικῷ Μετσοβίῳ Πολυτεχνείῳ

ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ
ΚΑΙ
ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Βοήθημα διὰ τὴν μαθηματικὴν ἐπεξεργασίαν
τῶν πειραματικῶν δεδομένων.

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ
Ἀναθεωρημένη καὶ ἐπηυξημένη

Καφς

ΑΘΗΝΑΙ
1962

ΠΡΟΛΟΓΟΣ Αης ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Ἡ ἐπιστημονικὴ ἐπεξεργασία καὶ βαθυτέρα μελέτη τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν παρατηρήσεων διαφόρων φαινομένων ἢ τῶν ἐξαγομένων τῶν μετρήσεων κατὰ τὰς πειραματικὰς ἐρεύνας, ἀποτελεῖ πρόβλημα τὸ ὁποῖον ἀπασχολεῖ σοβαρῶς πλείστους ὅσους ἐρευνητὰς ποικίλων κλάδων τῆς ἐπιστήμης, μάλιστα κατὰ τὰς τελευταίας δεκαετίας. Καὶ παρουσιάζεται πολλάκις ἡ ἀνάγκη ὅπως ὁ ἐρευνητὴς βοηθῆται ἀρκούντως, ὥστε τὰ διατυπούμενα ὑπ' αὐτοῦ συμπεράσματα, νὰ παρέχουν ὅλα ἐκεῖνα τὰ ἐχέγγυα, τὰ ὁποῖα θὰ τοῦ δίδουν τὴν βεβαιότητα, ὅτι πρόκειται περὶ μελέτης συστηματικῆς, ἥτις διεξήχθη ἐπὶ τῇ βάσει καθαρῶς ἐπιστημονικοῦ σχεδίου.

Ἀκριβῶς δὲ τὸ παρὸν δημοσίευμα ἔρχεται νὰ ὑποβοηθήσῃ τὸ ἔργον τῶν ἐρευνητῶν ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἀσχολοῦνται μὲ τὴν σπουδὴν ποικίλων θεμάτων: φυσικῶν, χημικῶν, ἀστρονομικῶν, μετεωρολογικῶν, μηχανικῶν, ἰατρικῶν, δημογραφικῶν, κοινωνικῶν κ. λ. π., τὰ ὁποῖα στηρίζονται εἰς μεγάλον ἀριθμὸν μετρήσεων ἢ παρατηρήσεων καὶ ἅτινα ὑπόκεινται κυρίως εἰς τὸν ἀναπόφευκτον νόμον τῶν τυχαίων σφαλμάτων. Ἐφ' ὅσον, δηλαδή, πρόκειται περὶ ἐξαγομένων ἀνθρωπίνων, ταῦτα συνοδεύονται πάντοτε ὑπὸ σφαλμάτων, καὶ προέχει ἡ ἀνάγκη τῆς ἀπαλλαγῆς των ἐκ τούτων, ἐπὶ τῇ βάσει ὅμως κριτηρίων ἀντικειμενικῶν, διατυπωμένων εἰς γλῶσσαν μαθηματικήν. Ἡ διαπραγμάτευσις τοῦ προβλήματος τῆς θεωρίας τῶν σφαλμάτων καὶ ἡ ἰσοστάθμισις ἢ ἀφομοίωσις αὐτῶν διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, εἶναι τὸ θέμα τὸ ὁποῖον ἀναπτύσσεται εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο. Κατεβλήθη προσπάθεια ὅπως γίνῃ πᾶσα δυνατὴ ἁπλούστευσις καὶ διασάφησις πολλῶν ἐννοιῶν καὶ ὅρων καὶ διὰ τῆς καταχωρήσεως πολλῶν—πλείστων—παραδειγμάτων, ἐκ διαφόρων κλάδων τῆς ἐπιστήμης εἰλημμένων, νὰ διευκολύνεται ὄντως ὁ ἀναγνώστης, διὰ νὰ ἐφαρμόζῃ τὰς ἀναπτυσσομένας μεθόδους εἰς τὰ ἑκάστοτε ζητήματα τὰ ὁποῖα ἐρευνᾷ.

Πολλὰ ἐκ τῶν ἐν τῷ ἔργῳ τούτῳ περιλαμβανομένων θεμάτων ἀνεπτύχθησαν κατὰ τὰ δύο τελευταῖα ἀκαδημαϊκὰ ἔτη εἰς τοὺς τεταρτοετεῖς φοιτητὰς τῶν Μαθηματικῶν καὶ Φυσικῶν τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν, μερικὰ δὲ πρό τινων ἐτῶν εἰς τὸ τμῆμα ἀξιωματικῶν μηχανικῶν τῆς Σχολῆς Ἀεροπορίας. Ἐκρίθη δὲ σκόπιμον νὰ δημοσιευθοῦν διὰ τοῦ παρόντος, ὥστε οἱ ἐνδιαφερόμενοι διὰ τὴν ἔρευναν διαφόρων προβλημάτων, νὰ ἔχουν ἕνα πρόχειρον καὶ εὔχρηστον βοήθημα, τὸ ὁποῖον θὰ τοὺς διευκολύνῃ εἰς τὴν ἐπιτυχῆ καὶ ἀκριβῆ διαπραγμάτευσιν καὶ λύσιν αὐτῶν.

Τὸ θέμα τοῦτο, δι' ὅσων ἐν τῷ παρόντι γράφονται, ἀσφαλῶς δὲν ἐξαντλεῖται. Ἐλπίζομεν ὅμως ὅτι ἡ ἔκδοσις αὕτη θὰ βοηθήσῃ πολλοὺς εἰς τὴν βαθυτέραν ἔρευναν θεμάτων τῆς εἰδικότητός των, ὁ δὲ συγγραφεὺς θὰ ἐθεώρει τὸν ἑαυτόν του ἱκανοποιημένον, ἐὰν ὄντως ἐπετύγχανε τοῦτο, καὶ ἐπὶ πλέον, ἐὰν ἔδιδεν ἀφορμὴν εἰς ἄλλους ἐρευνητὰς νὰ παρουσιάσουν ἐκτενέστερα καὶ πληρέστερα ἔργα, εἰς τὸν κλάδον αὐτὸν τῆς ἐπιστήμης.

Ἀπρίλιος 1953

Δ. Κ.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ Β^{ας} ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Ἡ εὐμενὴς ὑποδοχή, τῆς ὁποίας ἔτυχεν ἐκ μέρους τῶν εἰδικῶν ἡ α'. ἔκδοσις τοῦ ἔργου τούτου, ὤθησεν ἡμᾶς εἰς τό νὰ ἐμφανίσωμεν τὴν παροῦσαν, ἀναθεωρημένην καὶ ἐπηυξημένην.

Εἰς τὸ πρῶτον μέρος τοῦ βιβλίου μικραὶ μόνον προσθῆκαι ἔγιναν, ἀρκεταὶ τῶν ὁποίων ἀναφέρονται εἰς τὴν διασάφησιν μερικῶν ἐννοιῶν καὶ ὁρισμῶν, πρὸς τὸν σκοπόν τῆς πλέον ἐπιτυχοῦς χρησιμοποιήσεως τῶν τύπων κατὰ τὴν ἔρευναν τῶν ἑκάστοτε τιθεμένων θεμάτων. Εἰς τὸ δεύτερον ὅμως μέρος κατεχωρήθησαν πλεῖστα παραδείγματα καὶ ἐπὶ πλέον νέον κεφάλαιον ἀφορῶν εἰς τὴν ἰσοστάθμησιν τῶν σφαλμάτων τῶν τριγωνομετρικῶν δικτύων, τὰ ὁποῖα θὰ βοηθήσουν περισσότερον τοὺς τοπογράφους καὶ τοὺς γεωδαίτας.

Οὕτω συμπληρούμενον τὸ παρὸν ἔργον ἐλπίζομεν νὰ καταστῇ οὐσιῶδες βοήθημα εἰς χεῖρας τῶν ἐπεξεργαζομένων πειραματικὰ δεδομένα ἢ σειρὰς παρατηρήσεων, αἱ ὁποῖαι περιέχουν τυχαῖα σφάλματα. Ἐν προκειμένῳ δέον νὰ τονισθῇ, ὅτι ἡ ἑκάστοτε διακρίβωσις τοῦ εἴδους τῶν σφαλμάτων καὶ ὁ τρόπος τῆς σπουδῆς των εἶναι ζήτημα λεπτὸν καὶ δύσκολον, νομίζομεν δὲ ὅτι τὸ δημοσίευμα τοῦτο συμβάλλει ἀρκούντως, ὥστε νὰ γίνεται ἀκριβὴς καὶ ἐπιτυχὴς διερεύνησις τῶν μελετωμένων ὑπὸ τῶν εἰδικῶν προβλημάτων.

Θεωροῦμεν καθῆκον νὰ εὐχαριστήσωμεν θερμῶς ὅσους ὑπέδειξαν βελτιώσεις τινας τοῦ παρόντος ἢ καὶ ἔθεσαν εἰς τὴν διάθεσιν ἡμῶν ὡρισμένα παραδείγματα. Ἰδιαιτέρως ὀφείλονται εὐχαριστίαι εἰς τὸ

Γενικὸν Ἐπιτελεῖον Στρατοῦ διὰ τὴν ἔγκρισιν τῆς ἐκτυπώσεώς του εἰς τὴν Γεωγραφικὴν Ὑπηρεσίαν Στρατοῦ, ἥτις προθύμως ἀνέλαβε καὶ ἔφερεν εἰς πέρας τὴν ἐργασίαν ταύτην. Ὁ συγγραφεὺς θὰ εἶναι ἰδιαιτέρως εὐχαριστημένος, ἂν καὶ ἡ νέα αὕτη ἔκδοσις βοηθήση πολλοὺς Ἕλληνας ἐπιστήμονας καὶ τεχνικοὺς κατὰ τὴν μελέτην προβλημάτων, τὰ ὁποῖα ἑκάστοτε τίθενται εἰς αὐτοὺς πρὸς λύσιν.

Ἰανουάριος 1962 Δ. Κ.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ ΚΑΤΑ ΤΑΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Θέσις τοῦ ζητήματος.

Ὁ ἄνθρωπος λαμβάνει γνῶσιν τοῦ φυσικοῦ κόσμου διὰ τῶν αἰσθήσεών του, αἱ ὁποῖαι συχνὰ βοηθοῦνται καὶ ὑπὸ διαφόρων ὀργάνων. Εἰς ὅλας ὅμως τὰς παρατηρήσεις καὶ τὰς μετρήσεις ἐμφιλοχωροῦν ὁπωσδήποτε σφάλματα. Καμμία μέτρησις δὲν εἶναι ἀπολύτως ἀκριβής. Ὁσονδήποτε μεγάλην προσοχὴν καὶ ἐὰν καταβάλωμεν, ἀλλὰ καὶ τὰ ἀκριβέστερα καὶ πλέον εὐπαθῆ ὄργανα καὶ ἂν χρησιμοποιήσωμεν, πάντοτε θὰ ἐμφανισθοῦν σφάλματα. Ταῦτα θὰ προέρχωνται, εἴτε ἀπὸ τὴν ἀτέλειαν τῶν ἀνθρωπίνων αἰσθήσεων, εἴτε ἀπὸ τὰ βοηθητικὰ ὄργανα τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦνται, εἴτε ἀπὸ τὰς ἐξωτερικὰς συνθήκας—ὅπως π.χ. εἶναι αἱ μετεωρολογικαί—, κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἐκτελέσεως τῆς μετρήσεως, εἴτε θὰ ἀναφέρωνται καὶ εἰς διαφόρους ἄλλους λόγους.

Εἰς ὅλας δηλαδὴ τὰς μετρήσεις ἢ παρατηρήσεις τοῦ ἀνθρώπου, ὑπάρχει πάντοτε μία περιοχὴ ἀβεβαιότητος, λόγῳ τῶν ἀναποφεύκτων σφαλμάτων. Καὶ τὸ ἑκάστοτε σφάλμα ὁρίζεται ὡς διαφορὰ μεταξὺ τῆς ἀληθοῦς τιμῆς τῆς ποσότητος καὶ ἐκείνης τὴν ὁποίαν ἡμεῖς, διὰ τῆς παρατηρήσεως, εὑρίσκομεν. *Ἀλλ᾽ ἐφ᾽ ὅσον μᾶς εἶναι ἄγνωστος ἡ ἀληθὴς τιμὴ τῆς ὑπὸ μέτρησιν ποσότητος, προφανῶς, εἶναι ἄγνωστον καὶ τὸ ἀληθὲς σφάλμα τὸ ὁποῖον ἐμφανίζεται εἰς μίαν τοιαύτην μέτρησιν.* Κατὰ συνέπειαν, καθίσταται ἐν πολλοῖς δύσκολος καὶ προβληματικὴ ἡ εὕρεσις τῶν σφαλμάτων, ὅταν ἐκτελῶμεν μίαν μέτρησιν ἢ παρατήρησιν ἢ καὶ πείραμα. Συχνὰ ὅμως εἶναι δυνατὴ ἡ ἐξακρίβωσις καὶ εὕρεσις τῆς ἀληθοῦς τιμῆς μιᾶς μετρήσεως ἢ παρατηρήσεως. Ἡ ἐπανάληψις π.χ. μιᾶς μετρήσεως καθιστᾶ, μέχρις ἑνὸς βαθμοῦ, δυνατὴν τὴν εὕρεσιν, κατὰ μεγάλην προσέγγισιν, τῆς ἀκριβοῦς τιμῆς· ἐπίσης ὅταν μετρᾷ ἢ παρατηρῇ κανείς, μεγέθη τὰ ὁποῖα συνδέονται δι᾽ ἄλλης τινος, γνωστῆς ἤδη σχέσεως. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν γνωρίζομεν, ἐκ προτέρου, τὴν ἀληθῆ τιμήν, ὁπότε δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ τὸ ἀληθὲς σφάλμα. Παράδειγμα ἔστω ἡ μέτρησις τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου, τὸ ἄθροισμα τῶν ὁποίων, ὡς γνωστόν, ἰσοῦται πρὸς 180°.

Ἀλλὰ πῶς θὰ ἐπιτύχωμεν ἀκριβεῖς μετρήσεις, ἢ μᾶλλον, πῶς θὰ δυνηθῶμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὴν πλέον καλυτέραν τιμήν, ἐφ' ὅσον κατ' ἀρχὴν εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀποφύγωμεν τὴν ἐμφάνισιν σφαλμάτων κατὰ τὰς παρατηρήσεις ἢ μετρήσεις οἱουδήποτε φυσικοῦ ποσοῦ ; Τὸ θέμα τοῦτο ἀποτελεῖ ἀντικείμενον μελέτης τῆς *θεωρίας τῶν σφαλμάτων*. Ἡ θεωρία αὕτη ἐξετάζει τὸ ὅλον πρόβλημα καὶ ἐμβαθύνει εἰς τὴν ἔρευναν τῶν αἰτίων, τὰ ὁποῖα δημιουργοῦν τὰ σφάλματα εἰς τὴν φύσιν καὶ τὸν τρόπον τῆς ὑπερνικήσεως αὐτῶν καὶ γενικώτερον πᾶν ὅ,τι ἀφορᾷ εἰς ἀνακριβείας ἢ σφάλματα, τὰ ὁποῖα, διὰ τὸν ἕνα ἢ ἄλλον λόγον, συνοδεύουν οἱανδήποτε μέτρησιν ἢ παρατήρησιν.

Ὁ ὅρος σφάλμα χρησιμοποιεῖται ἐνίοτε, οὐχὶ ὀρθῶς, ἀντὶ τοῦ ὅρου «ἀσυμφωνία» (discrepancy). Ἀσυμφωνία ὅμως εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύο μετρηθεισῶν τιμῶν τῆς ἰδίας ποσότητος ὑπὸ δύο παρατηρητῶν ἢ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς πειραματικῆς τιμῆς καὶ τῆς τιμῆς τῆς διδομένης π.χ. ὑπὸ ἑνὸς πίνακος. Ἡ τοιαύτη τιμὴ δὲν εἶναι ὅπως ἐσφαλμένως νομίζεται, ἡ ἀκριβής, ἢ ἡ ἀληθὴς τιμή, διότι καὶ αὐτὴ προέρχεται ἀπὸ σειρὰν μετρήσεων. Καὶ πιθανῶς ἡ ἀκρίβεια τῶν μετρήσεων αὐτῶν νὰ εἶναι μικροτέρα ἐκείνης τὴν ὁποίαν μεταγενεστέρως ἐρευνῶμεν. Ἀντὶ τοῦ ὅρου σφάλμα χρησιμοποιοῦνται ἐξ ἄλλου καὶ αἱ λέξεις: *ἀνακρίβεια, ἀπόκλισις, ἐκτροπή, ἀποχή, ὑπόλοιπον* ὑπὸ τὴν αὐτὴν περίπου ἔννοιαν. Θὰ χρησιμοποιοῦμεν εἰς τὴν συνέχειαν συνήθως τὴν λέξιν σφάλμα. *

Πηγαὶ καὶ εἴδη σφαλμάτων

Τὰ σφάλματα προέρχονται ἐκ τῆς *φύσεως*, ἐκ τῶν *ὀργάνων* καὶ ἐκ τοῦ *παρατηρητοῦ*, ὅστις ἐκτελεῖ τὰς μετρήσεις.

1) ***Ἐκ τῆς φύσεως*** : Εἰς αὐτὰ δέον, ἐπὶ παραδείγματι, νὰ συγκαταλεχθοῦν : Θερμοκρασία, ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις, ἄνεμος, διάθλασις, ἐπίδρασις τῆς βαρύτητος, ἐμπόδια κατὰ τὴν μέτρησιν.

* Μερικοὶ ὅροι, ὅπως π.χ. ἀπόκλισις (déclinaison) καὶ ἀποχὴ (élongation) ἔχουν διαφορετικὰς σημασίας εἰς διαφόρους κλάδους τῆς ἐπιστήμης. Ὑπάρχουν καὶ συγγραφεῖς, οἱ ὁποῖοι διὰ τοῦ ὅρου σφάλμα ἐννοοῦν τὸν ἀριθμὸν τὸν ἀναφερόμενον εἰς τὴν ἐκτιμηθεῖσαν ἀβεβαιότητα κατὰ τὸν καθορισμὸν τῆς τιμῆς ἑνὸς μεγέθους, ἐνῷ πρόκειται περὶ ἄλλου σφάλματος ἢ παρομοίας ποσότητος, ὅπως θὰ ἴδωμεν βραδύτερον.

2) *Ἐκ τῶν ὀργάνων:* Διάφοροι ἀτέλειαι κατὰ τὴν κατασκευὴν τῶν ὀργάνων μετρήσεως ἢ πειράματος, καθὼς καὶ τῶν βοηθητικῶν πρὸς αὐτὰ συσκευῶν. Ἐπίσης, ἡ μικρὰ ἢ ἡ μεγάλη εὐπάθεια αὐτῶν, συνεπείᾳ καιρικῶν μεταβολῶν ἢ καὶ ἄλλης φύσεως μεταλλαγαὶ τῶν ὀργάνων. Ἀκόμη λάθη κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ὑπολογισμῶν, λόγῳ ἐσφαλμένης ἐκλογῆς τῶν καταλλήλων πινάκων, λογιστικῶν μηχανῶν ἢ λογαριθμικῶν κανόνων. Τὰ σφάλματα ἐκ τῶν ἐν λόγῳ μέσων, τὰ ὁποῖα ὑποβοηθοῦν τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ὑπολογισμῶν, πρέπει νὰ εἶναι μικρὰ ἐν σχέσει μὲ τὰ ἀναπόφευκτα σφάλματα τοῦ πειράματος, ὥστε νὰ δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ἀμελητέα. Ἂν λ.χ. τὰ πειραματικὰ δεδομένα δίδουν ἀκρίβειαν 5 σημαντικῶν ψηφίων, θὰ ἦτο ἄτοπον νὰ χρησιμοποιηθῇ λογιστικὸς κανὼν δίδων ἀκρίβειαν 3 ψηφίων.

3) *Ἐκ τοῦ παρατηρητοῦ:* Ἀτέλειαι καὶ ἐλαττώματα τῶν ἀνθρωπίνων αἰσθητηρίων, ὅπως τῆς ὁράσεως, ἀκοῆς, ἀφῆς. Προσωπικὰ λάθη.

Τὰ σφάλματα, ἀναλόγως τῆς προελεύσεως καὶ τῶν ἐκδηλώσεων αὐτῶν διακρίνονται εἰς τρεῖς κατηγορίας: Τὰ *φανερὰ ἢ χονδροειδῆ*· τὰ *συστηματικά*· καὶ τὰ *τυχαῖα ἢ ἀκανόνιστα ἢ πειραματικά*.

Α. Τὰ φανερὰ ἢ χονδροειδῆ σφάλματα ἔχουν τὴν αἰτίαν των κυρίως εἰς τὸν ἄνθρωπον. Ὀφείλονται, δηλαδὴ εἰς ἀπροσεξίαν κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς μετρήσεως ἢ παρατηρήσεως ἢ καὶ εἰς τὴν θεληματικὴν παρέμβασιν ξένου πρὸς τὴν ἔρευναν προσώπου. Δύνανται ἀκόμη νὰ εἶναι χονδροειδῆ λάθη ἀναγνώσεως βαθμολογημένων ὀργάνων, ρυθμίσεως συνθηκῶν τοῦ πειράματος ἢ ἐκτελέσεως τῶν ὑπολογισμῶν. Ταῦτα ἀσκοῦν μεγάλην ἐπίδρασιν εἰς τὸ ἀναμενόμενον ἐξαγόμενον. Τὰ τοιαῦτα σφάλματα κατὰ κανόνα δύνανται ἐκ προτέρου νὰ ἀποφευχθοῦν ἢ διὰ τοῦ ἐλέγχου νὰ εὑρεθοῦν καὶ νὰ ἀπομονωθοῦν. Ὁ ἐρευνητὴς εἶναι εἰς θέσιν συχνὰ νὰ διαπιστώνῃ τὴν ὕπαρξίν των καὶ νὰ τὰ θέτῃ κατὰ μέρος. Ταῦτα παρουσιάζουν μεγάλην ἐπίδρασιν εἰς τὸ ἀναμενόμενον ἐξαγόμενον ἢ ἄλλοτε ἀποκλίνουν αἰσθητῶς τῶν γειτονικῶν τιμῶν ἢ ἀκόμη ἡ παρουσία των γίνεται κατ' ἄλλους τρόπους ἀντιληπτή. Δέον ἐνταῦθα νὰ σημειωθῇ ὅτι ἐνίοτε ἡ αἰσθητὴ ἀπόκλισις μιᾶς μετρήσεως πιθανὸν νὰ ὀφείλεται εἰς κάποιαν αἰφνιδίαν μεταβολὴν τῶν συνθηκῶν παρατηρήσεως, ὅπως συμβαίνει μὲ τὴν ἐμφάνισιν μιᾶς καταιγίδος ἢ μὲ τὴν παρεμβολὴν ἑνὸς δευτερογενοῦς φαινομένου, ὁπότε τὸ ἐξαγόμενον πρέπει νὰ ἐξετασθῇ μεμονωμένως.

Ἑπομένως, τὰ φανερὰ ἢ χονδροειδῆ σφάλματα, δύνανται εὐκόλως νὰ εὑρεθοῦν καὶ αἱ σχετικαὶ μετρήσεις νὰ ἀπομονωθοῦν τῶν ὑπολοίπων, ὥστε νὰ μὴ ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν κατὰ τὴν ἔρευναν καὶ μελέτην ἑνὸς φαινομένου.

Β. *Τὰ συστηματικὰ σφάλματα* ἔχουν μεγαλυτέραν σπουδαιότητα τῶν προηγουμένων καὶ προέρχονται ἀπὸ αἴτια τὰ ὁποῖα ἐπιδροῦν, πολὺ ἢ ὀλίγον, κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν. Δηλαδὴ τὰ σφάλματα αὐτὰ ἀναφέρονται εἰς αἴτια τὰ ὁποῖα, ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας, ἐνεργοῦν κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον. Ταῦτα σχετίζονται μὲ τὰ ὄργανα μετρήσεως, τὴν προσωπικότητα τοῦ παρατηρητοῦ, τὴν ἐπίδρασιν τῶν μετεωρολογικῶν στοιχείων κ.λ.π. Εἰς τὰς περισσοτέρας περιπτώσεις δύνανται νὰ παρασταθοῦν διὰ μιᾶς καμπύλης, ἡ ὁποία συχνὰ καταντᾷ εὐθεῖα, ὁπότε δυνάμεθα νὰ ὁμιλῶμεν περὶ *γραμμικῆς πορείας* τῶν συστηματικῶν σφαλμάτων. Ἐὰν μάλιστα ἡ εὐθεῖα αὐτὴ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων ἢ τῶν τεταγμένων, τὸ ὀνομάζομεν καὶ *σταθερὸν σφάλμα*. Ἔχομεν τρία εἴδη συστηματικῶν σφαλμάτων:

α) Σφάλματα ὀργάνων. Ὀφείλονται εἰς ἀτελῆ τεχνικὴν κατασκευήν, ὅπως π.χ. ἐσφαλμένη διαίρεσις ἄντυγος, διαρροὴ μετρουμένης ποσότητος ὑγροῦ κ.λ.π.

β) Προσωπικὰ σφάλματα. Ὀφείλονται εἰς τὴν προσωπικότητα ἢ τὰς ἀτομικὰς συνηθείας τοῦ παρατηρητοῦ, ὅπως εἶναι τὸ σφάλμα παραλλάξεως κατὰ τὴν παρατήρησιν τῆς θέσεως τῆς βελόνης ἐπὶ κλίμακος ἢ τὴν διάβασιν ἀστέρος διὰ τῶν νημάτων τοῦ μικρομέτρου ἢ σφάλμα ἐκ τῆς ταχύτητος ἀντιδράσεως τοῦ παρατηρητοῦ κατὰ τὴν ἐξέλιξιν ἑνὸς φαινομένου κ.ο.κ. Ταῦτα συνήθως εἶναι ἀντικείμενον εἰδικῆς ἐρεύνης ὑπὸ τὸ ὄνομα: «προσωπικὴ ἐξίσωσις».

γ) Σφάλματα πειραματικῶν συνθηκῶν. Ταῦτα παρουσιάζονται εἰς τὰς περιπτώσεις, καθ' ἃς χρησιμοποιοῦνται ὄργανα διὰ συνθήκας (π.χ. πιέσεως, θερμοκρασίας, ὑγρασίας) διαφορετικὰς ἐκείνων διὰ τὰς ὁποίας ἔχουν κατασκευασθῆ.

Ἐκ τῶν συστηματικῶν σφαλμάτων πολλὰ εἶναι σταθερά, συχνὰ ὅμως εἶναι ταῦτα ἀνάλογα τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐκτελουμένων παρατηρήσεων ἢ μετρήσεων. Ἂν π.χ. κατὰ τὴν μέτρησιν ἑνὸς μήκους, ἡ μονὰς μετρήσεως εἶναι μικροτέρα ἢ μεγαλυτέρα τῆς ἀληθοῦς, τότε τὸ μετρούμενον ὁλικὸν μῆκος διαφέρει τοῦ ἀληθοῦς, ἀναλόγως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μετρήσεων. Εἰς τὴν ἐμφάνισιν αὐτῶν δύναται νὰ ἐπιδρᾷ καὶ ὁ τρόπος καθ' ὃν γίνεται ἡ μέτρησις. Ἄλλα πάλιν ἔχουν περιοδικὸν χαρακτῆρα, ὅπως συμβαίνει εἰς τὰς παρατηρήσεις εἰς τὰς ὁποίας ἐπιδροῦν αἱ μετεωρολογικαὶ συνθῆκαι, αἵτινες ἐπαναλαμβάνονται σχεδὸν αἱ αὐταὶ κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ ἐτησίου κύκλου.

Κατὰ ταῦτα, τὰ συστηματικὰ σφάλματα ὑπόκεινται εἰς ὡρισμένους νόμους οἱ ὁποῖοι συχνὰ εὑρίσκονται· ἢ ἐὰν αὐτὸ δὲν δύναται πάντοτε νὰ ἐπιτευχθῇ, δυνάμεθα κατὰ μεγάλην προσέγγισιν, νὰ τὰ θεωρήσωμεν ὡς ὑπαγόμενα εἰς κάποιον κανόνα. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ διορθώνωμεν τὰ ἐξαγόμενα τῶν μετρήσεων τῇ βοηθείᾳ τοῦ κανόνος, τὸν ὁποῖον βοηθητικῶς ἐχρησιμοποιήσαμεν. Π.χ. Διὰ τὴν ἐκ τῆς *ἀτμοσφαιρικῆς διαθλάσεως* προκύπτουσαν διόρθωσιν, διάφοροι ὑποθέσεις ἔχουν καταλήξει εἰς τὴν εὕρεσιν διαφόρων τύπων διορθώσεως τῶν σχετικῶν παρατηρήσεων. Κατὰ παρόμοιον ἢ ἀνάλογον τρόπον εὑρέθησαν διορθώσεις *βαρομέτρων, θερμομέτρων, ὡρολογίων, θεοδολίχων, τηλεσκοπίων, ἀεροσταθμῶν κ.ο.κ.*

Εἶναι εὐνόητον ὅτι ἡ εὕρεσις τοιούτων νόμων καὶ ἡ διατύπωσις αὐτῶν γίνεται μαθηματικῶς ἢ καὶ ἀριθμητικῶς. Ἡ πρακτικὴ Ἀστρονομία, ἡ ἐφηρμοσμένη Φυσική, ἡ Γεωδαισία, ἡ Μετεωρολογία κ.λ.π. ἀσχολοῦνται, ἔν τινι μέτρῳ, μὲ τὴν εὕρεσιν τῶν νόμων, οἵτινες διέπουν τὰ ἐμφανιζόμενα συστηματικὰ σφάλματα. Ἰδοὺ μερικὰ τοιαῦτα παραδείγματα: Ἡ ἐπίδρασις τῆς διαθλάσεως ἐπὶ τῶν συντεταγμένων τῶν ἀστέρων, τοῦ Ἡλίου ἢ τῆς Σελήνης ἢ καὶ εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς θέσεως ἑνὸς γεωδαιτικοῦ σημείου. Ἡ τοιαύτη ἐπίδρασις διαφέρει εἰς τὰ διάφορα ὕψη τοῦ οὐρανίου ἀντικειμένου ἢ τοῦ γηΐνου σημείου—εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ γεωδαιτικοῦ σημείου παίζει ρόλον καὶ ἡ ἀπόστασις εἰς τὴν ὁποίαν τοῦτο εὑρίσκεται— ὁ συνδυασμὸς ὅμως μεγάλου ἀριθμοῦ παρατηρήσεων, ὑπὸ διαφόρους ἀτμοσφαιρικὰς συνθήκας, δίδει τὸν σχετικὸν νόμον. Ἐπίσης ὅταν ζητοῦνται νὰ εὑρεθοῦν τὰ συστηματικὰ σφάλματα διαφόρων μηχανικῶν συσκευῶν, καὶ τότε διὰ συνεχῶν δοκιμαστικῶν μετρήσεων ἐξάγονται ἐμπειρικῶς οἱ νόμοι ἢ οἱ κανόνες εἰς τοὺς ὁποίους ταῦτα ὑπακούουν. Τὰ διάφορα ἐργοστάσια κατασκευῆς ἐπιστημονικῶν ὀργάνων ἀκριβείας δίδουν συνήθως τὰς σταθερὰς αὐτῶν, ἀλλὰ συχνὰ ὁ ἐρευνητὴς εἶναι ἠναγκασμένος νὰ μελετᾷ ἐκ νέου τὸ ὄργανον. Διότι συμβαίνει πολλάκις κατὰ τὴν μεταφορὰν εἰς τὸν τόπον τῆς ἐκτελέσεως τῶν παρατηρήσεων ἢ κατὰ τὴν μόνιμον ἐγκατάστασίν του, τὸ ὄργανον νὰ ὑφίσταται μεταβολὰς καὶ ἀλλοιώσεις.

Πάντως τὰ συστηματικὰ σφάλματα προέρχονται ἀπὸ αἴτια, κατὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον γνωστά, καὶ δυνάμεθα συνήθως νὰ διαπιστώσωμεν τὴν ὕπαρξίν των, ὁπότε εὑρίσκομεν, μὲ ἀρκετὴν προσέγγισιν, τὰς ἀληθεῖς τιμὰς μιᾶς σειρᾶς παρατηρήσεων ἢ μετρήσεων.

Γ. Τὰ τυχαῖα ἢ ἀκανόνιστα σφάλματα * μιᾶς σειρᾶς παρατηρήσεων εἶναι κατ' ἀρχὴν ποσότητες πολὺ μικραί. Ἐπειδὴ δὲ ταῦτα ὀφείλονται εἰς αἴτια τὰ ὁποῖα ἐπιδροῦν συνεχῶς μέν, ἐντελῶς ὅμως ἀκανονίστως—ἄλλοτε δηλαδὴ κατὰ τὴν μίαν φορὰν καὶ ἄλλοτε κατὰ τὴν ἄλλην— εἶναι ποσότητες ***θετικαὶ καὶ ἀρνητικαί***. Μὲ ἄλλους λόγους τὰ τυχαῖα σφάλματα εἶναι ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα παραμένουν εἰς μίαν σειρὰν μετρήσεων, ὅταν ἡ σειρὰ αὕτη ἀπαλλαγῇ ἐκ τῶν χονδροειδῶν καὶ τῶν συστηματικῶν σφαλμάτων. Ἓν τυχαῖον σφάλμα εἶναι ἀδιαφόρως θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, ἐνῷ ἓν συστηματικόν, ἔχει, ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας, τὸ αὐτὸ πάντοτε σημεῖον καὶ τὸ αὐτὸ μέγεθος.

Ὅταν μετρῶμεν π.χ. ἕνα μῆκος μὲ ***«ἀκριβὲς μέτρον»***, τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως, θὰ διαφέρῃ κατά τι τοῦ ἀκριβοῦς μήκους, ὅπως φαίνεται ἐκ τοῦ ὅτι, ἐὰν ἐπαναλάβωμεν, ὑπὸ τὰς αὐτὰς κατὰ μεγάλην προσέγγισιν συνθήκας, πολλάκις τὴν μέτρησιν ταύτην θὰ ἴδωμεν ὅτι τὰ ἐξαγόμενα διαφέρουν ἀλλήλων. Μερικὰ ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι μικρότερα τῆς θεωρουμένης ὡς «ἀληθοῦς τιμῆς» καὶ ἄλλα θὰ εἶναι μεγαλύτερα ταύτης. Οὐδείς, φυσικά, λόγος ὑπάρχει ὁ ἀριθμὸς τῶν μὲν νὰ εἶναι οὐσιωδῶς διάφορος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δέ. Ἑπομένως αὐτὰ εἶναι ἐξ ἴσου μεγαλύτερα ἢ μικρότερα τῆς ἀληθοῦς τιμῆς. Εἶναι δηλαδὴ τὰ σφάλματα ταῦτα ***τυχαῖα***. Ἡ διαφορὰ τούτων ἀπὸ τὰ συστηματικὰ σφάλματα φαίνεται εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα. Ἔστω ὅτι τὸ μετρούμενον μῆκος εὑρίσκεται κατά τι μικρότερον ἢ μεγαλύτερον τοῦ κανονικοῦ. Ὅταν ἡ θερμοκρασία ἐλαττοῦται ἢ αὐξάνῃ τότε προφανῶς, τὸ ἐμφανιζόμενον σφάλμα εἶναι συνάρτησις τῆς θερμοκρασίας, εἶναι δηλαδὴ συστηματικὸν καὶ πρέπει νὰ εὑρεθῇ.

Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι ἡ κατάστασις τῆς ἀτμοσφαίρας δὲν εἶναι πάντοτε ἤρεμος ἢ ἡ αὐτή. Τοῦτο ἐπιδρᾷ εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς θέσεως ἑνὸς οὐρανίου σώματος ἢ γηΐνου τινὸς ἀντικειμένου. Ἀπὸ τὰς ἐκτελεσθησομένας, πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον μετρήσεις, ἀφοῦ ἀπαλειφθοῦν αἱ δύο ἄλλαι κατηγορίαι σφαλμάτων, παραμένουν τὰ *τυχαῖα*, τὰ ὁποῖα πρέπει κατὰ κάποιον τρόπον νὰ παρακαμφθοῦν· ἢ ἡ ἐπίδρασίς των νὰ γίνῃ, ὅσον τὸ δυνατὸν μικροτέρα, κατὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τελικῆς τιμῆς τῆς μετρήσεως. Καὶ τοῦτο δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ διὰ τῆς ἐπιμελοῦς ἐκτελέσεως μεγάλου ἀριθμοῦ παρατηρήσεων.

Τὰ τυχαῖα σφάλματα κατατάσσονται εἰς τὰς ἑξῆς κατηγορίας.

---

* Εἰς τὴν Ἀγγλικὴν γλῶσσαν γίνεται διαστολὴ μεταξὺ τυχαίων ἢ ἀκανονίστων σφαλμάτων (erratic, accidental ἢ experimental errors) καὶ συστηματικῶν, διὰ τῶν λέξεων: precision καὶ accuracy. Ἡ λέξις precision ἀναφέρεται εἰς τὰ τυχαῖα σφάλματα, ἡ δὲ accuracy εἰς τὰ συστηματικά.

1ον) Σφάλματα κρίσεως. Εἰς πολλὰ ὄργανα ἡ ἐκτίμησις κλάσματος τῆς ὑποδιαιρέσεως τῆς κλίμακος κυμαίνεται ἀπὸ περιπτώσεως εἰς περίπτωσιν ἢ ἀπὸ χρόνου εἰς χρόνον, ἕνεκα διαφόρων τυχαίων λόγων. Ἐπίσης κατὰ τὴν ἐκτίμησιν π.χ. ἑνὸς ἀστρικοῦ μεγέθους, ὁ αὐτὸς παρατηρητὴς εὑρίσκει διαφορετικὰ ἐξαγόμενα ὀφειλόμενα εἰς τὴν κρίσιν του.

2ον) Σφάλματα λόγῳ κυμαινομένων συνθηκῶν. Συχνὰ αἱ συνθῆκαι τοῦ περιβάλλοντος (θερμοκρασία, πίεσις, ἀτμοσφαιρικὴ διαταραχή, ποικίλαι ἀκτινοβολίαι) ὑπόκεινται εἰς τυχαίας, μικροῦ εὔρους διακυμάνσεις. Ἐντεῦθεν προκύπτουν σφάλματα κατὰ τὰς μετρήσεις.

3ον) Σφάλματα διαταραχῶν. Ταῦτα προέρχονται ἐκ διαφόρων αἰτίων, ὅπως π.χ. ἐκ τῶν μηχανικῶν δονήσεων ἢ ἐκ τῶν παρασίτων εἰς ἠλεκτρικὰς συσκευάς, λόγῳ παρουσίας εἰς τὴν περιοχὴν ἠλεκτρικῶν μηχανῶν ἢ λόγῳ μιᾶς ραδιενεργοῦ πηγῆς κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν εἰδικῶν μετρήσεων.

4ον) Σφάλματα ὁρισμοῦ. Ταῦτα θὰ ἔπρεπε ἴσως νὰ λέγωνται καλλίτερον σφάλματα παρανοήσεων. Προέρχονται ἐκ τοῦ ὅτι δὲν ἔχει καθορισθῆ ἐπακριβῶς τί θὰ ἔπρεπε νὰ μετρηθῇ καὶ ποία μέθοδος θὰ ἔπρεπε νὰ χρησιμοποιηθῇ. (Διὰ τῆς λέξεως μέθοδος ἐννοοῦμεν τὸν τρόπον καὶ τὰ χρησιμοποιούμενα ὄργανα). Ὅταν π.χ. μετροῦμεν τὰς διαστάσεις μιᾶς ὀρθογωνίου τραπέζης, πιθανὸν αἱ δύο πλευραὶ νὰ μὴ εἶναι ἀκριβῶς παράλληλοι ἢ αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν νὰ μὴν εἶναι λεῖαι. Κατὰ συνέπειαν ἔχομεν σφάλμα ἐκ παρανοήσεως. Τὰ τοιαῦτα σφάλματα εἶναι συνήθη εἰς τὴν Πυρηνικὴν Φυσικήν. Κατὰ τὸν προσδιορισμὸν λ.χ. τῆς ἀκτῖνος τοῦ πυρῆνος, λαμβάνομεν διαφόρους τιμὰς αὐτῆς, ἐκτελοῦντες μετρήσεις διὰ τῆς μεθόδου τῆς σκεδάσεως, διὰ παπαγωγῆς ἀκτινοβολίας X προερχομένης ἐκ μετατοπίσεως δι' ἁλμάτων (transitions) μεσονικῶν ἀτόμων κ.λ.π. Ποία ἡ ἀκριβὴς τιμὴ τῆς ἀκτῖνος; Ἕνας τρόπος καθορισμοῦ αὐτῆς προκύπτει ἀπὸ τὴν πλησιεστέραν ἀπόστασιν προσεγγίσεως τῶν σωματίων κατὰ τὰ πειράματα σκεδάσεως. Ποίων ὅμως σωματίων καὶ ποίας ἐνεργείας σωματίων; Ἡ ἀκτὶς ὁρίζεται κατὰ διαφόρους τρόπους, ἀναλόγως τῆς χρησιμοποιουμένης ἰδιότητος τοῦ πυρῆνος καὶ τῆς μεθόδου καθορισμοῦ αὐτῆς. Ἀξιοσημείωτον εἶναι ὅτι, ὅλαι αἱ προκύπτουσαι τιμαὶ συμφωνοῦν ἀρκετὰ μεταξύ των. Ἐνταῦθα δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι κατὰ τὰς μετρήσεις αὐτὰς ὑπεισέρχεται καὶ τὸ «σφάλμα κρίσεως». Διότι ὁ παρατηρητής, ἂν καὶ ὁδηγῆται ἀπὸ κανόνας, οὗτοι βασίζονται εἰς αὐθαιρέτους ἐν πολλοῖς ὑποθέσεις, εἶναι δηλ. θέμα προσωπικῆς γνώμης.

Βαθυτέρα μελέτη τῶν τυχαίων σφαλμάτων.

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἐκτελῶμεν μίαν σειρὰν n μετρήσεων καὶ ὅτι κατ' αὐτὴν ἔχομεν σφάλμα ε'_i ($i=1, 2, \ldots n$). Θὰ δυνηθῶμεν νὰ χωρίσωμεν τὸ σφάλμα τοῦτο εἰς *τυχαῖον* ε_i καὶ εἰς *σταθερὸν* c, ἤτοι:

$$\varepsilon'_i = \varepsilon_i + c$$

μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἐξισώσεων:

$$c = \frac{1}{n}(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \ldots + \varepsilon'_n), \text{ καὶ } \varepsilon_i = \varepsilon'_i - c$$

Ἐκ πρώτης ὄψεως, ἴσως φαίνεται εὔκολος ἡ τοιαύτη ἐργασία πρὸς ἀποχωρισμὸν καὶ ὑπολογισμὸν τοῦ συστηματικοῦ σφάλματος. Ἀλλ' ἡ ὁδὸς αὕτη εἶναι κάπως μακρὰ καὶ δύσκολος. Διότι θὰ πρέπει νὰ ὑπολογισθῇ τοῦτο διὰ διαφόρων συνδυασμῶν τῶν παρατηρήσεων καὶ νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν κατὰ τὴν τελικὴν διατύπωσιν τῶν σχέσεων. Οὐχ' ἧττον ὅμως, ὅταν κυρίως ἐρευνῶμεν ἀστρονομικὰ ζητήματα, εἴμεθα ἠναγκασμένοι νὰ τὴν ἀκολουθήσωμεν. Ἁπλούστερον εἶναι ὅμως νὰ κάμωμεν ἄλλας διατάξεις καὶ συνδυασμοὺς τῶν ἐξαγομένων τῶν παρατηρήσεων καὶ οὕτω νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπίδρασιν τοῦ συστηματικοῦ σφάλματος, διότι τοῦτο ὑπάγεται εἰς κάποιον νόμον.

Τὰ τυχαῖα ὅμως σφάλματα, δὲν ἀκολουθοῦν αὐστηρῶς μαθηματικοὺς νόμους καὶ δὲν δύνανται, οὔτε νὰ ἀπομονωθοῦν, οὔτε καὶ νὰ ἀπαλειφθοῦν. Ἀλλὰ καὶ αὐτὰ ὑπακούουν εἰς ἕναν ἄλλον μαθηματικὸν νόμον, τὸν *νόμον τῆς πιθανότητος,* συμφώνως πρὸς τὸν ὁποῖον, ἡ ἐπίδρασίς των, δύναται νὰ μειωθῇ ἀπεριορίστως, ὅταν αὐξήσῃ ἀρκούντως ὁ ἀριθμὸς τῶν παρατηρήσεων ἢ μετρήσεων καὶ ἀκολουθηθῇ ὡρισμένη πορεία ἐργασίας.

Ἐφ' ὅσον λοιπὸν εἶναι ἀδύνατος ἡ ἐκτέλεσις *ἀπολύτως ἀκριβῶν παρατηρήσεων ἢ μετρήσεων* ἀνάγκη ὅπως εὑρεθῇ μέθοδος προσδιορισμοῦ τῶν ἀναποφεύκτων τυχαίων σφαλμάτων καὶ τῶν αἰτίων τὰ ὁποῖα τὰ προκαλοῦν, εἰς τρόπον ὥστε, κατὰ τὸ δυνατόν, εἰς κάθε ἐπιστημονικὴν κυρίως ἐργασίαν καὶ ἔρευναν, νὰ ἀποφεύγωμεν αὐτὰ καὶ νὰ εὑρίσκωμεν τὴν *πιθανωτέραν* ἢ τὴν *περισσότερον καλὴν τιμὴν* τοῦ παρατηρουμένου μεγέθους. Τοῦτο ἀκριβῶς ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς συγκεντρώσεως μεγαλυτέρου ἀριθμοῦ παρατηρήσεων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἐν ἑαυτοῖς, τυχαῖα μόνον σφάλματα, καὶ τῆς *ἰσοσταθμίσεως* ἢ *ἀφομοιώσεως* (Compensation Γαλ. καὶ Ἀγγλ., Ausgleichung Γερμ.) αὐτῶν. Καὶ τὴν ἀφομοίωσιν ἢ ἰσοστάθμισιν τῶν τοιούτων παρατηρήσεων, τὴν ἐπιτυγχάνομεν διὰ τῆς μαθηματικῆς ὁδοῦ καὶ δὴ διὰ τῆς ***«μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων»*** (Méthode des moindres carrés Γαλ., Method of Least Squares Ἀγγλ., Methode der kleinsten Quadrate Γερμ.) (1).

(1) Ἡ μέθοδος αὕτη θὰ ἔπρεπε καλύτερον νὰ ὀνομάζεται «μέθοδος τοῦ

Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι ἡ μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων στηρίζεται ἐπὶ τῆς προϋποθέσεως ὅτι: τὰ τυχαῖα σφάλματα ἐξουδετερώνονται, ὅταν ἔχωμεν ἕναν, ἀπεριορίστως μεγάλον ἀριθμὸν ἀνεξαρτήτων ἀπ᾽ ἀλλήλων μετρήσεων τῆς ἰδίας ποσότητος, αἱ ὁποῖαι ἔγιναν ὑπὸ τὰς αὐτὰς ἀκριβῶς συνθήκας. Δεχόμεθα δηλαδὴ ὅτι, ἐὰν εἰς τὰ ἐξαγόμενα τῶν μετρήσεων τούτων *γίνῃ ἀπαλοιφὴ τῶν χονδροειδῶν καὶ τῶν συστηματικῶν σφαλμάτων*, τότε, τὸ *ἀριθμητικὸν μέσον εἶναι ἡ πιθανωτέρα τιμὴ τῆς μετρηθείσης ποσότητος*. Ἄς ἴδωμεν ὅμως, ἐὰν εἰς τὴν πρᾶξιν, ἐφαρμόζωνται αἱ προϋποθέσεις αὗται.

Βαθυτέρα κάπως μελέτη τοῦ ζητήματος, δεικνύει ὅτι δὲν πληροῦνται ἐπακριβῶς αἱ ἀνωτέρω προϋποθέσεις. Διότι· οὔτε ὁ ἀριθμὸς τῶν παρατηρήσεων ἢ μετρήσεων εἶναι *ἀπεριορίστως* μέγας· οὔτε καὶ δύο ἀκόμη διαδοχικαὶ μετρήσεις γίνονται *ἀκριβῶς* ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας· οὔτε τὸ συστηματικὸν σφάλμα δύναται νὰ ἀπαλειφθῇ *τελείως*· οὔτε, τέλος, ἀποκλείεται τὸ ἐνδεχόμενον νὰ παραμείνουν καὶ *μερικὰ* ἐκ τῶν χονδροειδῶν σφαλμάτων, τὰ ὁποῖα θὰ συγχέωνται μὲ τὰ τυχαῖα καὶ δὲν θὰ διακρίνωνται αὐτῶν. Ἑπομένως, ἡ ὑπὸ τοιαύτας συνθήκας εὑρισκομένη *πιθανωτέρα τιμὴ* ἑνὸς οἱουδήποτε μεγέθους εἶναι κυρίως *θεωρητική*, ἡ ὁποία πλησιάζει, συνεχῶς καὶ περισσότερον τὴν *ἀκριβῆ τιμήν*, ἐφ᾽ ὅσον αἱ μνημονευθεῖσαι προϋποθέσεις ἐφαρμόζονται ἀκριβέστερον. Πάντοτε ὅμως πρέπει νὰ θεωροῦμεν ὡς δεδομένον, ὅτι ἡ πιθανὴ τιμὴ κάθε φυσικῆς μετρήσεως, περιέχει ἕνα σφάλμα.

ἐλαχίστου ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων» (Methode der kleinsten Quadratsumme), διότι ὅπως θὰ ἴδωμεν εἰς τὴν συνέχειαν, πρόκειται περὶ τοιούτου ἀκριβῶς ἀθροίσματος. Τὴν μέθοδον ταύτην ἐπενόησε, τὸ πρῶτον ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς K. F. Gauss (1777—1855), τὸ 1794, εἰς ἡλικίαν 17 ἐτῶν καὶ τὴν ἐχρησιμοποίησε, μετά τινα ἔτη, εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς τροχιᾶς τοῦ μικροῦ πλανήτου Δήμητρα. Πρέπει ὅμως νὰ λεχθῇ ὅτι τὴν προτεραιότητα εἰς τὴν δημοσίευσιν τῆς μεθόδου, τὴν ἔχει ὁ Γάλλος μαθηματικὸς A. M. Legendre (1752—1833), διότι οὗτος ἐδημοσίευσε μίαν μικρὰν πραγματείαν, τὸ 1806, περὶ τοῦ «ἐλαχίστου ἀθροίσματος τετραγώνων». Ὁ Gauss ἀνεκοίνωσε δημοσίᾳ, τὴν μέθοδόν του τὸ 1809 (Theoria motus corporum coelestium), κατὰ δὲ τὸ 1826, εἰς ἓξ ἐκτενεῖς πραγματείας του, ἐκθέτει ὅλα τὰ ἀφορῶντα εἰς τὴν μέθοδον ταύτην, εἰς τρόπον ὥστε νὰ θεωρῆται οὗτος ὁ **πατὴρ καὶ θεμελιωτὴς τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων**. Βραδύτερον μὲ τὴν θεωρίαν τῶν σφαλμάτων ἠσχολήθησαν καὶ πολλοὶ ἄλλοι ἐρευνηταί. Ἰδιαιτέρως δέον νὰ σημειωθοῦν αἱ θεωρητικαὶ ἔρευναι ἐπὶ τοῦ θέματος τούτου τοῦ P. Laplace (Théorie analytique des Probabilités),

Ἰδιότητες τῶν τυχαίων σφαλμάτων. Νόμος τοῦ Gauss.

Τὰ τυχαῖα καὶ ἀναπόφευκτα σφάλματα μιᾶς σειρᾶς παρατηρήσεων δὲν ὑπάγονται, ὡς ἐλέχθη, εἰς οὐδένα νόμον. Οὐχ' ἧττον ὅμως παρουσιάζουν μίαν σειρὰν χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων, τὰς ὁποίας διεπίστωσεν ὁ Gauss καὶ κατέληξεν εἰς τὴν ἔκφρασιν μιᾶς ***«κανονικῆς συναρτήσεως κατανομῆς»*** ἢ ***«συναρτήσεως συχνότητος»*** τῶν τυχαίων σφαλμάτων. Μεταξὺ τῶν χαρακτηριστικῶν αὐτῶν ἰδιοτήτων, δέον νὰ μνημονευθοῦν αἱ ἀκόλουθοι:

1) Τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν τῶν σφαλμάτων συγκλίνει πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν παρατηρήσεων αὐξάνῃ·

2) Ἡ πιθανότης τῆς ἐμφανίσεως ἑνὸς τυχαίου σφάλματος $+\varepsilon$ ἰσοῦται μὲ τὴν πιθανότητα τοῦ νὰ παρουσιασθῇ τὸ σφάλμα $-\varepsilon$. Ἤτοι ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$\varphi(+\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon) \qquad (1)$$

Ἡ ἰδιότης αὕτη λέγει ὅτι ἡ «συνάρτησις κατανομῆς» πρέπει νὰ εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς ἕνα ἄξονα.

3) Τὰ μικρότερα σχετικῶς σφάλματα παρουσιάζουν μεγαλυτέραν συχνότητα ἀπὸ τὰ μεγάλα, μεταξὺ δὲ ὡρισμένων ὁρίων, εὑρίσκεται μία ὡρισμένη ἀναλογία σφαλμάτων. Ἔχομεν δέ:

$$0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<\varepsilon_3 \quad , \quad \varphi(\varepsilon_1)>\varphi(\varepsilon_2)>\varphi(\varepsilon_3).$$

Ἡ ἰδιότης αὕτη δίδει μίαν σχέσιν τοῦ σφάλματος πρὸς τὴν πιθανότητα τῆς ἐμφανίσεώς του.

4) Ἡ πιθανότης τῆς ἐμφανίσεως ἑνὸς σφάλματος μεταξὺ τῶν ὁρίων $-\infty$ καὶ $+\infty$, γίνεται βεβαιότης, ἤτοι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = 1. \qquad (1')$$

Ὁ ***«νόμος κατανομῆς τῶν σφαλμάτων»*** τοῦ Gauss, ὅστις δίδει τὴν συχνότητα ἐμφανίσεως ἑνὸς ὡρισμένου σφάλματος ε, ὅταν κάμνωμεν μίαν μακρὰν σειρὰν μετρήσεων ἢ παρατηρήσεων, ἐκφράζεται διὰ τοῦ ἑξῆς τύπου:

$$\varphi(\varepsilon) = \alpha . e^{-\beta\varepsilon^2} \qquad (2)$$

ὅπου α καὶ β εἶναι ποσότητες σταθεραί, αἱ ὁποῖαι ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὸ γενικὸν μέτρον ἀκριβείας τῆς σειρᾶς μετρήσεων καὶ εἶναι τοιαῦται, ὥστε νὰ πληροῦται ἡ (1′). Ἡ ἀνωτέρω σχέσις γράφεται καί :

$$\varphi(\varepsilon)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}.e^{-h^2\varepsilon^2} \qquad (2')$$

ὅπου h χαρακτηρίζει τὴν *ποιότητα τῆς σειρᾶς τῶν παρατηρήσεων*, εἶναι ἑπομένως, *τὸ μέτρον ἀκριβείας* αὐτῶν (¹). Εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ $h=1$, τότε ἡ ὡς ἄνω σχέσις παρίσταται γραφικῶς διὰ τοῦ σχήματος 1. Καθὼς φαίνεται ἐκ τῆς παραστάσεως ταύτης—εἰς ἣν αἱ τιμαὶ ε εἶναι αἱ τετμημέναι καὶ αἱ φ (ε) αἱ τεταγμέναι—ἡ καμπύλη εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν φ (ε). Ἐκ τοῦ (2′) ἕπονται εὐκόλως αἱ ὑπ' ἀριθ. 1, 2 καὶ 3 ἰδιότητες· ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ παρατηρηθῇ ὅτι τὸ ε εἶναι εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν.

Πρὸς σύντομον ἀπόδειξιν τῆς ἰδιότητος (1′), παρατηροῦμεν ὅτι, ἐκ τῆς (2′) ἔχομεν :

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx\right]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}dx.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2y^2}dy=$$

$$=\frac{h^2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-h^2(x^2+y^2)}dxdy=\frac{h^2}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty}\varrho\, e^{-h^2\varrho^2}d\varrho d\vartheta=$$

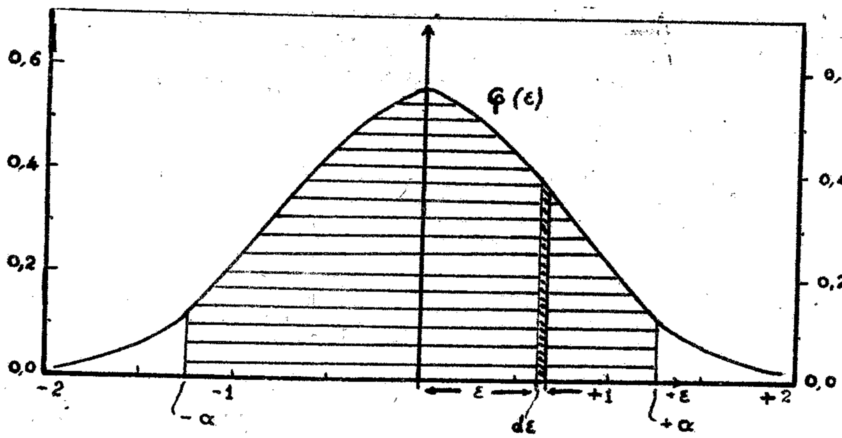
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}d\vartheta=1.$$

ὅπου ἔγινε χρῆσις πολικῶν συντεταγμένων (ϱ, ϑ).

Ὁ νόμος κατανομῆς τῶν σφαλμάτων τοῦ Gauss, ἔχει δημιουργήσει ἀπὸ μακροῦ μεταξὺ πολλῶν ἐρευνητῶν μεγάλην συζήτησιν, αὐτὸς δὲ οὗτος ὁ εἰσηγητής του, ἐγνώριζε πλήρως τὰς θεωρητικὰς ἀτελείας, τὰς ὁποίας παρουσιάζει ἡ ἀπόδειξις αὐτοῦ. Δὲν θὰ εἰσέλθωμεν, φυσικά, ἐνταῦθα εἰς τὴν ἀνάπτυξιν ὅλων ὅσων ἔχουν λεχθῇ περὶ τοῦ νόμου αὐτοῦ—ὑπάρχουν δὲ καὶ ἄλλοι νόμοι, οἱ ὁποῖοι δίδουν τὴν

(1) Ἡ ποσότης h προσδιορίζεται ἐκ τῶν παρατηρήσεων, εἰς τρόπον ὥστε ἡ συχνότης τῶν σφαλμάτων νὰ δύναται πράγματι νὰ ὑπολογισθῇ ἀριθμητικῶς. Εἰς τὴν στατιστικὴν ὁρολογίαν ἡ ποσότης $\frac{1}{\sqrt{2}\,h}$ παρίσταται συνήθως διὰ τοῦ σ καὶ καλεῖται *τυπικὴ ἐκτροπὴ ἢ σφάλμα* (Standard deviation).

διασπορὰν τῶν σφαλμάτων μιᾶς σειρᾶς παρατηρήσεων, ἀλλὰ θὰ ἔπρεπε νὰ τονισθῇ κάτι, τὸ ὁποῖον δέον νὰ τὸ ἔχουν πάντοτε ὑπ' ὄψει, ὅλοι ὅσοι ἀσχολοῦνται μὲ τοιαῦτα ζητήματα, μάλιστα δὲ ἀπὸ τῆς πρακτικῆς πλευρᾶς. Πρέπει, δηλαδή, ὁ ἐρευνητὴς νὰ ἔχῃ πρὸ ὀφθαλμῶν ὅτι, ὅταν μία σειρὰ παρατηρήσεων ἢ μετρήσεων δὲν πληροῖ ὡρισμένας θεμελιώδεις προϋποθέσεις, δὲν δύναται νὰ χρησιμοποιῇ τὸν νόμον τοῦτον, διότι τὰ ἐξαγόμενά του θὰ στεροῦνται οἱασδήποτε σημασίας. Ἔχει βεβαίως εὑρεθῇ, ὅτι εἰς πλείστας ὅσας περιπτώσεις αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τὴν Φυσικήν, τὴν Γεωδαισίαν καὶ τὴν Ἀστρονομίαν, τὰ τυχαῖα σφάλματα ἅτινα παρουσιάζονται εἰς μίαν

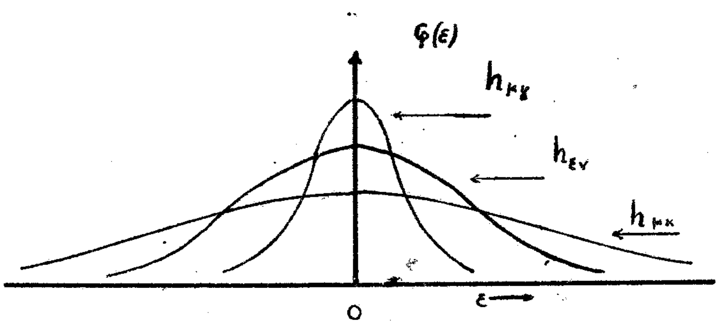


Σχ. 1
Ὁ νόμος κατανομῆς σφαλμάτων τοῦ Gauss.

σειρὰν μετρήσεων, ἱκανοποιοῦν τὸν νόμον κατανομῆς τοῦ Gauss καὶ κατὰ συνέπειαν δικαιολογεῖται ἡ χρησιμοποίησις τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων πρὸς ἰσοστάθμησιν τῶν ἐν λόγῳ μετρήσεων. Δὲν δυνάμεθα ὅμως νὰ εἴπωμεν ὅτι συμβαίνει τοῦτο καὶ εἰς πολλὰ θέματα τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται π.χ. εἰς τὴν Βιολογίαν καὶ τὴν Ψυχολογίαν, ὅπου τὰ ἐξαγόμενα τῶν παρατηρήσεων δὲν κεῖνται συμμετρικῶς ὡς πρὸς ἕναν ἄξονα. Εἰς τὰ ζητήματα αὐτὰ ἀπαιτεῖται μεγάλη προσοχή, ἰδίως κατὰ τὴν ἐπεξεργασίαν τοῦ ὑλικοῦ τῶν παρατηρήσεων, νὰ γνωρίζωμεν δὲ πάντοτε τὸν βαθμὸν ἀκριβείας τῶν ἐξαγομένων (1).

(1) Πρέπει νὰ τονισθῇ ἐνταῦθα ὅτι ἡ μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων δὲν λέγει τίποτε περὶ τῆς ποιότητος τῶν παρατηρήσεων, οὔτε εἶναι δυνα-

Πάντως πρέπει νὰ τονισθῇ ὅτι ὁ νόμος κατανομῆς τῶν σφαλμάτων ἢ καμπύλη κατανομῆς τῶν σφαλμάτων τοῦ Gauss, πρέπει νὰ χρησιμοποιῆται ὡς πρώτη προσέγγισις καὶ ἐφ' ὅσον δὲν ὑπάρχουν σαφεῖς ἐνδείξεις περὶ τοῦ ὅτι οὗτος δὲν ἰσχύει. Δηλαδὴ ὁ νόμος οὗτος χρησιμεύει καὶ ὡς κριτήριον τοῦ ἐὰν καὶ κατὰ πόσον μία σειρὰ μετρήσεων παρουσιάζει συνοχὴν καὶ ὁμοιογένειαν καὶ περιέχει μόνον τυχαῖα σφάλματα. Διὰ νὰ φανῇ δὲ ἡ σημασία αὐτοῦ εἰς τὴν ἔρευναν τῶν τυχαίων σφαλμάτων, δίδομεν (σχ. 2) τρεῖς καμπύλας κατανομῆς τοιούτων σφαλμάτων τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς τρεῖς διαφορετικὰς σειρὰς παρατηρήσεων. Εἰς τὴν καμπύλην $h_{\mu\gamma}$ τὰ μεγάλα—θετικὰ καὶ ἀρνητικὰ—σφάλματα τῆς μιᾶς σειρᾶς μετρήσεων εἶναι ὀλίγα, ἐνῷ τὰ μικρὰ—θετικὰ



Σχ. 2

καὶ ἀρνητικὰ—σφάλματα εἶναι πολὺ συχνά. Τὸ ἀντίθετον ἀκριβῶς συμβαίνει εἰς τὴν καμπύλην $h_{\mu\kappa}$. Καθὼς βλέπομεν ἡ καμπύλη $h_{\mu\gamma}$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν καλὴν σειρὰν παρατηρήσεων, ἐνῷ ἡ $h_{\mu\kappa}$ εἰς μίαν σειράν, οὐχὶ καλῆς (σχετικῶς μὲ τὴν πρώτην) ποιότητος παρατηρήσεων. Διότι τὰ μεγάλα σφάλματα εἶναι συχνότερα παρ' ὅ,τι εἰς τὴν πρώτην, τὰ δὲ μικρά, ὄχι τόσον πολλά.

τὸν αὔτη νὰ ἀπομακρύνῃ ἀπὸ αὐτὰς τὸ τυχὸν ὑπάρχον συστηματικὸν σφάλμα. Ὁ πεπειραμένος ἐρευνητὴς εἶναι πάντοτε εἰς θέσιν νὰ διακρίνῃ πότε εἶναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμοσθῇ αὔτη, ἐνίοτε δέ, μὲ τὴν βοήθειαν ταύτης νὰ πιστοποιήσῃ τὴν ὕπαρξιν ἑνὸς συστηματικοῦ σφάλματος. Ἀνάγκη, ἑπομένως, ὅπως ὁ ἐπιχειρῶν τὴν χρησιμοποίησιν τῆς μεθόδου νὰ συγκεντρώνῃ πολλὰ ἐφόδια καὶ νὰ ἔχῃ πρὸ ὀφθαλμῶν ὡρισμένας προϋποθέσεις, οὕτως ὥστε τὰ συμπεράσματα αὐτοῦ, ὄχι μόνον νὰ μὴ στεροῦνται σημασίας ἀλλὰ νὰ εἶναι καὶ πλήρη βαθυτέρου, κατὰ τὸ δυνατόν, νοήματος.

Ἡ ἐνδιάμεσος καμπύλη $h_{εν}$ ἀντιστοιχεῖ εἰς μέσης ποιότητος παρατηρήσεις.

Ὥστε μεγάλη τιμὴ τοῦ μέτρου ἀκριβείας $h = h_{μγ}$ σημαίνει ὅτι μέγας ἀριθμὸς μετρήσεων διαφέρει τῆς ἀληθοῦς τιμῆς τῆς παρατηρηθείσης ποσότητος πολὺ ὀλίγον.

Ἡ σχετικὴ συχνότης ἢ πιθανότης, ἵνα τὸ σφάλμα μιᾶς μετρήσεως κεῖται μεταξὺ τῶν $-x$ καὶ $+x$, εἶναι:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{+x} e^{-h^2x^2}dx = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x} e^{-h^2x^2}dx.$$

Τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο καλεῖται *συνάρτησις σφάλματος* (error function) καὶ δίδεται συνήθως εἰς πίνακας ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$\mathrm{erf}(t) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{t} e^{-t^2}dt.$$

Ὁ ὑπολογισμὸς αὐτοῦ γίνεται δι᾿ ἀναπτύξεως τῆς e^{-t^2} εἰς σειρὰν καὶ ὁλοκληρώσεως ὅρου πρὸς ὅρον.

Παράδειγμα Αον

Ὑποθέσωμεν ὅτι μία σειρὰ λήψεως 25 ἀναγνωσμάτων τῆς βαρομετρικῆς πιέσεως τῆς 14ης ὥρας, τῆς 8ης Ἰανουαρίου 1953 ἐν τῷ Ἀστεροσκοπείῳ Ἀθηνῶν, ἔδωσε τὰς ἀκολούθους ἀριθμητικὰς τιμάς:

743,24χμ.	743,26χμ.	743,24χμ.	743,25χμ.	743,25χμ.
25	27	23	25	23
24	23	24	26	25
26	24	28	27	28
26	23	25	22	27

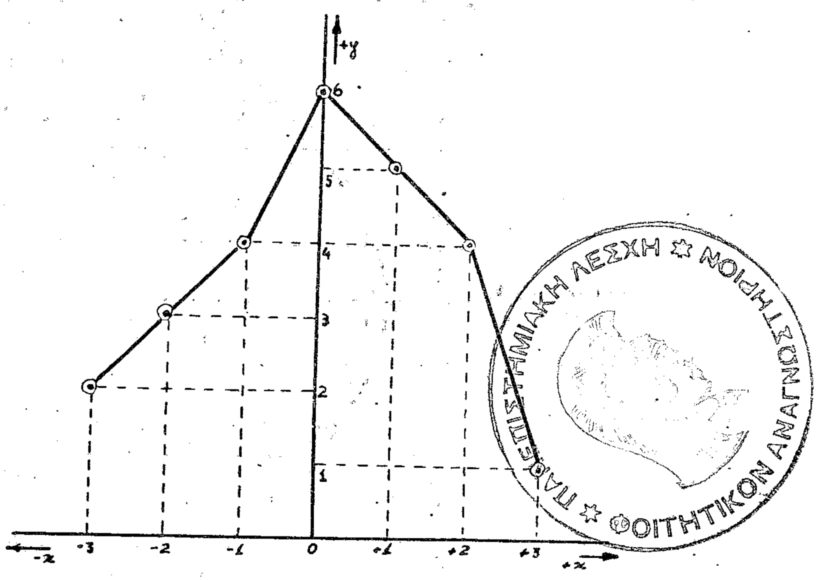
Ἐὰν λάβωμεν τὰς διαφορὰς τούτων ἀπὸ τὴν μέσην ἀριθμητικὴν τιμήν, ἥτις εἶναι ***743,25χμ.***, θὰ ἔχωμεν:

+0,01	—0,01	+0,01	0,00	0,00
0,00	—0,02	+0,02	0,00	+0,02
+0,01	+0,02	+0,01	—0,01	0,00
—0,01	+0,01	—0,03	—0,02	—0,03
—0,01	+0,02	0,00	+0,03	—0,02

Αἱ διαφοραὶ αὗται κυμαίνονται μεταξὺ +0,03 καὶ —0,03 τοῦ χιλιοστομέτρου. Ἐὰν τὰ χωρίσωμεν καθ' ὁμάδας, θὰ σχηματίσωμεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα :

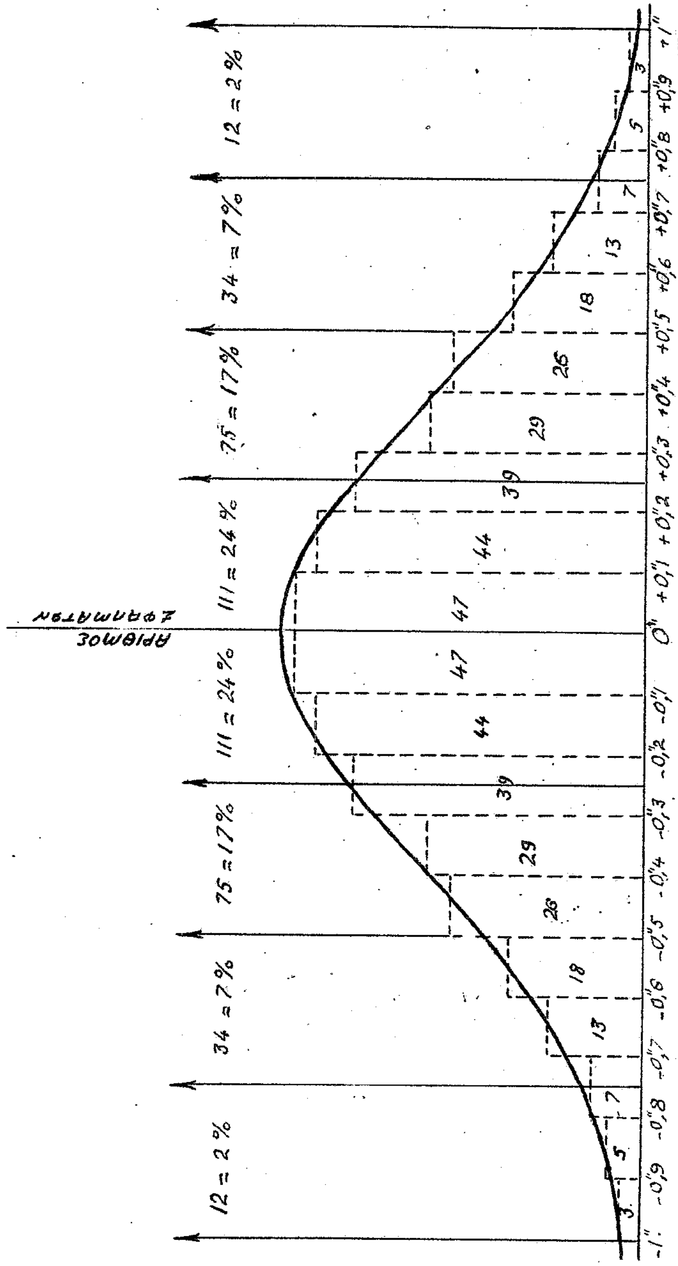
Τιμαί :	Πλῆθος μετρήσεων : +	0	—
0,00		6	
0,01	5		4
0,02	4		3
0,03	1		2

Ἐὰν τώρα εἰς τὸ ἐπίπεδον xy (σχ. 3) ἀπεικονίσωμεν τὰς τιμὰς



Σχ. 3

ταύτας, οὕτως ὥστε ὁ ἄξων τῶν x νὰ παριστᾷ τὰς διαφορὰς ἀπὸ τὸ ἀριθμητικὸν μέσον καὶ ὁ ἄξων τῶν y τὸ πλῆθος τῶν μετρήσεων, θὰ ἔχωμεν τὴν *γραφικὴν παράστασιν τῆς συχνότητος* τῶν τυχαίων σφαλμάτων τῆς ληφθείσης σειρᾶς τῶν μετρήσεων τῆς βαρομετρικῆς πιέσεως. Ἐκ τῆς γραφικῆς αὐτῆς παραστάσεως φαίνεται εὐκόλως ὅτι ὑπάρχει ἓν μέγιστον, τὰ μικρότερα δηλαδὴ σφάλματα—θετικὰ καὶ ἀρνητικὰ—εἶναι τὰ περισσότερα ἐν συγκρίσει μὲ τὰ μεγαλύτερα. Ἐπὶ πλέον κεῖνται περίπου συμμετρικῶς ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y.



Σχ. 4
Μέγεθος τῶν σφαλμάτων.

Παράδειγμα Βον

Περισσότερον παραστατικὸν εἶναι τὸ ἀναφερόμενον συχνὰ κλασικὸν **παράδειγμα τοῦ Ἄγγλου ἀστρονόμου Bradley.** Οὗτος προσδιώρισε διὰ τοῦ μεσημβρινοῦ τηλεσκοπίου τοῦ Ἀστεροσκοπείου τοῦ Greenwich, 470 φοράς, τὴν διαφορὰν τῆς ὀρθῆς ἀναφορᾶς μεταξὺ Ἡλίου καὶ ὡρισμένου ἀστέρος καὶ εὗρε τὰ σφάλματα (τὰς ἀποκλίσεις) τῶν ἐπὶ μέρους τιμῶν ἀπὸ τῆς μέσης. Ταῦτα ἦσαν τόσον θετικά, ὅσον καὶ ἀρνητικά, περιελαμβάνοντο δὲ μεταξὺ τῶν ἀκολούθων ὁρίων :

Μεταξύ :	0^{λ},0	καὶ	0^{λ},1	ἦσαν	94,	Μεταξὺ	0^{λ},6	καὶ	0^{λ},7	ἦσαν	26
»	0,1	»	0,2	»	88	»	0,7	»	0,8	»	14
»	0,2	»	0,3	»	78	»	0,8	»	0,9	»	10
»	0,3	»	0,4	»	58	»	0,9	»	1,0	»	7
»	0,4	»	0,5	»	51	Καὶ ἄνωθεν τοῦ			1,0	»	8
»	0,5	»	0,6	»	36						

Γραφικῶς δὲ ἡ κατανομὴ αὕτη τῶν σφαλμάτων ἀπεικονίζεται εἰς τὴν παράστασιν (σχ. 4).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΠΙΘΑΝΩΤΕΡΑ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΜΕΤΡΑ ΑΚΡΙΒΕΙΑΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

Εὕρεσις τῆς πιθανωτέρας τιμῆς.

Προκειμένου νὰ εὕρωμεν τὴν πιθανωτέραν τιμὴν T μιᾶς σειρᾶς μετρήσεων ἢ παρατηρήσεων, αἱ ὁποῖαι περιέχουν μόνον τυχαῖα σφάλματα, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς : Ὑποθέτομεν ὅτι ὅλαι αἱ μετρήσεις ἔγιναν μὲ τὴν αὐτὴν ἐπιμέλειαν καὶ μέθοδον, ἑπομένως μὲ τὴν αὐτὴν περίπου ἀκρίβειαν, καὶ ζητοῦμεν ἐκείνην τὴν τιμὴν T, ἡ ὁποία δύναται νὰ ἀντικαταστήσῃ ὅλας τὰς ἐπὶ μέρους τιμάς t.

Ἔστω ὅτι ἔχομεν δύο τιμὰς t_1 καὶ t_2 καὶ ζητοῦμεν τὴν πιθανωτέραν τιμὴν T. Δεχόμεθα ὅτι αὕτη θὰ κεῖται εἰς τὸ μέσον τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν. Αὕτη θὰ διαφέρῃ τῶν t_1 καὶ t_2 κατὰ τὰς ποσότητας υ_1 καὶ υ_2 (σχ. 5), ἤτοι θὰ ἔχωμεν :

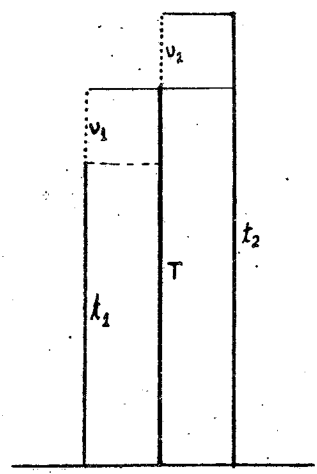
$\upsilon_1 = -\upsilon_2$ ἢ καί : $\upsilon_1 + \upsilon_2 = 0$ (1'),

ἡ δὲ πιθανωτέρα τιμὴ θὰ εἶναι :

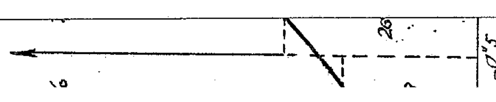
$$T = t_1 + \upsilon_1$$
$$T = t_2 + \upsilon_2$$
$$T = \frac{(t_1+t_2)+(\upsilon_1+\upsilon_2)}{2} = \frac{t_1+t_2}{2}$$

διότι ἰσχύει ἡ σχέσις (1').

Ἔστω ὅτι ἔχομεν μέγαν ἀριθμόν, 2^n ἐπαναληπτικῶν μετρήσεων, ἤτοι : t_1, t_2, t_3,..., αἵτινες παρίστανται διὰ μηκῶν, γραφικῶς εἰς τὸ σχῆμα 6. Εἶναι προφανῶς ἀδύνατον νὰ φέρωμεν μίαν παράλληλον πρὸς αὐτὰ εὐθεῖαν ἐπὶ τῆς ὁποίας νὰ λάβωμεν *μῆκος τοιοῦτον ὥστε,*



Σχ .5



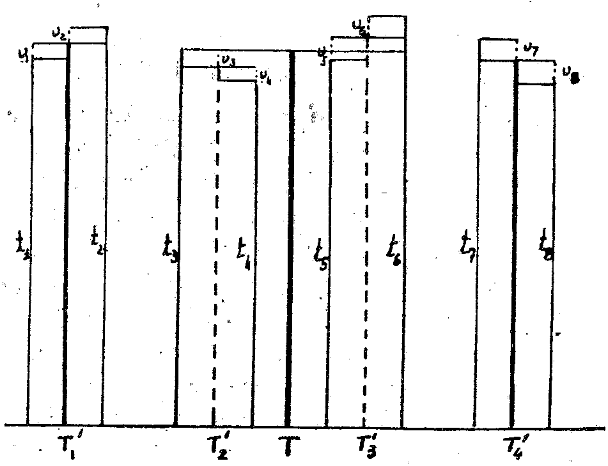
αἱ διαφοραὶ υ τούτου ἐκ τῶν ἄλλων τμημάτων νὰ εἶναι ἀνὰ δύο ἴσαι καὶ ἀντίθετοι.

Δυνάμεθα ὅμως νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς: Νὰ κάμωμεν συνδυασμὸν τῶν ἐπὶ μέρους μετρήσεων ἀνὰ δύο, ὅπως ἀκριβῶς ἔγινε καὶ προηγουμένως. Λαμβάνομεν οὕτως:

$$T_1'=\frac{t_1+t_2}{2},\quad T_2'=\frac{t_3+t_4}{2},\quad T_3'=\frac{t_5+t_6}{2},\dots$$

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εὑρίσκομεν πολλὰ ζεύγη τιμῶν καὶ συγχρόνως ἔχομεν:

$$\left.\begin{array}{l} \upsilon_1+\upsilon_2=0 \\ \upsilon_3+\upsilon_4=0 \\ \dots\dots \\ \dots\dots \end{array}\right| \text{ἢ}\quad \upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3+\upsilon_4+\dots=[\upsilon]=0.$$



Σχ. 6

ὅπου τὸ σύμβολον [ ] σημαίνει τὸ ἄθροισμα πεπερασμένου ἀριθμοῦ ὁμοειδῶν μεγεθῶν (1). Ἐὰν τώρα συνδυάσωμεν τὰ T' ἀνὰ δύο, θὰ προ-

(1) Τὸ σύμβολον τοῦτο εἰσήχθη ὑπὸ τοῦ Gauss καὶ προῆλθεν ἀπὸ τὸ ἑλληνικὸν γράμμα Σ=ἄθροισμα. Κατ' ἀρχάς, χάριν ἁπλότητος, ἐχρησιμοποιεῖτο τὸ σύμβολον [, βραδύτερον δὲ εἰσήχθη ἡ ἔκφρασις [ ].

κύψουν τιμαὶ αἱ ὁποῖαι θὰ εἶναι κατὰ τὸ πλῆθος, τὸ τέταρτον τοῦ ἀρχικοῦ ἀριθμοῦ. Ἤτοι :

$$T_1''=\frac{T_1'+T_2'}{2},\quad T_2''=\frac{T_3'+T_4'}{2},\ldots$$

καὶ συγχρόνως αἱ σχέσεις :

$$\left.\begin{array}{l} \upsilon_1'+\upsilon_2'=0 \\ \upsilon_3'+\upsilon_4'=0 \\ \ldots \\ \ldots \end{array}\right| \quad \text{ἢ} \quad [\upsilon']=0 \quad \text{καί :} \quad \begin{array}{l} T_1''-t_1=\upsilon_1+\upsilon_1' \\ T_2''-t_2=\upsilon_2+\upsilon_2' \\ \ldots \\ \ldots \end{array}$$

Προχωροῦντες, κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, λαμβάνομεν :

$$[\upsilon]=0,\ [\upsilon']=0,\ [\upsilon'']=0,\ldots$$

καί :

$$T_1''-t_1=\upsilon_1+\upsilon_1',\quad T_1'''-t_1=\upsilon_1+\upsilon_1'+\upsilon_1'',$$
$$T_1''''-t_1=\upsilon_1+\upsilon_1'+\upsilon_1''+\upsilon_1''',\ldots$$

. . . .

Ἑπομένως ἔχομεν καὶ τὰς σχέσεις :

$$(T-t_1)+(T-t_2)+(T-t_3)+\ldots=[\upsilon]+[\upsilon']+[\upsilon'']+\ldots=[V]=0\quad(1'').$$

ὅπου T εἶναι ἡ ὁριστικὴ μέση τιμὴ καὶ V τὰ σφάλματα —αἱ διαφοραὶ— τῶν ἀρχικῶν μετρήσεων t_1, t_2,,.., ἐξ αὐτῆς. *Ὁ τύπος οὗτος (1'') ἐκφράζει τὴν ἰδιότητα τῆς μέσης τιμῆς ἡ ὁποία εἶναι ἐξαγόμενον 2^n τιμῶν t, ἴσης ἀκριβείας μετρήσεων ἢ παρατηρήσεων.*

Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι, ἡ ἰδιότης τὴν ὁποίαν ἐκφράζει ὁ τύπος (1''), ἰσχύει καὶ ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν μετρήσεων δὲν εἶναι ἀκριβῶς 2^n. Διότι τὰ κατὰ προσέγγισιν ὁμοιομεγέθη σφάλματα V, θὰ ἐμφανίζωνται μὲ ἴσην πιθανότητα, τόσον θετικά, ὅσον καὶ ἀρνητικά. Κατὰ συνέπειαν ταῦτα θὰ ἐξουδετεροῦνται μεταξύ των.

Δυνάμεθα ἑπομένως, νὰ ὁρίσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (1''), ὡς τὴν γενικῶς ἰσχύουσαν συνθήκην διὰ τὴν ἐκλογὴν τῆς πιθανωτέρας τιμῆς μιᾶς οἱασδήποτε σειρᾶς, τῆς αὐτῆς ἀκριβείας, παρατηρήσεων t. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐργαζόμενοι, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἐπιτυγχάνομεν ἐν γένει μίαν *ὑπόθεσιν* ὡς πρὸς τὴν ἀκολουθητέαν πορείαν πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀκριβοῦς τιμῆς ἑνὸς μετρουμένου μεγέθους. *Ἡ ὑπόθεσις αὕτη ἀποβαίνει τόσον περισσότερον ἀσφαλεστέρα, ὅσον μεταγενέστερα συμπεράσματα, τὰ ὁποῖα ἐξάγονται τῇ βοηθείᾳ τῆς ὑποθέσεως ταύτης, συμφωνοῦν μὲ τὴν πραγματικότητα.*

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω λεχθέντων, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν πιθανωτέραν τιμὴν T, σχηματίζομεν τὰς *ἐξισώσεις τῶν σφαλμάτων* :

$T = t_1 + \upsilon_1$ (Όπου $t_1, t_2, \ldots t_n$ εἶναι τὰ παρατηρούμενα μεγέθη καὶ $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots \upsilon_n$ αἱ διορθώσεις τὰς ὁποίας ἐπιφέρομεν εἰς αὐτά).

$$\begin{array}{l} T = t_1 + \upsilon_1 \\ T = t_2 + \upsilon_2 \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ T = t_n + \upsilon_n \\ \hline nT = [t] + [\upsilon] \end{array}$$

ἐξ αὐτῆς δέ, ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τήν : $[\upsilon] = 0$, ἔχομεν τελικῶς :

$$\boxed{T = \frac{[t]}{n}} \qquad (3)$$

ἡ ὁποία μᾶς λέγει τὰ ἑξῆς :

«Ἡ πιθανωτέρα τιμὴ μιᾶς σειρᾶς παρατηρήσεων ἢ μετρήσεων ἑνὸς μεγέθους ἰσοῦται μὲ τὴν μέσην ἀριθμητικὴν τιμὴν τῶν μεμονωμένων ἐξαγομένων τῶν παρατηρήσεων» (1).

---

(1) Εἰς τὴν θεωρίαν τῆς ἰσοσταθμίσεως τῶν παρατηρήσεων χρησιμοποιοῦνται πέντε διάφοροι τύποι, εἶναι δὲ οὗτοι οἱ ἑξῆς:

1. Τὸ ἁπλοῦν ἀριθμητικὸν μέσον (μέση ἀριθμητικὴ τιμή):

$$x = \frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_n}{n}$$

καὶ τὸ γενικὸν ἀριθμητικὸν μέσον :

$$x = \frac{p_1 t_1 + p_2 t_2 + \ldots + p_n t_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

2. Τὸ γεωμετρικὸν μέσον ἢ ὁ γεωμετρικὸς μέσος ὅρος :

$$x = \sqrt[n]{t_1 . t_2 . \ldots . t_n}$$

3. Τὸ μέσον τετραγωνικὸν ἄθροισμα :

$$x = \sqrt{\frac{t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2}{n}}$$

4. Τὸ ἁρμονικὸν μέσον ἢ ὁ ἁρμονικὸς μέσος ὅρος

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \ldots + \frac{1}{t_n}\right)$$

5. Ἡ διάμεσος τιμὴ ἢ τιμὴ μέσου :

x = μεσαῖα τιμὴ ὅλων τῶν παρατηρήσεων.

Ἐξ ὅλων τούτων τῶν πιθανῶν τιμῶν εἰς τὴν θεωρίαν τοῦ Gauss, τὴν

Ἐφ᾽ ὅσον πραγματευόμεθα ἀλγεβρικῶς τὰ τυχαῖα σφάλματα δέον νὰ κάμωμεν ἐνταῦθα μερικὰς ἀναγκαίας διασαφήσεις:

Ἐὰν ἔχωμεν τὰ παρατηρηθέντα μεγέθη $t_1, t_2, \ldots, t_n$, τὰ ὁποῖα φέρουν ἐν ἑαυτοῖς τὰ *ἀληθῆ σφάλματα* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, τότε, ἂν διὰ τοῦ X παραστήσωμεν τὴν *ἀληθῆ τιμήν;* θὰ ἔχωμεν τὰς *ἐξισώσεις τῶν σφαλμάτων*:

$$X = t_1 + \varepsilon_1 = \ldots\ldots t_i + \varepsilon_i = \ldots\ldots = t_n + \varepsilon_n \qquad (4)$$

καὶ
$$\varepsilon_i = X - t_i \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots n) \qquad (5)$$

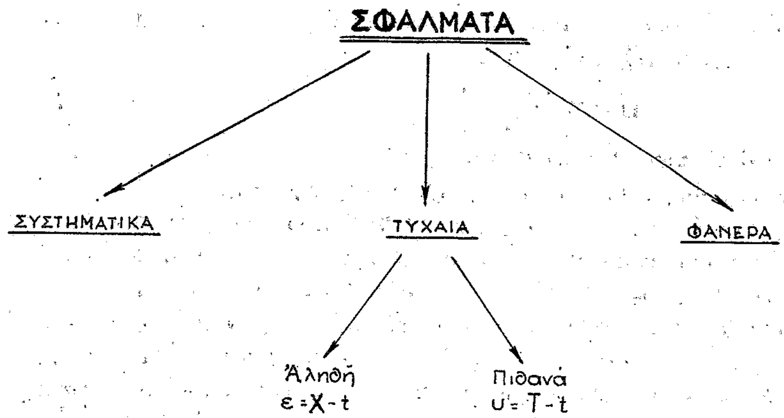
Ἐπειδὴ ἔγκειται εἰς τὴν φύσιν τῶν πραγμάτων, συνήθως νὰ μὴ γνωρίζωμεν ἢ νὰ μὴ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν *ἀληθῆ τιμὴν X*, δι᾽ αὐτό, ἐκ τοῦ συνόλου τῶν μετρηθέντων μεγεθῶν $t_1, t_2, \ldots, t_n$, προσδιορίζομεν τὴν πιθανωτέραν τιμὴν T, ἡ ὁποία εὑρίσκεται πολὺ ἐγγὺς τῆς ἀγνώστου τιμῆς X. Ἑπομένως, ἐφ᾽ ὅσον, ἀντὶ τῆς ἀληθοῦς τιμῆς X, χρησιμοποιοῦμεν τὴν πιθανωτέραν τιμὴν T, εἶναι φυσικόν, ἀντὶ *τῶν ἀληθῶν τυχαίων σφαλμάτων*: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, νὰ λάβωμεν τὰ *πιθανὰ τυχαῖα σφάλματα*: $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots\ldots, \upsilon_n$, ὁπότε αἱ ἐξισώσεις (4) καὶ (5) γίνονται:

$$T = t_i + \upsilon_i \; , \; \upsilon_i = T - t_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (6)$$

Εἶναι προφανὲς ἤδη ὅτι, ἐφ᾽ ὅσον προστίθενται νέαι μετρήσεις t, τὰ ἐμφανιζόμενα νέα πιθανὰ σφάλματα υ θὰ ἐπηρεάζουν, ἔστω κατὰ πολὺ μικρὸν ποσόν, τὸ ἐξαγόμενον T. Ἡ ἐπίδρασις αὕτη τῶν νέων υ εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς πιθανωτέρας τιμῆς T θὰ εἶναι διαρκῶς καὶ μικροτέρα, καθ᾽ ὅσον θὰ αὐξάνῃ ὁ ἀριθμὸς τῶν μετρήσεων t. Καὶ ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν μετρήσεων ἢ παρατηρήσεων τείνει πρὸς ∞, τότε καὶ ἡ ἐπίδρασις τῶν σφαλμάτων τούτων ἐπὶ τοῦ τελικοῦ ἐξαγομένου θὰ τείνῃ πρὸς τὸ 0. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ πιθανωτέρα τιμὴ T θὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ἀληθῆ X. Εἶναι περιττὸν ἴσως νὰ τονισθῇ ὅτι, ὅσον ἀκριβέστεραι εἶναι αἱ μετρήσεις, τόσον ἡ ἐπίδρασις τῶν υ εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς T εἶναι μικροτέρα καὶ ταχυτέρα ἡ σύμπτωσις αὐτῆς μὲ τὴν τιμὴν X.

Συνοψίζοντες ὅλα τὰ ἀνώτερω, δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὴν ἀκόλουθον διάταξιν τῶν διαφόρων σφαλμάτων:

ὁποίαν καὶ ἀναπτύσσομεν ἐνταῦθα, χρησιμοποιεῖται βασικῶς, ὡς πιθανωτέρα τιμή, ἡ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου, ἥτις—ἐφ᾽ ὅσον ἡ ἀληθὴς εἶναι συνήθως ἄγνωστος—δεχόμεθα ὅτι εὑρίσκεται πολὺ ἐγγὺς τῆς ἀληθοῦς.



Τὸ ἀριθμητικὸν μέσον σφάλμα.

Εἰς τὴν θεωρίαν τῶν σφαλμάτων, ἀναλόγως τοῦ τρόπου τῆς θεωρήσεως τῆς κατὰ προσέγγισιν ἀκριβοῦς τιμῆς μιᾶς σειρᾶς μετρήσεων αἵτινες περιέχουν τυχαίας μόνον ἀνακριβείας ἔχομεν καὶ διαφόρους τρόπους εὑρέσεως τῶν σφαλμάτων τούτων. Καὶ ὡς πρῶτος, εὔκολος τρόπος εὑρέσεως τοῦ γενομένου σφάλματος εἰς μίαν σειρὰν ὁμοειδῶν μετρήσεων, εἶναι ὁ σχηματισμὸς τοῦ μέσου ὅρου τῶν ἀπολύτων τιμῶν ὅλων τῶν τυχαίων σφαλμάτων, χωρὶς νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν, ἂν ταῦτα εἶναι θετικὰ ἢ ἀρνητικά.

Ἐὰν δηλαδὴ ὑποθέσωμεν ὅτι γνωρίζομεν τὰ ἀληθῆ τυχαῖα σφάλματα μιᾶς σειρᾶς n παρατηρήσεων καὶ παραστήσωμεν ταῦτα διὰ τῶν $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν:

$$D = \pm \frac{[\text{ἀπόλ. } \varepsilon]}{n} \quad \text{ἢ} \quad \pm \frac{[\,[\varepsilon]\,]}{n} \tag{7}$$

ὅπου ἡ παράστασις [ἀπόλ. ε] σημαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. Τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ D καλοῦμεν *ἀριθμη-*

τικὸν μέσον σφάλμα (erreur moyenne arithmétique, average error, durchschnittliche Fehler) μιᾶς παρατηρήσεως. Ἀντὶ νὰ λάβωμεν τὰ ἀληθῆ σφάλματα, δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν καὶ τὰ πιθανά, ὁπότε ἡ σχέσις (7), γράφεται καί :

$$D=\pm\frac{[\text{ἀπόλ. } v]}{n} \qquad (7')$$

Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ τύπος (7') μᾶς δίδει τὸ ἀριθμητικὸν μέσον σφάλμα μιᾶς μετρήσεως ἢ παρατηρήσεως.

Τὸ σφάλμα ὅμως τοῦτο, δὲν μᾶς βοηθεῖ ἐπαρκῶς, προκειμένου νὰ ἐλέγξωμεν τὴν ἀκρίβειαν μιᾶς σειρᾶς μετρήσεων, δὲν δύναται δηλαδὴ νὰ χρησιμεύσῃ ὡς *μέτρον ἀκριβείας* αὐτῆς. Δι' αὐτὸν τὸν λόγον τοῦτο σήμερον δὲν παίζει σπουδαῖον ρόλον εἰς τὴν θεωρίαν τῶν σφαλμάτων. Αὐτὸ φαίνεται εὐκόλως εἰς τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα : Ἔστω ὅτι ἔχομεν δύο σειρὰς ἐκ 10 μετρήσεων τῆς ἀεροστάθμης—ὅπου τὸ ὄργανον παρατηρήσεως εἶναι τὸ αὐτό, αἱ μετρήσεις γίνονται διὰ τῆς ἰδίας μεθόδου καὶ ὑπὸ τοῦ ἰδίου παρατηρητοῦ—αἱ ὁποῖαι δίδουν τὰς ἀκολούθους τελικὰς διαφοράς, ὑποτιθεμένου ὅτι γνωρίζομεν τὴν ἀληθῆ τιμὴν 0.

ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ	ΤΕΛΙΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑΙ ε	
	+mm	−mm
1	5	—
2	4	—
3	—	5
4	7	—
5	—	6
6	—	5
7	—	7
8	6	—
9	—	6
10	4	—
	26	29

[ἀπόλ. ε]=55

$$D=\frac{[\text{ἀπόλ. } ε]}{n}=\frac{55}{10}=5{,}5$$

ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ	ΤΕΛΙΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑΙ ε	
	+mm	−mm
1	12	—
2	—	2
3	—	12
4	—	0
5	1	—
6	—	1
7	14	—
8	—	3
9	—	0
10	—	10
	27	28

[ἀπόλ. ε]=55

$$D=\frac{[\text{ἀπόλ. } ε]}{n}=\frac{55}{10}=5{,}5$$

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ποία ἐκ τῶν δύο αὐτῶν σειρῶν εἶναι ποιοτικῶς ἡ καλυτέρα.

Παρατηροῦμεν ἐνταῦθα ὅτι, ἐνῷ τὸ ἀριθμητικὸν μέσον σφάλμα εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, καὶ σύμφωνος πρὸς τὴν ἔνδειξιν ταύτην θὰ ἔπρεπε νὰ ἀποφανθῶμεν ὅτι καὶ αἱ δύο σειραὶ τῶν μετρήσεων τῆς ἀεροστάθμης εἶναι τῆς αὐτῆς ἀκριβείας, ἐν τούτοις, καὶ εἰς τὸν ἔχοντα καὶ μικρὰν ἔστω πεῖραν παρατηρήσεων εἶναι πρόδηλον, ὅτι ἡ πρώτη σειρὰ εἶναι, ποιοτικῶς, κατὰ πολὺ καλυτέρα τῆς δευτέρας. Οὔτε, φυσικά, καὶ τὸ [ε] δύναται νὰ μᾶς βοηθήσῃ εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς καλυτέρας σειρᾶς, διότι τοῦτο ὑποδεικνύει ὅτι ποιοτικῶς ὑπερέχει ἡ δευτέρα (1). Ἐνῶ, ὅπως ἐσημειώθη ἀνωτέρω, ἡ πρώτη σειρὰ εἶναι αἰσθητῶς καλυτέρα τῆς ἄλλης.

Ἑπομένως ὁ τύπος (7), καὶ ἀντιστοίχως ὁ (7′), τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου σφάλματος δὲν μᾶς βοηθεῖ ἐπαρκῶς εἰς τὸ νὰ συγκρίνωμεν καὶ νὰ ἀξιολογήσωμεν τὰς ἐπὶ μέρους σειρὰς τῶν μετρήσεων.

Τὸ μέσον σφάλμα.

Ἐφ᾿ ὅσον τὸ ἀριθμητικὸν μέσον σφάλμα δὲν δύναται νὰ παίξῃ σπουδαῖον ρόλον εἰς τὴν ἀξιολόγησιν μιᾶς σειρᾶς μετρήσεων, διὰ τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν *τὸ μέσον σφάλμα ἢ τὸ μέσον τετραγωνικὸν σφάλμα* (2) (erreur moyenne quadratique ἢ écart type, mean square ἢ Standard error, mittlere Fehlerquadrat ἢ mittlere Fehler), τὸ ὁποῖον δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου: (3)

$$m^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} \quad ἢ \quad m = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} \qquad (8)$$

ὅπου n εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀληθῶν μετρήσεων— ἢ ὅπερ τὸ αὐτό, τῶν n ἀνεξαρτήτων ἐξισώσεων τῶν σφαλμάτων—καὶ ε_1, ε_2, ..., ε_n αἱ ἀληθεῖς τιμαὶ τῶν τυχαίων σφαλμάτων. Δηλαδή: ***«τὸ τετράγωνον τοῦ μέσου σφάλματος μιᾶς παρατηρήσεως ἰσοῦται μὲ τὸ πηλῖκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων***

---

(1) Ἡ τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος τούτου, ἂν δὲν εἶναι μηδέν, πρέπει νὰ εἶναι ἐγγὺς τοῦ μηδενός.

(2) Συνήθως ἀναφέρεται ὡς μέσον σφάλμα.

(3) Ἡ ἔκφρασις [εε] ἢ [ε²] σημαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων πεπερασμένου ἀριθμοῦ προσθετέων.

ἑκάστης ἐκ τῆς μέσης τιμῆς, διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν παρατηρήσεων ἢ μετρήσεων».

Τὸ μέσον σφάλμα μᾶς δίδει ἕνα καλύτερον μέτρον ἀξιολογήσεως τῶν παρατηρήσεων, διότι εἰς τὸ ἄθροισμα [εε] αἱ μεγαλύτεραι τιμαὶ τῶν σφαλμάτων ε παίζουν σπουδαιότερον ρόλον—ἐφ᾿ὅσον λαμβάνομεν τὰ τετράγωνα αὐτῶν. Τὸ μέσον σφάλμα εἶναι ἐν γένει μεγαλύτερον τοῦ προηγουμένου, καὶ μόνον ὅταν τὰ ε εἶναι ὅλα ἴσα μεταξύ των, τότε αἱ τιμαὶ τῶν δύο σφαλμάτων συμπίπτουν.

Δέον νὰ ὑπομνησθῇ ὅτι τὰ τυχαῖα σφάλματα μιᾶς σειρᾶς μετρήσεων δὲν εἶναι ἐν γένει γνωστὰ καὶ δι᾿αὐτὸ συχνά, εἰς πρώτην προσέγγισιν, χρησιμοποιοῦμεν εἰς τὸν τύπον (8), ἀντὶ τῶν $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, τὰ πιθανὰ σφάλματα $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_n$, ὁπότε ἔχομεν :

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\upsilon\upsilon]}{n}} \qquad (8')$$

Εἰς πλείστας περιπτώσεις εἴμεθα εἰς θέσιν, ἐξ ὑστέρου, νὰ ἐλέγξωμεν κατὰ πόσον ἡ πιθανωτέρα τιμὴ πλησιάζει ἢ συμπίπτει μὲ τὴν ἀληθῆ, διότι τὰ ἐξαγόμενα τῶν μετρήσεων πρέπει νὰ ἐπαληθεύουν καὶ ἄλλην τινα γνωστὴν σχέσιν. Ὅταν, ἐπὶ παραδείγματι, μετρῶμεν τὰς γωνίας ἑνὸς τριγώνου πρέπει ἀπαραιτήτως νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$A + B + \Gamma = 180^\circ.$$

Ἐν γένει ὅμως, ὅπως θὰ ἴδωμεν εἰς τὴν συνέχειαν, δὲν δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιοῦμεν τὸν (8′), ὡς ἔχει.

Ἐὰν εἰς τὸ ἀνωτέρω ἀριθμητικὸν παράδειγμα, σχηματίσωμεν τὸ [εε] καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, θὰ ἔχωμεν :

$$[\varepsilon\varepsilon[= 25+16+49+36+16+25+36+25+49+36=313.$$

$$[\varepsilon\varepsilon] = 144+1+196+4+144+0+1+9+0+100=599.$$

$$m_I = \sqrt{\frac{313}{10}} = \pm 5{,}59, \quad m_{II} = \sqrt{\frac{599}{10}} = \pm 7{,}74.$$

Συγκρίνοντες τὰς δύο τιμὰς τοῦ μέσου σφάλματος, βλέπομεν ἀμέσως ὅτι, καλυτέρας ποιότητος σειρὰ παρατηρήσεων εἶναι ἡ πρώτη. Τοῦτο συμφωνεῖ καὶ μὲ τὴν ἐντύπωσιν ἐκ τῆς πρώτης ἐπισκοπήσεως τῶν ἐξαγομένων τῶν δύο σειρῶν, κατὰ τὴν ὁποίαν, ἡ ἀκρίβεια εἰς τὴν δευτέραν σειρὰν μετρήσεων εἶναι μικροτέρα, μολονότι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν παρουσιάζεται δίς, ὡς τιμὴ τοῦ ε, τὸ 0 καὶ τὸ [ε] δίδει τιμὴν μικροτέραν, παρ᾿ ὅ,τι εἰς τὴν πρώτην.

Ὅ,τι τὸ μέσον τετραγωνικὸν σφάλμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου σφάλματος, φαίνεται ἐκ τῆς ἀκολούθου περιπτώσεως— διὰ νὰ μὴ ἐξετάσωμεν τὴν γενικήν. Ἔστωσαν τὰ ἀληθῆ σφάλματα ε_1, καὶ ε_2. Ἔχομεν τὰς τιμάς :

$$D=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} \qquad m=\sqrt{\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}}$$

Καὶ διὰ νὰ τὰς συγκρίνωμεν, λαμβάνομεν τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων. Ἤτοι :

$$m^2-D^2=\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}-\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+2\varepsilon_1\varepsilon_2}{4}=\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2-2\varepsilon_1\varepsilon_2}{4}=\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2}{4}$$

Ἑπομένως, ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ εἶναι θετική, τὸ $m^2>D^2$. Εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν $\varepsilon_1=\varepsilon_2$, τότε τὸ $m=D$. Ἡ πρότασις αὕτη ἰσχύει καὶ ὅταν ἔχωμεν n μετρήσεις.

Εἰς πολλὰς περιπτώσεις χρειάζεται νὰ γνωρίζωμεν τὸ *μέγιστον* ἢ *ὁριακὸν σφάλμα* μιᾶς σειρᾶς μετρήσεων, διότι καὶ τὸ σφάλμα τοῦτο εἶναι *μέτρον ἀκριβείας* τῶν ἐν λόγῳ παρατηρήσεων. Καὶ ἐπειδὴ ἡ θεωρία τῶν πιθανοτήτων διδάσκει ὅτι «μεταξὺ 300 παρατηρήσεων, μόνον μιᾶς τὸ σφάλμα φθάνει τὸ τριπλάσιον τοῦ μέσου σφάλματος, ὅλων δὲ τῶν ἄλλων τὰ σφάλματα εἶναι μικρότερα», συνάγομεν τοῦτο τὸ συμπέρασμα : Ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν παρατηρήσεων εἶναι μεγάλος, τότε τὸ μέγιστον τυχαῖον σφάλμα τὸ ὁποῖον σημειώνεται εἰς τὴν σειρὰν αὐτήν, εἶναι μικρότερον τοῦ 3m. Δι' αὐτὸ ὁρίζομεν τὸ μέγιστον ἢ **ὁριακὸν σφάλμα M * ὡς ἑξῆς :**

$$M=3m.$$

Ὁ τύπος οὗτος ἰσχύει ἰδιαιτέρως εἰς τὴν Γεωδαισίαν. Τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου αὐτοῦ, δυνάμεθα εὐκόλως νὰ ἀπαλλάσσωμεν μίαν διδομένην σειρὰν τῶν παρατηρήσεων ἢ μετρήσεων, ἐκ τῶν χονδροειδῶν σφαλμάτων.

---

* Ἀκριβέστερον ὡς μέγιστον σφάλμα M ὁρίζεται τὸ 3m ἢ 4m. Εὑρίσκεται ὅτι εἰς 1000 ἀληθῆ σφάλματα ε, ἂν τὸ λάβωμεν ἀπολύτως, ἔχομεν :

μεταξὺ O καὶ m 683 σφάλματα
» O » m 954 »
» O » m 997 »
» O » m 999 »

Πιθανὸν σφάλμα.

Εἰς τὴν θεωρίαν τῶν σφαλμάτων, προκειμένου νὰ ἐλέγξωμεν τὸν βαθμὸν ἀκριβείας μιᾶς σειρᾶς σφαλμάτων, χρησιμοποιοῦμεν καὶ ἕτερον μέτρον. Καὶ τοιοῦτον μέτρον ἀκριβείας εἶναι τὸ *πιθανὸν σφάλμα* W (erreur mediane, probable error, wahrscheinliche Fehler), τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὡς ἡ μεσαία τιμὴ ὅλων τῶν ἀληθῶν σφαλμάτων ε, διατεταγμένων κατὰ σειρὰν ἀπολύτων μεγεθῶν καὶ δίδεται ὑπὸ τῶν σχέσεων :

$$W = \pm \left| \varepsilon_{\frac{n+1}{2}} \right| \qquad n = \text{περιττὸς}$$

$$\left| \varepsilon_{\frac{n}{2}} \right| < \pm W < \left| \varepsilon_{\frac{n}{2}+1} \right| \qquad n = \text{ἄρτιος}$$

Ἐὰν λάβωμεν τὰ ε εἰς τὰς δύο σειρᾶς μετρήσεων τῆς ἀεροστάθμης, θὰ ἔχωμεν :

44555/66677 καὶ 00112/310121214

ἤτοι $W = \pm 5{,}5$ ἤτοι $W = \pm 2{,}5$

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι τὸ πιθανὸν σφάλμα εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν εἶναι μικρότερον παρ' ὅ,τι εἰς τὴν πρώτην καὶ ὅμως ποιοτικῶς ἡ πρώτη σειρὰ εἶναι πολὺ καλυτέρα τῆς ἑτέρας.

Ἐκ τῶν τριῶν τούτων σφαλμάτων, *τὸ πλέον ἐν χρήσει εἶναι σήμερον τὸ μέσον σφάλμα*, διότι δίδει τὸ καλύτερον μέτρον ἀκριβείας μιᾶς σειρᾶς μετρήσεων.

Μέτρα ἀκριβείας.

Πρέπει καὶ πάλιν νὰ τονισθῇ, ὅτι αἱ ποσότητες D, m, W, ὅπως καὶ ἡ h δὲν εἶναι σφάλματα, οὔτε διορθώσεις. Αὐταὶ χαρακτηρίζουν μᾶλλον τὴν μέσην ἀβεβαιότητα ἑνὸς ἐξαγομένου μετρήσεων. Εἶναι *μέτρα ἢ δεῖκται ἀκριβείας τῶν μετρήσεων*. Ἂς εὕρωμεν τὰς σχέσεις ποὺ συνδέουν τὰς ποσότητας ταύτας :

Ὑποθέτομεν, ὅτι ἔχομεν μίαν σειρὰν μετρήσεων μὲ ἀληθῆ σφάλματα $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$. Τότε ἡ πιθανότης τῆς ἐμφανίσεως π.χ. τοῦ εi μεταξὺ εi καὶ εi+dεi συμφώνως πρὸς τὴν σχέσιν (2'), εἶναι :

$$\Pi i = \varphi(\varepsilon i) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon i$$

ἡ δὲ πιθανότης ἵνα ἑκάστη μέτρησις δώσῃ ἀντιστοίχως σφάλματα

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$, μεταξὺ τῶν διαστημάτων ε_1 καὶ $\varepsilon_1 + d\varepsilon_1$, ε_2 καὶ $\varepsilon_2 + d\varepsilon_2, \ldots$ εἶναι :

$$\Pi = \underset{n=1}{\overset{n}{\pi i}} = \left\{\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right\}^n e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]}(d\varepsilon)^n$$

καθ' ὅτι αἱ μετρήσεις ἀποτελοῦν γεγονότα ἀνεξάρτητα.

Τὸ Π εἶναι ὡρισμένον, ὅταν ἐκλεγῇ ἡ παράμετρος h καὶ ἐφ' ὅσον δίδονται τὰ μεγέθη ε. Καλυτέρα δὲ εἶναι ἡ τιμὴ ἐκείνη τοῦ h, διὰ τὴν ὁποίαν ἡ πρώτη παράγωγος τῆς συναρτήσεως (10) ὡς πρὸς h νὰ εἶναι μηδέν. Ἤτοι πληροῦται ἡ σχέσις :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial h} = 0$$

ὅπου τὸ dε εἶναι οἱαδήποτε ἀπείρως μικρὰ ποσότης, ἀλλὰ σταθερὰ ὡς πρὸς τὴν μεταβολὴν τοῦ h. Τότε λαμβάνομεν :

$$nh^{n-1}e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]} - h^n\, 2h[\varepsilon\varepsilon]e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]} = 0$$

$$\text{ἢ} \quad n - 2h^2.[\varepsilon\varepsilon] = 0,$$

ἑπομένως ἔχομεν :

$$h = \sqrt{\frac{n}{2[\varepsilon\varepsilon]}} \tag{10}$$

Ἐκ τῶν (8) καὶ (10) εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν :

$$\boxed{h = \frac{1}{m\sqrt{2}}} \tag{11}$$

ἡ ὁποία συνδέει τὸ μέτρον ἀκριβείας h μὲ τὸ μέσον σφάλμα m.

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ εὕρωμεν σχέσιν συνδέουσαν τὸ ἀριθμητικὸν μέσον σφάλμα D μετὰ τοῦ h. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν κάθε ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ ε μὲ τὴν πιθανότητα ἐμφανίσεώς της καὶ ὁλοκληρώνομεν ἀπὸ —∞ ἕως +∞, ὁπότε ἔχομεν :

$$D = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varepsilon|\, e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} |\varepsilon|\, e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon + \int_{0}^{\infty} |\varepsilon|\, e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon \right] =$$

$$= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{\infty}^{0} |\varepsilon|\, e^{-h^2\varepsilon^2}\, d(-\varepsilon) + \int_{0}^{\infty} |\varepsilon|\, e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon \right] \text{ καὶ}$$

τὸ ἄνω ὁλοκλήρωμα γίνεται :

$$D = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon\, e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon,$$

ἄν δὲ θέσωμεν hε=t καὶ ὁλοκληρώσωμεν :

$$D = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} \frac{t}{h} \frac{dt}{h} = \frac{2}{h\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t\,dt = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}$$

λαμβάνομεν :

$$\boxed{h = \frac{1}{D\sqrt{\pi}}} \qquad (11')$$

Τέλος εὑρίσκομεν σχέσιν μεταξὺ πιθανοῦ σφάλματος W καὶ h ὡς ἑξῆς :

Τὸ πιθανὸν σφάλμα W ὁρίζεται τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἥμισυ τῶν σφαλμάτων n παρατηρήσεων νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ +W ἢ μικρότερον τοῦ —W καὶ τὸ ἥμισυ νὰ κεῖται μεταξὺ —W καὶ +W. Ἤτοι :

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-w}^{+w} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{w} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{2}.$$

Ἐκ τῶν πινάκων, οἱ ὁποῖοι μᾶς δίδουν τὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως σφάλματος, προκύπτει ὅτι :

$$Wh = 0{,}4769363\ldots \quad \text{ἢ} \quad \boxed{h = \frac{0{,}4769363\ldots}{W}} \qquad (11'')$$

Ὅπως βλέπομεν, ἡ παράμετρος h χαρακτηρίζει οὐσιωδῶς *τὴν ποιότητα τῶν παρατηρήσεων,* μᾶς λέγει δηλαδή, *πόσον καλαὶ εἶναι αὗται. Δίδει τὸ μέτρον ἢ τὸν βαθμὸν ἀκριβείας* (degré de precision, modulus ἢ measure of precision or relative agreement, Mass der Genauigkeit) *αὐτῶν.*

Σχέσεις μεταξὺ τῶν διαφόρων σφαλμάτων.

Συνοψίζοντες τὰ ἀνωτέρω, ἔχομεν τὰς κατωτέρω σχέσεις μεταξὺ τῶν διαφόρων σφαλμάτων :

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}} = \frac{1}{D\sqrt{\pi}} = \frac{0{,}47694}{W}$$

καί :

$$m=\frac{0{,}70711}{h},\quad D=\frac{0{,}56419}{h},\quad W=\frac{0{,}47694}{h}$$

Τὰ τρία αὐτὰ μεγέθη δὲν εἶναι ἀνεξάρτητα ἀλλήλων καὶ εἶναι ἀδιάφορον ποῖον θὰ χρησιμοποιήσῃ κανείς, ἐφ' ὅσον συνδέονται διὰ τοῦ h.

Ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν μετρήσεων εἶναι πολὺ μεγάλος, προφανῶς δισχεραίνεται ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ m. Τότε δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ D καὶ ἐξ αὐτοῦ, τῇ βοηθείᾳ τῆς σχέσεως $m=\frac{5}{4}D$, νὰ εὕρωμεν ἁπλούστερον τὸ μέσον σφάλμα. Βάσει τοῦ νόμου τῆς διασπορᾶς τῶν σφαλμάτων τοῦ Gauss, ὅταν ὁ ἀριθμὸς $n \rightarrow \infty$, τὰ D καὶ W δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς συνάρτησις μιᾶς σταθερᾶς, ἐξαρτωμένης ἐκ τοῦ μέτρου τῆς διασπορᾶς τῶν σφαλμάτων. Ἀκριβῶς δὲ ἡ πρᾶξις δίδει μεταξὺ τῶν τριῶν σφαλμάτων τὰς ἀκολούθους σταθερὰς σχέσεις:

$$D=0{,}7979\ m \quad \text{καὶ} \quad W=0{,}6745\ m \qquad (12)$$

ἢ κατὰ προσέγγισιν : $m=\frac{5}{4}D=\frac{3}{2}W.$ (12′)

Ἄρα : $W < D < m.$

Ἤτοι ἐκ τῶν τριῶν αὐτῶν μεγεθῶν τὸ m εἶναι τὸ μεγαλύτερον, ἑπομένως τὸ συντηρητικώτερον καὶ τὸ W τὸ μικρότερον, δηλαδὴ τὸ περισσότερον αἰσιόδοξον.

Παράδειγμα.

Ἔστω ὅτι 10 μετρήσεις τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου ἔδωσαν ὡς ἄθροισμα τὰς ἀκολούθους τιμάς :

t			t		
180°	0′	3″	180°	0′	1″
179	59	58	179	59	59
179	59	59	180	0	0
180	0	0	179	59	58
180	0	3	180	0	1

Ἐνταῦθα εἶναι εὔκολον νὰ ἔχωμεν τὰ ἀληθῆ τυχαῖα σφάλματα, ἐφ' ὅσον ἰσχύει ἡ σχέσις: $A+B+\Gamma=180^\circ$. Ἔχομεν δηλαδὴ τὴν ἀληθῆ τιμήν. Λαμβάνομεν τὰ ἀθροίσματα.

$$[\varepsilon]= \quad -3+2+1+0-3-1+1+0+2-1=-2$$
$$[\varepsilon\varepsilon]= \quad 9+4+1+0+9+1+1+0+4+1 \quad =30$$
$$\text{καὶ }]\text{ἀπόλ. } \varepsilon]= \quad 3+2+1+0+3+1+1+0+2+1 \quad =14$$

Τῇ βοηθείᾳ τῶν στοιχείων τούτων εὑρίσκομεν τὸ ἀριθμητικὸν μέσον σφάλμα, τὸ μέσον καὶ τὸ μέγιστον σφάλμα τῆς σειρᾶς τῶν μετρήσεων.

$$D=\pm\frac{[|\varepsilon|]}{n}=\pm\frac{14}{10}=\pm1'',4\ ,\ m=\pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}=\pm\sqrt{\frac{30}{10}}=\pm\sqrt{3}=\pm1'',7$$

$$M=3m=\pm5,1.$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν, τέλος, τὸ πιθανὸν σφάλμα, διατάσσομεν τὰ ἐπὶ μέρους σφάλματα κατὰ τάξιν μεγέθους: 00111]12233, ἐκ τῆς σειρᾶς δὲ ταύτης εὑρίσκομεν ὅτι:

$$W=\pm1'',\ 0.$$

Κριτικὴ τῶν ἐξαγομένων.

Ἐὰν ὑπολογίσωμεν τὰ D καὶ W, τῇ βοηθείᾳ τῶν τύπων (12) θὰ ἔχωμεν:

$D=0,7979.\ (\pm1'',7)=\pm1'',4$ καὶ $W=0,6745.(\pm1'',7)=\pm1'',1$.

Βάσει δὲ τῶν σχέσεων (12') εὑρίσκομεν:

$$m=\frac{5}{4}D=\frac{5}{4}.(\pm1'',4)=\pm1'',75 \text{ καὶ } m=\frac{3}{2}W=\frac{3}{2}.(\pm1'')=\pm1'',5.$$

Οὕτω σχηματίζεται ὁ ἀκόλουθος συγκριτικὸς πίναξ τῶν σφαλμάτων:

	Ἐκ τῆς παρατηρήσεως	Ἐκ τῆς θεωρίας	
m	±1,″7		±1,″75, ±1,″5
D	±1,″4	±1,″4	
W	±1,″0	±1,″1	

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν τριῶν σφαλμάτων δὲν ἀφίστανται ἀλλήλων, ὅπερ σημαίνει ὅτι αἱ μετρήσεις τῶν γωνιῶν εἶναι ἀρκετὰ καλαί. Τὸ γεγονὸς αὐτό, καθὼς ἐπίσης καὶ τὸ ὅτι τὸ [ε] εἶναι ἐγγὺς τοῦ μηδενός, μᾶς δίδουν τὴν δυνατότητα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ σειρὰ τῶν 10 μετρήσεων—μολονότι μικρὰ κατ' ἀριθμὸν—εἶναι ἀπηλλαγμένη συστηματικῶν σφαλμάτων. Ἐπίσης, οὐδὲν ἐπὶ μέρους σφάλμα, ὄχι μόνον δὲν ὑπερβαίνει, ἀλλ' οὐδὲ προσεγγίζει τὸ μέγιστον σφάλμα Μ. Ἑπομένως ὁ βαθμὸς ἀκριβείας αὐτῶν εἶναι ἱκανοποιητικός.

Βασικὴ συνθήκη διὰ τὴν ἰσοστάθμησιν.

Ἂς ἐξετάσωμεν ἤδη γενικώτερον τὸ ζήτημα τῆς εὑρέσεως τῆς πιθανωτέρας τιμῆς, ἀρχίζοντες δι' ἑνὸς παραδείγματος. Ὑποθέσωμεν ὅτι ζητεῖται νὰ παρασταθῇ γραφικῶς καὶ νὰ διατυπωθῇ μαθηματικῶς ἡ σχέσις ἡ ὁποία συνδέει τὴν θερμοκρασίαν τῆς αἰθούσης μὲ τὸ μῆκος τῆς φυσαλλίδος τῆς ἐπιβατικῆς ἀεροστάθμης τοῦ μεσημβρινοῦ τηλεσκοπίου τοῦ Ἀστεροσκοπείου Ἀθηνῶν.

Ἔστω ὅτι δίδεται μία σειρὰ τοιούτων μετρήσεων:

θ/μ	20°	21°	22°	23°	24°	25°	26°	27°
ΔΙΑΙΡΕΣΕΙΣ	43,6	43,0	41,9	38,6	37,5	36,2	35,0	33,1

Ἡ γραφικὴ ἀπεικόνισις (σχ. 7) τῶν τιμῶν τούτων, μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὴν διατύπωσιν μιᾶς σχέσεως τῆς μορφῆς:

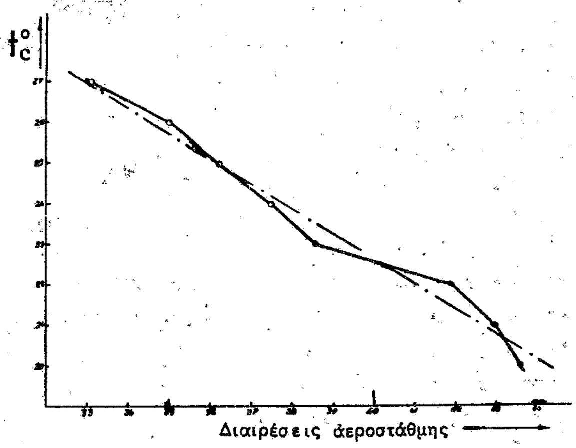
$$T = \sigma(\vartheta, \mu).$$

Προφανῶς **αὕτη** θὰ εἶναι, κατὰ μεγάλην προσέγγισιν, γραμμὴ εὐθεῖα. Διότι, ἐὰν αἱ μετρήσεις ἦσαν ἀπηλλαγμέναι καὶ τῶν τυχαίων σφαλμάτων, τὰ ἀπεικονιζόμενα σημεῖα, θὰ ἔκειντο ἐπὶ μιᾶς εὐθείας γραμμῆς τῆς μορφῆς:

$$A\chi + B\psi + \Gamma = 0$$

Τώρα ὅμως, ὁπότε αἱ μετρήσεις φέρουν τυχαῖα σφάλματα, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι τὰ ἀπεικονιζόμενα σημεῖα «κεῖνται περίπου» ἐπὶ μιᾶς μέσης ἢ πιθανῆς εὐθείας. Ἀλλὰ τίθεται τὸ ἐρώτημα: «Ἐφ' ὅσον ὑπάρχουν ἄπειροι εὐθεῖαι, κατὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον παράλληλοι πρὸς ἑαυτὰς ἐπὶ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι «περίπου κεῖνται» τὰ σημεῖα, ποία ἐξ αὐτῶν εἶναι ἡ καλυτέρα;»

Ὅλαι αἱ εὐθεῖαι αὗται πρέπει, προφανῶς, νὰ πληροῦν τήν:



Σχ. 7

[ἀλγεβρ. υ]=0·

Δηλαδὴ αἱ ἀποστάσεις υ ὅλων τῶν διδομένων σημείων ἀπὸ τῆς ζητουμένης εὐθείας, θὰ ἔχουν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἴσον πρὸς τὸ μηδέν. Προφανῶς δὲ εἰς κάθε μεταβολὴν τῶν β καὶ χ θὰ ἔχωμεν καὶ μίαν εὐθεῖαν, ἥτις θὰ πληροῖ τὴν συνθήκην: [υ]=0. Ἡ συνθήκη ὅμως αὕτη πληροῦται κατὰ προσέγγισιν δι᾿ ἀπείρους τὸν ἀριθμὸν εὐθείας. Διὰ νὰ ἐκλέξωμεν δὲ τὴν καλυτέραν ἐξ αὐτῶν, δέον νὰ πληροῦται καὶ ἄλλη τις συνθήκη. Ποία θὰ εἶναι αὕτη;

Ὁ Pierre Laplace εἰσήγαγε, τὸ 1802, τὴν ἀκόλουθον:

[ἀπόλ. υ] = ἐλάχιστον.

Ἀλλ᾿ ὡς ἤδη διεπιστώσαμεν, ὅταν ἔγινε λόγος περὶ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου σφάλματος, ἡ ὡς ἄνω συνθήκη δὲν δύναται ν᾿ ἀποτελέση ἀσφαλὲς κριτήριον τοῦ ὅτι ἐξελέξαμεν τὴν καλυτέραν ἐκ τῶν ἀνωτέρω εὐθειῶν. Διότι εἰς τὸ παράδειγμα τὸ ὁποῖον ἀνεφέρθη ἐκεῖ, ἐδείχθη ὅτι ἡ ἱκανοποίησις τῆς συνθήκης [ἀπόλ. υ]=ἐλάχ. καὶ ἡ τῇ βοηθείᾳ ταύτης εὕρεσις τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου σφάλματος, δὲν μᾶς καθοδηγοῦν ἀσφαλῶς εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν τὴν καλυτέραν σειρὰν παρατηρήσεων — ἐνταῦθα δὲ δὲν μᾶς δίδουν τὴν αἰτουμένην εὐθεῖαν.

῾Ο Gauss θεωρεῖ ὡς πιθανωτέραν (εὐνοϊκωτέραν) τιμὴν ἐκείνην, ἡ ὁποία παρουσιάζει τὴν μεγαλυτέραν μαθηματικὴν πιθανότητα. Συμφώνως δὲ πρὸς γνωστὴν πρότασιν τοῦ λογισμοῦ τῶν πιθανοτήτων, ἡ πιθανότης διὰ νὰ συμβῇ τοῦτο μεταξὺ πολλῶν ἀνεξαρτήτων ἀλλήλων γεγονότων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἐπὶ μέρους πιθανοτήτων. Πρέπει δηλαδὴ τὸ γινόμενον:

$$\varphi(\upsilon_1)d\upsilon\varphi(\upsilon_2)\,d\upsilon\ldots\varphi(\upsilon_n)\,d\upsilon=\mu\acute{\epsilon}\gamma\iota\sigma\tau o\nu$$

ὅπου $\upsilon_1, \upsilon_2\ldots, \upsilon_n$ εἶναι αἱ διορθώσεις τῶν παρατηρήσεων προκειμένου νὰ ἔχωμεν τὴν εὐνοϊκωτέραν τιμήν.

῾Η σχέσις αὕτη συμφώνως πρὸς τὴν (2′) γράφεται:

$$\frac{h_1\,h_2\ldots h_n}{(\sqrt{\pi}\,)^n}\,e^{-(h_1^2\upsilon_1^2+h_2^2\upsilon_2^2+\ldots+h_n^2\upsilon_n^2)}=\mu\acute{\epsilon}\gamma\iota\sigma\tau o\nu.$$

Λαμβάνομεν δὲ τὸ μέγιστον αὐτῆς, ἂν ἰσχύῃ ἡ συνθήκη:

$$h_1^2\upsilon_1^2+h_2^2\upsilon_2^2+\ldots+h_n^2\upsilon_n^2=\grave{\epsilon}\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\nu.$$

῾Η συνθήκη αὕτη γράφεται καί:

$$\upsilon_1^2+\upsilon_2^2+\ldots+\upsilon_n^2=[\upsilon\upsilon]=\grave{\epsilon}\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\nu, \qquad (13)$$

ἂν θεωρήσωμεν τὰ h^2 ὡς ἀνάλογα τῶν βαρῶν * καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ παρατηρήσεις εἶναι ἴσης ἀκριβείας.

Ἤτοι: «Ζητοῦμεν ὅπως τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν σφαλμάτων νὰ λαμβάνῃ τιμὴν ἐλαχίστην».

῾Η σχέσις αὕτη (13) ἀποτελεῖ: ***«Τὴν βασικὴν συνθήκην τῆς ἰσοσταθμήσεως τῶν παρατηρήσεων διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων»***.

Δυνάμεθα ἐνταῦθα νὰ δείξωμεν ὅτι τοῦτο ἰσχύει καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ᾽ ἣν πρόκειται περὶ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου:

Πράγματι. Ἐκ τῶν γνωστῶν ἐξισώσεων τῶν σφαλμάτων:

$$\begin{array}{c} \upsilon_1=T-t_1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \hline [\upsilon]=nT-[t] \end{array} \qquad (14)$$

(*) Περὶ τοῦ βάρους θὰ γίνῃ λόγος εἰς τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον.

τὰς ὁποίας ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἔχομεν:

$$v_1^2 = T^2 - 2\,Tt_1 + t_1^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_n^2 = T^2 - 2Tt_n + t_n^2$$

$$v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 = nT^2 - 2T\,[t] + [tt]$$

ἢ $\quad [vv] = nT^2 - 2T[t] + [tt] \qquad (14')$

Ἑπομένως, διὰ νὰ ἰσχύῃ ἡ (13), πρέπει ἡ πρώτη παράγωγος τῆς συναρτήσεως (14′) ὡς πρὸς T, νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ μηδέν:

$$\text{Ἤτοι:}\quad \frac{d[vv]}{dT} = 2\,nT - 2\,[t] = 0$$

$$\text{ἢ}\quad T = \frac{[t]}{n}.$$

Ὅθεν καὶ ἡ (14) γίνεται:

$$[v] = n\frac{[t]}{n} - [t] = 0$$

Κατὰ ταῦτα ἡ εἰσαχθεῖσα νέα συνθήκη (13), εὑρίσκεται εἰς συμφωνίαν μὲ τὰς (3) καὶ (1″).

Ἡ μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων παρέχει μονοσημάντους τιμὰς τῶν ἀγνώστων καὶ ἀποδεικνύεται συχνὰ ὡς πρακτικῶς σκόπιμος καὶ εἰς περιπτώσεις καθ' ἃς ὁ νόμος τῶν σφαλμάτων τοῦ Gauss δὲν πληροῦται αὐστηρῶς. Πεῖρα δὲ 100 καὶ πλέον ἐτῶν λέγει ὅτι ἡ μέθοδος αὕτη παρέχει τὰ ἄγνωστα καὶ μέσα σφάλματα μὲ τὴν κατὰ τὸ δυνατὸν ὀλιγωτέραν λογιστικὴν ἐργασίαν καὶ τὴν μεγαλυτέραν δυνατὴν ἀσφάλειαν. Διὰ τοὺς λόγους τούτους ἐξακολουθεῖ νὰ χρησιμοποιῆται διεθνῶς εἰς εὑρεῖαν κλίμακα ὡς ἡ ἁπλουστέρα καὶ πλέον κομψὴ μέθοδος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ.

ΑΠΛΟΥΝ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΟΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΝ ΜΕΣΟΝ

Μέθοδοι ἰσοσταθμήσεως

Ὅταν ἰσοσταθμίζωμεν ἢ ἀφομοιώνωμεν μίαν σειρὰν παρατηρήσεων, δὲν κάμνομεν τίποτε ἄλλο, παρὰ νὰ συσχετίζωμεν τὰς παρατηρήσεις κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν σφαλμάτων αὐτῶν νὰ λαμβάνῃ τιμὴν ἐλαχίστην. Διακρίνομεν κυρίως τρεῖς μεθόδους ἰσοσταθμήσεως.

α) Ἰσοστάθμησιν κατ' εὐθεῖαν γενομένων παρατηρήσεων. Αὗται ὀνομάζονται καὶ ***ἄμεσοι παρατηρήσεις***. (Observations directes, direct observations, unmittelbare Beobachtungen). Ἡ περίπτωσις αὕτη παρουσιάζεται ὅταν τὰ ζητούμενα μεγέθη, π.χ. γωνίαι ἢ μήκη, δύνανται νὰ παρατηροῦνται ἀπ' εὐθείας.

β) Ἰσοστάθμησιν ἐμμέσων παρατηρήσεων. (Observations indirectes, indirect observations, vermittelde Beobachtungen). Ἐὰν π.χ. ἔχωμεν νὰ προσδιορίσωμεν δύο ἢ περισσότερα μεγέθη ἀνεξάρτητα ἀλλήλων, τὰ ὁποῖα δὲν δύνανται ἀπ' εὐθείας νὰ παρατηρηθοῦν, ὅπως εἶναι αἱ συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου. Τότε μετροῦμεν ἄλλα μεγέθη—π.χ. γωνίας καὶ μήκη—καὶ συνδέομεν αὐτὰ μὲ τὰ ζητούμενα διὰ μιᾶς μαθηματικῆς σχέσεως. Αἱ παρατηρήσεις δηλαδὴ παρίστανται ὡς συναρτήσεις τῶν ἀγνώστων μεγεθῶν, τὰ ὁποῖα προκύπτουν δι' ὑπολογισμοῦ. Ἤτοι :

$$t+v=\varphi(x,y,z,\ldots)$$

γ) Ἰσοστάθμησιν ἐξηρτημένων ἢ συμβατικῶν παρατηρήσεων (Observations conditionelles, conditioned observations, bedingte Beobachtungen). Ἡ μέθοδος αὕτη ἐφαρμόζεται ἐπὶ τῶν ἀμέσων ἢ ἐμμέσων παρατηρήσεων, ὅταν μεταξὺ τούτων ὑφίστανται ὡρισμέναι συνθῆκαι, ὅπως π.χ. εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ πληροῦνται ἀκριβῶς ἀπὸ τὰς ἰσοσταθμισθείσας τιμάς. Δηλαδὴ πρόκειται περὶ ἐκείνων τῶν ἐμμέσων παρατηρήσεων, αἱ ὁποῖαι προσδιορίζονται τῇ βοηθείᾳ τῶν ἀπ' εὐθείας γενομένων μετρήσεων, π.χ. ἐκ τῶν σχέσεων :

$$\sigma(X,\ Y,\ T_1,\ T_2,\ldots T_n)=0$$
$$\varphi(X,\ Y,\ T_1,\ T_2,\ldots T_n)=0$$

ἀλλ' αἱ οὕτω προσδιοριζόμεναι τιμαὶ πρέπει νὰ πληροῦν μίαν ἄλλην συνθήκην τήν:

$$f(X, Y) = 0.$$

Ὑπάρχει καὶ ἑτέρα μέθοδος ἰσοσταθμήσεως. Εἶναι ἡ περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ ἔμμεσοι παρατηρήσεις ἢ μετρήσεις δὲν εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀλλήλων, αὕτη ὅμως δὲν παρουσιάζεται συνήθως ἐν τῇ πράξει.

Ἀπ' εὐθείας παρατηρήσεις τῆς ἰδίας ἀκριβείας.

(Ἁπλοῦν ἀριθμητικὸν μέσον)

Ἐὰν ἔχωμεν μίαν σειρὰν μετρήσεων τῆς ἰδίας ἀκριβείας καὶ λάβωμεν τὴν πιθανὴν τιμὴν T, *τοῦ ἁπλοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου*, τὴν διδομένην ὑπὸ τῆς σχέσεως:

$$T = \frac{[t]}{n}$$

αὕτη, δὲν εἶναι ἀπηλλαγμένη σφαλμάτων. Ἕνεκα τούτου σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ M τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ προστίθεται ἀλγεβρικῶς εἰς τὸ T διὰ νὰ ἔχωμεν ἀληθῆ τιμὴν X, τότε θὰ ἰσχύῃ σχέσις:

$$X = T + M$$

Ἤτοι θὰ ἔχωμεν.

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= (T+M) - t_1 = T - t_1 + M = \upsilon_1 + M \\ \varepsilon_2 &= (T+M) - t_2 = T - t_2 + M = \upsilon_2 + M \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_n &= (T+M) - t_n = T - t_n + M = \upsilon_n + M \end{aligned}\right| \qquad (15)$$

Ὑψώνοντες τὰς σχέσεις ταύτας εἰς τὸ τετράγωνον καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη, λαμβάνομεν:

$$[\varepsilon\varepsilon] = [\upsilon\upsilon] + nM^2 + 2M[\upsilon] \qquad (15')$$

καὶ λόγῳ τῆς σχέσεως (1'') $[\upsilon] = 0$, ἔχομεν·

$$[\varepsilon\varepsilon] = [\upsilon\upsilon] + n\,M^2 \qquad (15'')$$

Ἐπειδὴ δὲ ἕκαστος τῶν προσθετέων τῆς (15'') εἶναι ἀριθμὸς πάντοτε θετικός, ἕπεται ὅτι θὰ ἰσχύῃ ἡ ἀνισότης·

$$[\varepsilon\varepsilon] > [\upsilon\upsilon].$$

Μέσον σφάλμα μιᾶς παρατηρήσεως.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν τὰ ἀκόλουθα. Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (8), ὅστις μᾶς δίδει τὸ μέσον σφάλμα δηλαδὴ τόν:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}$$

ἀντὶ τῆς ποσότητος [εε] τεθῇ ἡ ποσότης [υυ], ἤτοι, ἐὰν χρησιμοποιηθοῦν αἱ πιθανώτεραι ἀποκλίσεις υ, ὁ ἀριθμητὴς τῆς οὕτω προκυπτούσης σχέσεως (8′), δηλαδὴ τῆς·

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\upsilon\upsilon]}{n}}$$

γίνεται μικρότερος τῆς πράγματι ἀκριβεστέρας τιμῆς τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ἀληθῶν σφαλμάτων ε. Ἑπομένως, διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ σημαντικῶς ἡ τιμὴ τοῦ μέσου σφάλματος, πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ καὶ ὁ παρανομαστὴς τῆς παραστάσεως αὐτῆς. Ἤδη ὅμως, ὁ προσδιορισμὸς τῆς σχέσεως ἀναγωγῆς, δὲν δύναται νὰ γίνῃ ἄνευ ἀντιρρήσεων, διότι εἰς τὴν (15″) δὲν ἠμποροῦμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἀληθὲς σφάλμα M τῆς μέσης τιμῆς T. Διὰ νὰ ἀντικαταστήσωμεν δὲ εἰς τὴν σχέσιν (8) τὴν ποσότητα [εε] διὰ τῆς [υυ] — ὅπως ἐκάμαμεν κάπως αὐθαιρέτως εἰς τὴν (8′)—ὥστε νὰ εὕρωμεν τὸ μέσον σφάλμα τῆς σειρᾶς τῶν παρατηρήσεων χωρὶς νὰ ἔχωμεν, κατὰ τὸ δυνατόν, οὐδεμίαν οὐσιαστικὴν ἐπίδρασιν εἰς τὸ ἐξαγόμενον, πρέπει εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἀριθμοῦ n νὰ θέσωμεν ἕναν ἄλλον παρανομαστήν, ὅστις νὰ πληροῖ τὰς ἀκολούθους συνθήκας.

α′) Νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ n.

β′) Ὅταν δίδεται μία μόνον παρατήρησις ἢ μέτρησις, ἤτοι ὅταν $n=1$, νὰ ἔχωμεν μίαν ἀπροσδιόριστον τιμὴν διὰ τὸ μέσον σφάλμα, καὶ

γ) Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν παρατηρήσεων αὐξάνῃ, τότε ὁ νέος παρανομαστὴς νὰ συγκλίνῃ πρὸς τὸν n, ἐφ᾽ ὅσον καὶ τὸ $[\upsilon\upsilon] \rightarrow [\varepsilon\varepsilon]$.

Καὶ αἱ τρεῖς αὐταὶ συνθῆκαι πληροῦνται, ὅταν ὡς παρανομαστὴς τεθῇ ὁ $n-1$. Διότι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, θὰ ἔχωμεν:

α′) $n-1<n$

β′) Ἐὰν ἔχωμεν μίαν παρατήρησιν, θὰ ἰσχύῃ: $T=t$, δηλαδὴ $\upsilon=0$ καὶ

$$m^2 = \frac{[\upsilon\upsilon]}{n-1} = \frac{0}{0} = \text{ἀπροσδιόριστον}$$

καὶ γ') Ὅταν τὸ n εἶναι ἀρκούντως μέγα, τότε ἡ T πλησιάζει τὴν ἀληθῆ τιμὴν X, αἱ πιθαναὶ διορθώσεις υ τὰς ἀληθεῖς ε καὶ ὁ (n—1) → n. Ἑπομένως :

$$m^2 = \frac{[\upsilon\upsilon]}{n-1} \backsim \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}$$

Δυνάμεθα, κατ' ἀκολουθίαν, ἀντὶ τῶν ε νὰ χρησιμοποιοῦμεν τὰ υ, ὁπότε, ἀντὶ τοῦ κάπως αὐθαιρέτου τύπου (8'), ἔχομεν τὴν περισσότερον προσεγγίζουσαν πρὸς τὴν πραγματικότητα, σχέσιν :

$$\left.\begin{aligned} m^2 &= \frac{[\upsilon\upsilon]}{n-1} \\ \text{ἢ} \qquad m &= \pm\sqrt{\frac{[\upsilon\upsilon]}{n-1}} \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Ἡ σχέσις αὕτη μᾶς δίδει *τὸ μέσον σφάλμα μιᾶς παρατηρήσεως* (Erreur moyenne d'une observation, mean error of an observation, mittlere Fehler einer Beobachtung).

Ὁ τύπος (16) εὑρίσκεται καὶ ὡς ἑξῆς :

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς σχέσεις (15) καὶ λαμβάνομεν :

$$[\varepsilon] = nM$$

τὴν τιμὴν ταύτην εἰσάγομεν εἰς τὴν (15''), ὁπότε ἔχομεν :

$$[\varepsilon\varepsilon] = [\upsilon\upsilon] + \frac{[\varepsilon]^2}{n} = [\upsilon\upsilon] + \frac{1}{n}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n)^2$$

ἢ

$$[\upsilon\upsilon] = [\varepsilon\varepsilon] - \frac{[\varepsilon]^2}{n} - 2\,\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \cdots + \varepsilon_1\varepsilon_n}{n}$$

Ὁ τελευταῖος ὅρος εἰς τὸ δεύτερον μέρος τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν τὸ n αὐξάνῃ, ὁπότε, ἄν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν σχέσιν (8), ἡ ὡς ἄνω σχέσις γίνεται :

$$[\upsilon\upsilon]=nm^2-m^2=m^2(n-1)$$

$$\text{ἢ} \quad m=\pm\sqrt{\frac{[\upsilon\upsilon]}{n-1}}$$

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἀνωτέρω τιμῶν, π.χ. τῆς T, τοῦ ἀθροίσματος [υυ] κ.λ.π. ἐκ τῶν παρατηρουμένων μεγεθῶν t, ὑπάρχουν διάφοροι πρακτικοὶ τρόποι, οἱ ὁποῖοι δίδουν, μὲ ἀρκετὴν ἀκρίβειαν καὶ συντομίαν, τὸ ζητούμενον ἀποτέλεσμα. Οἱ τρόποι οὗτοι εὑρίσκονται εἰς πλεῖστα βιβλία τῶν ἐφηρμοσμένων ἐπιστημῶν καὶ συνοδεύονται μὲ διάφορα ἀναλυτικὰ παραδείγματα. Ἐπὶ πλέον, ἡ πεῖρα ἑκάστου ἐρευνητοῦ τὸν βοηθεῖ πολὺ συχνὰ εἰς τὸ νὰ εὑρίσκῃ, δι' ἑκάστην ἐπὶ μέρους ἐργασίαν, τὸν καταλληλότερον τρόπον ὑπολογισμοῦ τῶν διδομένων στοιχείων.

Ἀπ' εὐθείας παρατηρήσεις διαφόρου ἀκριβείας.

(Γενικὸν ἀριθμητικὸν μέσον)

Ἡ πιθανωτέρα τιμὴ μιᾶς σειρᾶς παρατηρήσεων, *ἴσης ἀκριβείας*, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (3), τοῦ ἁπλοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου. Ἐὰν ὅμως ἑκάστη τιμὴ t ἔχῃ ἐξαχθῆ μὲ διαφόρους μεθόδους (π.χ. μέτρησις ἑνὸς μήκους δι' ἁπλῆς παρατηρήσεως καὶ μέτρησις δι' ἄλλης συσκευῆς) ἢ ὑπὸ διαφόρων παρατηρητῶν ἢ ὑπὸ μεταβλητὰς μετεωρολογικὰς συνθήκας κ.λ.π., αὗται θὰ διαφέρουν μεταξύ των οὐσιωδοῦς. Ὑπάρχουν ἀκόμη καὶ ἄλλαι περιπτώσεις καθ' ἅς, ἑκάστη μέτρησις ἢ παρατήρησις διαφέρει τῶν ὑπολοίπων μόνον κατὰ τὸ ὅτι εἶναι ἐξαγόμενον διαφορετικοῦ ἀριθμοῦ παρατηρήσεων. Π.χ. εἰς μίαν σειρὰν μετρήσεων ἔχομεν τὰ ἀκόλουθα ἐξαγόμενα :

n_1	φορὰς	ἡ	τιμὴ	t_1
n_2	»	»	»	t_2
.	.	.	.	.
n_n	»	»	»	t_n

Προφανῶς ἡ τιμὴ T *δὲν δίδεται* ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$T=\frac{t_1+t_2\ldots+t_n}{n}$$

ἀλλὰ συμφώνως πρὸς τὴν σχέσιν (3), πρέπει νὰ σχηματίσωμεν τήν :

$$T=\frac{(t_1+t_1+\ldots+t_1)+(t_2+t_2+\ldots+t_2)+\ldots+(t_n+t_n\ldots+t_n)}{n_1+n_2+n_3+\ldots+n_n}=$$

$$=\frac{n_1t_1+n_2t_2+\ldots+n_n t_n}{n_1+n_2+\ldots+n_n}=\frac{[nt]}{[n]} \qquad (17)$$

Αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ $n_1, n_2,\ldots,n_n$, εἶναι ἀπηλλαγμέναι σφαλμάτων καὶ καλοῦνται «βάρος» τῆς παρατηρήσεως, διότι προσδιορίζουν τὴν ἀξίαν τὴν ὁποίαν ἑκάστη τούτων ἔχει. Προφανῶς αἱ τιμαὶ $t_1, t_2,..,t_n$ δὲν εἶναι καθ' αὑτὸ τιμαὶ αἵτινες προκύπτουν ἀπὸ τὰς κατ' εὐθεῖαν παρατηρήσεις, ἀλλὰ μέσαι τιμαί, αἱ ὁποῖαι προέρχονται ἀπὸ ἀπ' εὐθείας παρατηρήσεις, τῆς αὐτῆς ἀκριβείας. Ἐὰν ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι ἔχομεν 6 μετρήσεις $t_1', t_2',..,t_6'$, τὸ ἁπλοῦν ἀριθμητικὸν μέσον δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως :

$$x=\frac{t_1'+t_2'+t_3'+t_4'+t_5'+t_6'}{6}$$

Ἐξ ἄλλου, ἐὰν θεωρήσωμεν δύο ἐπὶ μέρους μέσας ἀριθμητικὰς τιμὰς ἐκ τεσσάρων, καὶ ἀντιστοίχως ἐκ δύο παρατηρήσεων, ἤτοι :

$$t_1=\frac{t_1'+t_2'+t_3'+t_4'}{4} \qquad \text{καὶ } t_2=\frac{t'_5+t'_6}{2}$$

τότε δυνάμεθα εὐκόλως νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν x, χωρὶς νὰ ἀνατρέξωμεν εἰς τὴν σχέσιν τοῦ ἁπλοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου. Ἀρκεῖ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ x ἐκ τῆς ἐξισώσεως :

$$x=\frac{4t_1+2t_2}{4+2}$$

ὅπου οἱ ἀριθμοὶ 4 καὶ 2 δύνανται νὰ χαρακτηρισθοῦν ὡς *βάρη* τῶν παρατηρήσεων.

Ἐὰν ἤδη λάβωμεν τὴν γενικὴν περίπτωσιν καὶ διὰ τῶν T′, T″, T‴,.... παραστήσωμεν τὰς μέσας τιμὰς τῶν ἀπ' εὐθείας μετρήσεων, φαίνεται εὐκόλως ὅτι θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις :

$$T'=\frac{[t']}{n_1},\ T''=\frac{[t'']}{n_2},\ \ldots,\ T^n=\frac{[t^n]}{n_n} \qquad (17')$$

ἔνθα $t_1', t_2', \ldots, t_{n_1}', t_1'', t_2'',\ldots$ εἶναι αἱ ἀπ' εὐθείας τιμαί, καὶ τότε, συμφώνως πάλιν πρὸς τὴν ἐξίσωσιν (3), θὰ ἔχωμεν :

$$T=\frac{(t_1'+t_2'+..+t'_{n_1})+(t_1''+t_2''+..+t''_{n_2})+..(t_1^n+t_2^n+\ldots+t^n_{n_n})}{n_1+n_2+\ldots n_n}=$$

$$=\frac{[t']+[t'']+\ldots+[t^n]}{n_1+n_2+\ldots+n_n}$$

Ἐκ ταύτης δέ, τῇ βοηθείᾳ τῶν σχέσεων (17′) λαμβάνομεν :

$$T=\frac{n_1T'+n_2T''+\ldots+n_nT^n}{n_1+n_2+\ldots+n_n}=\frac{[nT']}{[n]} \qquad (17\alpha)$$

ὅπου T', T'',..... εἶναι αἱ ἐκ τῶν ἀρχικῶν, ἀπ' εὐθείας παρατηρήσεων, προκύπτουσαι ἐνδιάμεσοι μέσαι ἀριθμητικαὶ τιμαὶ καὶ n_1, n_2,...ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀρχικῶς ἐκτελεσθεισῶν μετρήσεων ἢ παρατηρήσεων.

Ὁ τύπος οὗτος (17α) συμφωνεῖ μὲ τὸν (17), ὅταν κάμωμεν ἑρμηνείαν τῶν συμβόλων t_1, t_2,... t_n καὶ T', T'',... T^n καὶ ὡς *βάρη* n θεωρήσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ἴσης ἀκριβείας γενομένων ἀπ' εὐθείας παρατηρήσεων.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον τῶν *«βαρῶν»* n_1, n_2, ... n_n μὲ ἕνα σταθερὸν ἀριθμὸν ϱ, προφανῶς ἡ ὡς ἄνω ἐξαχθεῖσα μέση τιμὴ T, μένει ἀμετάβλητος, διότι ἐκ τῆς (17α), θὰ ἔχωμεν :

$$T=\frac{\varrho n_1T'+\varrho n_2T''+\ldots+\varrho n_nT^n}{\varrho n_1+\varrho n_2+\ldots+\varrho n_n}$$

ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται :

$$T=\frac{p_1T'+p_2T''+\ldots+p_nT^n}{p_1+p_1+\ldots+p_n}=\frac{[pT']}{[p]} \qquad (18)$$

ὅπου ἐτέθη $\varrho n=p$.

Τέλος, ἐὰν θέσωμεν ἀντὶ τῶν T', T'', ... τὰ t_1, t_2 .... t_n, δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὸν τύπον :

$$T=\frac{[pt]}{[p]} \qquad (19)$$

Τὴν σχέσιν ταύτην παριστῶμεν ὡς *τὸ γενικὸν ἀριθμητικὸν μέσον*.

Καὶ εἰς τὴν μερικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ βάρος ὅλων τῶν παρατηρήσεων εἶναι τὸ αὐτό, τότε $n_1=n_2=\ldots=n_n$, ὁπότε ἡ (19) γίνεται :

$$T=\frac{[t]}{n} \qquad (20)$$

Ἰδιότητες τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου.

Αη. ***«Τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν σφαλμάτων ἐπὶ τὰ ἀντίστοιχα βάρη τῶν παρατηρήσεων ἰσοῦται μὲ τὸ μηδέν».***

Ἀπόδειξις : Ἐκ τῆς (19), ἀκολουθοῦντες ἀντίθετον ὁδόν, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ υ. Ἤτοι :

$t_1 + \upsilon_1 = T$, ἑπομένως καί : $\upsilon_1 = T - t_1$
ὁμοίως : $\upsilon_2 = T - t_2$
. . . . . .
$\upsilon_n = T - t_n$

Πολλαπλασιάζοντες ταύτας ἀντιστοίχως ἐπὶ $p_1, p_2, \ldots, p_n$, ἔχομεν :

$$\begin{aligned} p_1 \upsilon_1 &= p_1 T - p_1 t_1 \\ p_2 \upsilon_2 &= p_2 T - p_2 t_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ p_n \upsilon_n &= p_n T - p_n t_n \\ \hline p_1\upsilon_1 + p_2\upsilon_2 + \ldots p_n \upsilon_n &\equiv [p\upsilon] = T\,[p] - [pt] \end{aligned}$$

Καὶ λόγῳ τῆς (19), λαμβάνομεν :

$$[p\upsilon] = 0 \qquad \text{(A)}$$

Ὅταν $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$, αὕτη γίνεται: $[\upsilon] = 0$, δύναται δὲ νὰ χρησιμεύσῃ, διὰ τὸ ἁπλοῦν ἀριθμητικὸν μέσον, ὡς *μέθοδος δοκιμῆς*. Διὰ τὸ γενικὸν ἀριθμητικὸν μέσον, ὡς *δοκιμὴ* δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ (A). Διότι ὅταν εὕρωμεν μέσῳ τῆς T τὰς διορθώσεις υ, πρέπει, πολλαπλασιάζοντες αὐτὰς ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰ βάρη p, νὰ ἔχωμεν ἄθροισμα ἴσον πρὸς τὸ μηδέν.

Βα ***«Τὸ γενικὸν ἀριθμητικὸν μέσον T εἶναι τὸ ζητούμενον ἐκεῖνο μέγεθος τὸ ὁποῖον καθιστᾷ ἐλάχιστον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν σφαλμάτων υ πολλαπλασιασμένων ἐπὶ τὰ ἀντίστοιχα βάρη p».***

Ἤτοι : $[p\upsilon\upsilon]$ = ἐλάχιστον. (B)

Ἀπόδειξις : Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἄγνωστος τιμὴ x, λαμβάνει μίαν ὡρισμένην τιμὴν τοῦ ζητουμένου μεγέθους π.χ. $x = T$. Λαμβάνομεν τότε τὰς διαφορὰς ταύτης ἀπὸ τὰς ἐπὶ μέρους παρατηρήσεις :

$$T - t_i = \upsilon_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Ἐὰν τὰς σχέσεις αὐτὰς τὰς ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον, τὰς πολλαπλασιάσωμεν ἀντιστοίχως ἐπὶ p_i καὶ ἀκολούθως τὰς προσθέσωμεν, θὰ λάβωμεν :

$$T^2\,[p] - 2T\,[pt] + [ptt] = [p\upsilon\upsilon]$$

Διὰ νὰ ἔχῃ δὲ ἡ συνάρτησις αὕτη ἐλάχιστον, πρέπει : «ἡ μερικὴ παράγωγος τοῦ [ρυυ] ὡς πρὸς τὴν ἄγνωστον μεταβλητήν, νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ μηδέν». Δηλαδή:

$$\frac{\partial\,[\rho\upsilon\upsilon]}{\partial\,T} = 2T\,[p] - 2\,[pt] = 0$$

Ἐξ αὐτῆς ἔχομεν τελικῶς:

$$T = \frac{[pt]}{[p]} \qquad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

Τὸ ἀριθμητικὸν μέσον καὶ ἡ ἔννοια τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος.

Ζητοῦμεν, ἐν προκειμένῳ, τὴν μέσην ἀριθμητικὴν τιμὴν *ἀπείρων εἰς ἀριθμὸν μεγεθῶν*, τὰ ὁποῖα, ὑποθέτομεν ὅτι ἀποτελοῦν μίαν συνεχῆ σειράν, οὕτως ὥστε, κάθε ἑπόμενον μέγεθος νὰ διαφέρῃ ἀπὸ τὸ προηγούμενόν του, κατὰ πολὺ μικρὰν ποσότητα. Ἔστω π.χ. ὅτι ζητεῖται ἡ μέση ἡμερησία θερμοκρασία ἑνὸς τόπου ἡ ὁποία μεταβάλλεται συνεχῶς μετὰ τοῦ χρόνου ἢ ἡ μέση ταχύτης ἑνὸς κινητοῦ ἢ ὁ μέσος ἀριθμὸς στροφῶν ἑνὸς δίσκου. Δυνάμεθα νὰ ἐπεκτείνωμεν τὸν τύπον (3) ἢ (20) καὶ εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτάς;

Ἂς δώσωμεν, ἐν πρώτοις, τὴν γεωμετρικὴν ἑρμηνείαν τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου. Πρὸς τοῦτο, χωρίζομεν (σχ. 8) τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων x εἰς ἴσα μέρη ε καὶ λαμβάνομεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν ὀρθογωνίων, $\varepsilon t_1,\ \varepsilon t_2, \ldots, \varepsilon t_n$. Συμφώνως πρὸς τὸν (20), θὰ ἔχωμεν:

$$\mu = \frac{\varepsilon t_1 + \varepsilon t_2 + \ldots + \varepsilon t_n}{n.\varepsilon} \qquad (\Gamma)$$

ὅπου ὁ ἀριθμητὴς εἶναι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἐμβαδῶν καὶ ὁ παρονομαστὴς τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων ὅλων τῶν ὀρθογωνίων. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι:

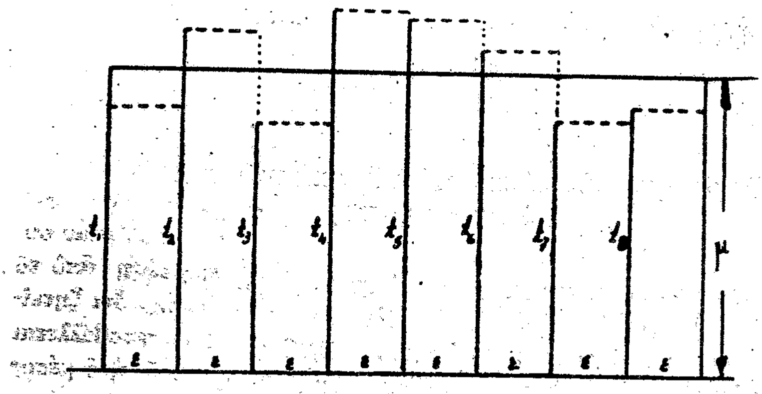
$$n.\varepsilon.\mu = \varepsilon t_1 + \varepsilon t_2 + \ldots + \varepsilon t_n \qquad (\Delta)$$

ἤτοι: «***Τὸ ἀριθμητικὸν μέσον μ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου ἐκείνου, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων τῶν n ἐπὶ μέρους ὀρθογωνίων, τὸ δὲ ἐμβαδόν του, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ὅλων τῶν μεμονωμένων ὀρθογωνίων***».

Ὑποθέτομεν ἤδη ὅτι ζητοῦμεν νὰ μελετήσωμεν τὸ ἀριθμητικὸν μέσον ἀπείρου σειρᾶς ἀριθμῶν. Ἔστω ὅτι δίδεται ἡ συνεχὴς καὶ μονότιμος, εἰς τὸ διάστημα α...β, συνάρτησις:

$$y = f(x)$$

καὶ ζητεῖται ἡ μέση τιμὴ αὐτῆς εἰς τὸ ὡς ἄνω διάστημα.



Σχ. 8

Εἰς τὸ x δίδομεν τιμὰς α, α+dx, α+2dx,....,β, ὁπότε, ἔστω ὅτι αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς συναρτήσεως εἶναι αἱ :

$$y_1, y_2, y_3, \ldots.$$

τῶν ὁποίων ζητοῦμεν τὴν μέσην τιμήν. Κατασκευάζομεν (σχ. 9) τὴν $y=f(x)$ καὶ τὴν αὔξησιν dx τὴν θέτομεν ἴσην μὲ τὸ ε. Τότε, κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τοῦ Ὁλοκληρωτικοῦ Λογισμοῦ, τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ τμήματος τοῦ περιλαμβανομένου μεταξὺ τοῦ ἄξονος τῶν x, τῆς καμπύλης καὶ τῶν τεταγμένων εἰς τὰ σημεῖα x=α καὶ x=β, ἐκφράζεται διὰ τοῦ δεξιοῦ μέρους τοῦ τύπου (Δ), ἂν εἰς αὐτὸν θέσωμεν ἀντὶ τῶν t_1, $t_2 \ldots t_n$, τὰ y_1, $y_2, \ldots, y_n$ καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ $\varepsilon \to 0$. Εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος τοῦ ἰδίου τύπου, ὁ παράγων n.ε παριστᾷ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν dx, ἤτοι τὸ διάστημα β—α. Κατὰ ταῦτα, ἡ (Δ) γίνεται :

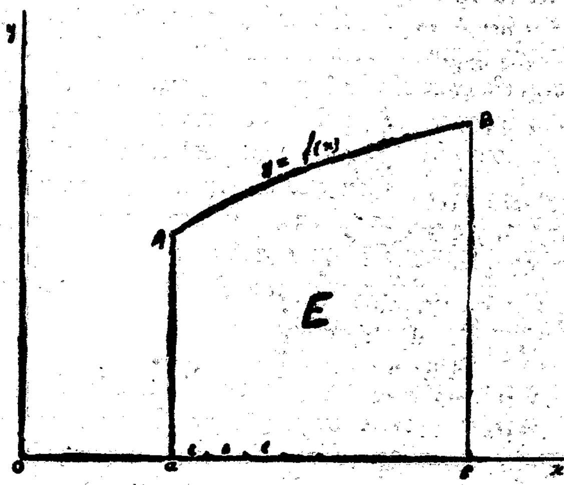
$$(\beta-\alpha)\mu=E \qquad (\Delta')$$

ἐξ ἧς ἕπεται ὅτι : «Τὸ ἀριθμητικὸν μέσον μ τῶν τεταγμένων μιᾶς καμπύλης f(x), μεταξὺ x=α καὶ x=β, εἶναι τὸ ὕψος ἐκείνου τοῦ ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν β—α, τὸ δὲ ἐμβαδόν του ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου α Α Β β, τοῦ χωρίου, δηλαδή, τοῦ περιλαμβανομένου μεταξὺ τοῦ ἄξονος τῶν x, τῆς καμπύλης καὶ τῶν ἄκρων τεταγμένων».

Ἀλλ' ὡς γνωστὸν τό :

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

ἐκ τοῦ ὁποίου συνάγομεν ὅτι :



Σχ. 9

Τὸ ἀριθμητικὸν μέσον μ ὅλων τῶν τιμῶν μιᾶς συνεχοῦς καὶ μονοτίμου συναρτήμεως f (x), αἵτινες ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ διάστημα (α...β), δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως :

$$\mu = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Κατὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου ἀπείρων μεγεθῶν πρέπει αἱ ἀπείρως μικραὶ αὐξήσεις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x, νὰ ἐπιφέρουν ἀπείρως μικρὰς αὐξήσεις εἰς τὰς τιμὰς τοῦ y. Ἐὰν ἡ συνάρτησις δίδεται μόνον γραφικῶς, τότε ἐφαρμόζομεν τὴν πρότασιν τῆς ἐξισώσεως (Δ').

Βάρος τῶν παρατηρήσεων.

Ὅταν ἔχωμεν σειρὰν παρατηρήσεων διαφόρου ἀκριβείας, τότε, προκειμένου νὰ συγκρίνωμεν μεταξύ των τὰς παρατηρήσεις αὐτάς, πρέπει νὰ ἔχωμεν ἕνα μέτρον ἐκτιμήσεως, χαρακτηριστικὸν τῆς ποιότητος ἢ ἀκριβείας αὐτῶν. Καὶ ὡς τοιοῦτον χρησιμοποιοῦμεν τὸ *βάρος τῶν παρατηρήσεων* (Poids des observations, weight of observations, Gewicht der Beobachtungen).

Πρέπει νὰ τονισθῇ ἐνταῦθα ὅτι, δεχόμεθα *ἐκ προτέρου* (a priori) τοῦτο : Μία σειρὰ παρατηρήσεων ἔχει τὸ αὐτὸ βάρος· ὅταν ἐκτελῆται ὑπὸ τὰς αὐτὰς ἀκριβῶς συνθήκας καὶ ὅταν ὅλαι αἱ πιθαναὶ ἐπιδράσεις ἐκδηλοῦνται, εἰς ὅλας τὰς ἐν λόγῳ μετρήσεις, κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον. Κατὰ πόσον ὅμως τοῦτο συμβαίνει εἰς τὴν πραγματικότητα, δὲν δυνάμεθα, παρὰ μόνον ἐξ ὑστέρου (a posteriori) νὰ τὸ ἐξακριβώσωμεν, ὅπως συμβαίνει ὅταν εὑρίσκωμεν τὸ μέσον σφάλμα καὶ συγκρίνωμεν μεταξύ των δύο ἢ περισσοτέρας σειρὰς μετρήσεων. Ὅταν, ἑπομένως, δὲν πληροῦνται ἐπακριβῶς ὅλαι αὐταὶ αἱ προϋποθέσεις, τότε εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸ *βάρος* διὰ νὰ προσδώσωμεν ἀνάλογον ἀξίαν εἰς τὰς παρατηρήσεις.

Ἤδη ὡς ἕνα μέτρον ἐκτιμήσεως δύο ἢ περισσοτέρων σειρῶν παρατηρήσεων καὶ εὑρέσεως τῆς καλυτέρας ἐξ αὐτῶν, ἐχρησιμοποιήσαμεν τὸ μέσον σφάλμα. Διότι ὅσον μικρότερον εἶναι τὸ μέσον σφάλμα τόσον ποιοτικῶς καλυτέρα εἶναι μία σειρὰ παρατηρήσεων. Ἀλλὰ καὶ ὅταν αἱ διδόμεναι τιμαὶ εἶναι ἀθροίσματα διαφόρου ἀριθμοῦ ἀρχικῶν παρατηρήσεων, οἱ ἀριθμοὶ τῶν τοιούτων ἐπαναληπτικῶν μετρήσεων, εἶναι ἤδη ἕνα μέτρον κρίσεως περὶ τῆς ἀκριβείας των. Δηλαδὴ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς βάρος αὐτῶν. Ἐὰν πάλιν, ἔχωμεν ἀρχικὰς μετρήσεις, διαφόρου ἀξίας, ὡς ἐκ τῆς διαφορᾶς π.χ. τῶν ἑκάστοτε χρησιμοποιουμένων ὀργάνων ἢ λόγῳ τῆς διαφορᾶς τῶν ἐξωτερικῶν συνθηκῶν ὑφ' ἃς αὗται ἐξετελέσθησαν, καὶ τότε ἐμφανίζεται ἡ ἀνάγκη τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ βάρους, τὸ ὁποῖον παριστῶμεν διὰ τοῦ p καὶ τὸ ὁποῖον, κατ' ἀνάγκην σχετίζεται μὲ τὰς τιμὰς τῶν t_1, t_2, ..., t_n, ἑπομένως καὶ μὲ τὸ μέσον σφάλμα m.

Τὸ βάρος πρέπει ὁπωσδήποτε νὰ συσχετισθῇ μὲ τὸ μέσον σφάλμα m καὶ μάλιστα μὲ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ. Διότι ὅσον μικρότερον εἶναι τὸ μέσον σφάλμα τόσον μεγαλυτέρα ἡ ἀξία τῆς σειρᾶς τῶν παρατηρήσεων. Ἀλλὰ τὸ m εἶναι ἄλλοτε θετικὸν καὶ ἄλλοτε ἀρνητικόν. Ἕνεκα τούτου ὁρίζομεν ὡς ***«βάρος p μιᾶς παρατηρήσεως τὸ ἀντίστροφον τοῦ τετραγώνου τοῦ μέσου σφάλματος πολλαπλασιασμένον ἐπὶ μίαν ποσότητα σταθεράν»***. Ἤτοι :

$$p=\frac{\mu^2}{m^2} \quad \text{ἢ} \quad \mu=m\sqrt{p} \tag{21}$$

ὅπου μ εἶναι ποσότης σταθερά. Ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐκφράζων τὸ βάρος εἶναι ἀριθμὸς καθαρὸς καὶ ἑπομένως πάντοτε ἄνευ διαστάσεων.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἕπεται ὅτι τὰ βάρη δύο παρατηρήσεων εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τὰ μέσα σφάλματα αὐτῶν. Δηλαδὴ ἔχομεν τὰς σχέσεις :

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{\mu^2}{m_1^2}:\frac{\mu^2}{m_2^2}=\frac{m_2^2}{m_1^2}$$

καὶ γενικώτερον :

$$p_1 : p_2 : \ldots. : p_n = \frac{1}{m_1^2} : \frac{1}{m_2^2} : \ldots. : \frac{1}{m_n^2} \quad (22)$$

Ἐὰν δὲ συσχετίσωμεν ἢ ἀναφέρωμεν ὅλας τὰς παρατηρήσεις εἰς μίαν ἐκ τούτων καὶ εἰς αὐτὴν δώσωμεν βάρος $p=1$, ὀνομάσωμεν δὲ τὸ μέσον σφάλμα αὐτῆς μ, τότε, βάσει τῶν σχέσεων (22), θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{p_1}{1}=p_1=\frac{\mu^2}{m^2}.$$

Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ μ εἶναι τὸ μέσον σφάλμα τῆς παρατηρήσεως πρὸς τὴν ὁποίαν συγκρίνομεν ὅλας τὰς ἄλλας καὶ ἡ ὁποία ἔχει βάρος $p=1$. Μὲ ἄλλους λόγους, θεωροῦμεν μίαν παρατήρησιν, ὡς «κανονικὴν παρατήρησιν» καὶ θέτομεν τὸ βάρος αὐτῆς ἴσον μὲ τὴν μονάδα. Ἡ κανονικὴ παρατήρησις ὀνομάζεται *μονὰς βάρους*, τὸ δὲ μέσον σφάλμα αὐτῆς μ [1] *μέσον σφάλμα τῆς μονάδος βάρους*. (Erreur moyenne de l' unité de poids, mean error of the unit of weight, mittlerer Fehler der Gewichtseinheit)

Παράδειγμα : **Ὑποθέσωμεν ὅτι ἔγιναν δύο σειραὶ μετρήσεων τῆς γωνιώδους ἀποστάσεως δύο σημείων A καὶ B καὶ εὕρομεν τὰς τιμὰς T_1 καὶ T_2, τῶν ὁποίων τὰ μέσα σφάλματα εἶναι : $m_1=\pm 3''$ καὶ $m_1=\pm 6''$. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος τῆς παρατηρήσεως T_1, ὅταν ὡς «μονὰςβάρους» θεωρηθῇ ἡ T_2. Ἤτοι $p_2=1$.**

Ἐφαρμόζοντες τὴν σχέσιν (22), λαμβάνομεν :

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{m_2^2}{m_1^2}. \qquad \text{Καὶ} \quad p_1=\frac{36}{9}=4.$$

---

(1) Ἡ σταθερά μ προσδιορίζεται ὡς ἑξῆς : Ἐκ τῶν σχέσεων (22) λαμβάνομεν γενικώτερον : $p_i . m_i^2 = c$. Εἰς τὴν περίπτωσιν δὲ τῆς κανονικῆς παρατηρήσεως (ὁπότε $p=1$ καὶ $m=\mu$) ἔχομεν : $c=\mu^2$.

Συμπέρασμα : Ἡ παρατήρησις T_1 εἶναι τετράκις ἀκριβεστέρα ἐν συγκρίσει πρὸς τὴν παρατήρησιν T_2.

Ἰδιότης τοῦ βάρους.

«Τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον T μιᾶς σειρᾶς παρατηρήσεων, διαφόρου ἀκριβείας—καὶ ἑπομένως διαφόρου βάρους—εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς μονάδος βάρους».

Ἡ εἰσαγωγὴ ἑκάστοτε τῆς μονάδος βάρους εἶναι προφανῶς αὐθαίρετος, καὶ ἑπομένως, τίθεται τὸ ἐρώτημα μήπως ἡ τοιαύτη ἢ τοιαύτη ἐκλογὴ αὐτῆς, ἐπηρεάζει τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον T, μιᾶς σειρᾶς μετρήσεων. Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι τοῦτο δὲν συμβαίνει.

Πράγματι : Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (18), ἂν εἰς αὐτὴν ἀντικαταστήσωμεν τὰ p τῇ βοηθείᾳ τῶν (22), θὰ ἔχωμεν :

$$T=\frac{[pt]}{[p]}=\frac{\frac{\mu^2}{m_1^2}t_1+\frac{\mu^2}{m_2^2}t_2+\ldots+\frac{\mu^2}{m_n^2}t_n}{\frac{\mu^2}{m_1^2}+\frac{\mu^2}{m_2^2}+\ldots+\frac{\mu^2}{m_n^2}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{m_1^2}t_1+\frac{1}{m_2^2}t_2+\ldots+\frac{1}{m_n^2}t_n}{\frac{1}{m_1^2}+\frac{1}{m_2^2}+\ldots+\frac{1}{m_n^2}}=\frac{\left[\frac{t}{mm}\right]}{\left[\frac{1}{mm}\right]} \qquad (23)$$

Ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν γενικώτερον ὅτι αἱ παρατηρήσεις $t_1, t_2, \ldots, t_n$ τῆς ἐξισώσεως (23), δὲν περιέχουν μόνον διαφόρου μεγέθους σφάλματα $m_1, m_2, \ldots, m_n$, ἀλλὰ καὶ ὅτι καὶ ἑκάστη ἐξ αὐτῶν προῆλθεν ἀπὸ μεταβλητὸν ἀριθμὸν παρατηρήσεων, διαφόρου ἀκριβείας, τότε τὸ βάρος των αὐξάνει ἀντιστοίχως ἀναλόγως πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν τοιούτων ἐπαναληπτικῶν μετρήσεων (βλέπε τύπον 17). Ἑπομένως, δυνάμεθα γενικῶς νὰ εἴπωμεν ὅτι, τὸ βάρος p(1) μιᾶς σειρᾶς n—ἐπαναλη-

---

(1) Πολλάκις ὡς p λαμβάνεται μόνον ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐπαναληπτικῶν μετρήσεων, συνήθως μόνον τὸ ἀντίστροφον τοῦ τετραγώνου τοῦ μέσου σφάλματος, εἰς ἄλλας δὲ περιπτώσεις χρησιμοποιεῖται ὡς τοιοῦτον ἄλλο τι, χαρακτηριστικὸν ὅμως τῆς ποιότητος τῶν ἐκτελουμένων παρατηρήσεων.

πτικῶν παρατηρήσεων μὲ μέσον σφάλμα m, ἰσοῦται πρός :

$$p = \frac{n.\mu^2}{m^2} \qquad (24)$$

καὶ ἡ πιθανωτέρα τιμὴ ἐκ μιᾶς σειρᾶς, διαφόρου ἀκριβείας παρατηρήσεων, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

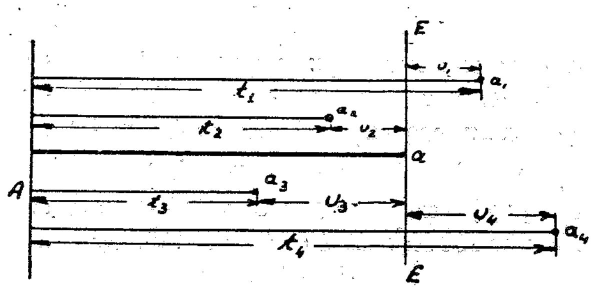
$$T = \frac{[pt]}{[p]} = \frac{\left[\frac{n\mu^2 t}{m^2}\right]}{\left[\frac{n \cdot \mu^2}{m^2}\right]} \qquad (25)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη μᾶς δίδει τὸ γενικὸν ἀριθμητικὸν μέσον. Προφανῶς αἱ (24) καὶ (25) εἶναι αἱ γενικαὶ ἐκφράσεις τῶν : (21) καὶ (17).

Ἐφαρμογαὶ εἰς τὴν Μηχανικήν.

Μερικοὶ ἐκ τῶν τύπων τοὺς ὁποίους εὕρομεν μέχρι τοῦδε, μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ τοὺς δώσωμεν ὡρισμένην ἑρμηνείαν, χρησιμοποιοῦντες ἐννοίας ἐκ τῆς Μηχανικῆς.

Πράγματι, ἐὰν τὰς τιμὰς t_1, t_2, ..., t_n , ἐξ ὧν εὑρίσκεται ἡ μέση ἀριθμητικὴ τιμή, τὰς θεωρήσωμεν ὡς τετμημένας, αἱ ὁποῖαι ἄγονται

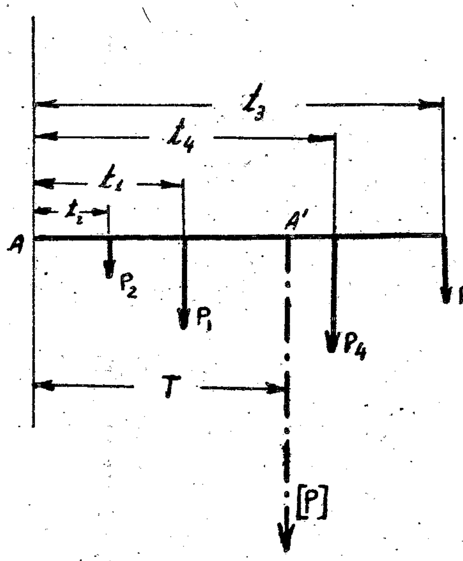


Σχ. 10

καθέτως ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν τεταγμένων, τότε αἱ ἀποκλίσεις υ ἀπὸ τῆς τιμῆς T παριστοῦν (σχ. 10) τὰς τετμημένας τῶν ἄκρων σημείων α_1, α_2, ..., α_n ἐν σχέσει πρὸς τὴν διὰ τῆς κορυφῆς α, τῆς μέσης τετμημένης, ἀγομένην εὐθεῖαν E παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y.

Ἐὰν τὰ α_1, α_2, ..., α_n τὰ θεωρήσωμεν ὡς ὑλικὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ ἴδιον βάρος καὶ μάλιστα ὅτι τοῦτο ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα, ὅλα δὲ αὐτὰ ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς εὐθείας Ε, τότε ἡ σχέσις:

$$\upsilon_1 + \upsilon_2 + \ldots + \upsilon_n = [\upsilon]$$



Σχ. 11

παριστᾷ τὸ ἄθροισμα τῶν στατικῶν ροπῶν τῆς περιστροφῆς περὶ τὴν εὐθεῖαν Ε. Ὅταν δὲ τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἰσοῦται μὲ τὸ μηδέν, σημαίνει ὅτι τὸ σύστημα ἰσορροπεῖ. Ἐν συνεχείᾳ δὲ τὸ ἄθροισμα:

$$\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + \ldots + \upsilon_n^2 = [\upsilon^2]$$

παριστᾷ τὴν ***ροπὴν ἀδρανείας τοῦ συστήματος ὑλικῶν σημείων περὶ ἄξονα τὴν εὐθεῖαν Ε.*** Καὶ ἐφ' ὅσον ἰσχύει ἡ συνθήκη:

$$[\upsilon^2] = \text{ἐλάχιστον}$$

τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ ἄξων Ε διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου βάρους τοῦ ἐν ἰσορροπίᾳ εὑρισκομένου συστήματος ὑλικῶν σημείων.

Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι τὰ $t_1, t_2, \ldots, t_n$ δὲν προέρχονται ἀπὸ μετρήσεις τῆς αὐτῆς ἀκριβείας, δηλαδὴ αἱ τιμαὶ αὗται φέρουν μεθ' ἑαυτῶν βάρη $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Τότε δυνάμεθα (σχ. 11) νὰ θεωρήσωμεν ὅτι τὰ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ εἶναι βάρη μὲ μοχλοβραχίονας τὰ μήκη $t_1, t_2, \ldots, t_n$, ὁπότε αἱ στατικαὶ ῥοπαὶ αὐτῶν εἶναι:

$$p_1 t_1, \; p_2 t_2, \; \ldots, \; p_n t_n.$$

καὶ ἡ σχέσις:

$$T=\frac{[pt]}{[p]}$$

δίδει τὸν μοχλοβραχίονα ἐκεῖνον T ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐφαρμόζεται τὸ ἄθροισμα τῶν βαρῶν—δηλαδὴ παριστᾷ τὴν τεταγμένην τοῦ κέντρου βάρους, καὶ ἡ στατικὴ ροπὴ αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μεμονωμένων στατικῶν ροπῶν. Δηλαδή:

$$]p].T-[pt]=0.$$

Τὸ ἄθροισμα:

$$p_1 \upsilon_1 \upsilon_1 + p_2 \upsilon_2 \upsilon_2 + \dots p_n \upsilon_n \upsilon_n = |p\upsilon\upsilon]$$

παριστᾷ τὴν ροπὴν ἀδρανείας τοῦ συστήματος περὶ ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ A′ καὶ κάθετον πρὸς τὸν AA′. Δηλαδὴ ἡ:

$$[p\upsilon^2]=\text{ἐλάχιστον}$$

λέγει ὅτι: «Ἡ θέσις τοῦ ἄξονος ἐλαχίστης ροπῆς ἀδρανείας τοῦ συστήματος προσδιορίζεται διὰ τῆς ἰσοσταθμίσεως τῶν παρατηρήσεων; ὑπὸ τῆς μέσης τιμῆς T.».

Ὁμοίως τό:

$$p_1\upsilon_1+p_2\upsilon_2+\dots+p_n \upsilon_n=[p\upsilon]$$

εἶναι ἡ *στατικὴ ροπὴ τῶν σημείων* $a_1, a_2, \dots a_n$ ὡς πρὸς ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου βάρους. Αὕτη ὅμως εἶναι μηδὲν κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς Μηχανικῆς. Οὕτως ἐπανευρίσκομεν τὴν σχέσιν:

$$[p\upsilon]=0.$$

Τὸ ἀριθμητικὸν μέσον σφάλμα D, ἰσοῦται πρός:

$$D=\frac{2}{h\sqrt{\pi}}=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \varepsilon\, e^{h^2\varepsilon^2} d\varepsilon.$$

$$\text{Ἄρα } D=\frac{\dfrac{h}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty \varepsilon\, e^{h^2\varepsilon^2} d\varepsilon}{\dfrac{1}{2}}$$

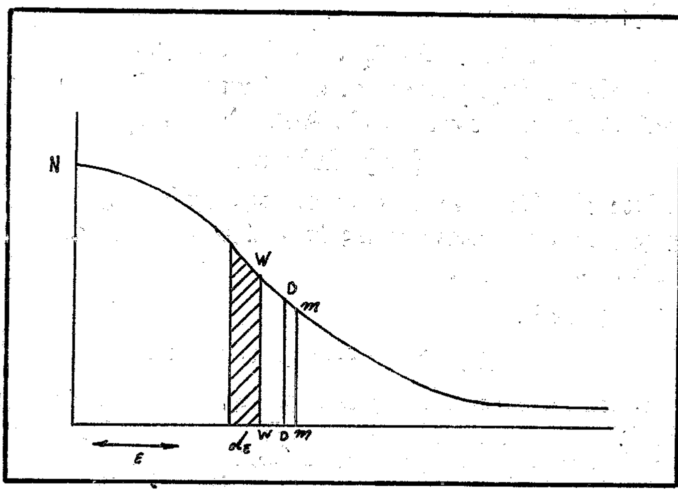
Ἂν λοιπὸν ληφθῇ (σχ. 12) τὸ ἐμβαδὸν τὸ περικλειόμενον ὑπὸ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τῆς καμπύλης τοῦ Gauss ἴσον πρὸς 1, βλέπομεν ὅτι τὸ D εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ κέντρου βάρους τῆς ἐπιφανείας τῆς περικλειομένης ὑπὸ τοῦ ἄξονος τῶν x, τῶν N καὶ τῆς καμπύλης ταύτης.

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν :

$$m^2 = 2\int_0^\infty \varepsilon^2\,\varphi(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{\int_0^\infty \varepsilon^2\,\varphi(\varepsilon)d\varepsilon}{\frac{1}{2}} = \frac{\text{Ροπὴ ἀδρανείας περὶ τὸν ἄξονα N}}{\text{Μάζης}} = \alpha^2,$$

ὅπου α εἶναι ἡ ἀκτὶς ἀδρανείας.

Ἄρα m = ἀκτὶς ἀδρανείας τῆς ὡς ἄνω ἐπιφανείας περὶ τὸν ἄξονα N.



Σχ. 12

Παρατηροῦμεν ἀκόμη, ὅτι τὸ σημεῖον ἀνακάμψεως τῆς καμπύλης τοῦ Gauss ἔχει τετμημένην ἴσην πρὸς m. Πράγματι, διὰ τὸ σημεῖον ἀνακάμψεως $\frac{d^2N}{d\varepsilon^2} = 0$,

$$N = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}, \quad \frac{dN}{d\varepsilon} = -\frac{2h^3\varepsilon}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} \quad \text{καὶ}$$

$$\frac{d^2N}{d\varepsilon^2} = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} + \frac{4h^5\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} = 0,$$

$4h^5\varepsilon^2 = 2h^3$, ἐξ ἧς :

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2h^2} \quad \text{καὶ} \quad \varepsilon = \pm\frac{1}{\sqrt{2}\,h} = \pm m$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'

ΝΟΜΟΙ ΜΕΤΑΔΟΣΕΩΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΒΑΡΟΥΣ

Μετάδοσις τοῦ σφάλματος.

Ἐὰν ἔχωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν μίαν συνάρτησιν δύο ἢ περισσοτέρων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν—καὶ ἐπὶ τοῦ προκειμένου δύο ἢ περισσοτέρων μεγεθῶν τὰ ὁποῖα προσδιορίζονται διὰ μετρήσεων—εἶναι προφανὲς ὅτι τὰ ἐμφιλοχωροῦντα εἰς τὰς παρατηρήσεις σφάλματα, θὰ μεταδοθοῦν καὶ εἰς τὸ μέγεθος τὸ ὁποῖον θὰ προκύψῃ ἐκ τῆς ἐν λόγῳ συναρτήσεως. Μὲ ἄλλους λόγους, αἱ τυχὸν ἀνακρίβειαι αἱ ὁποῖαι συνοδεύουν τὰς ἀρχικὰς μετρήσεις ἐπιδροῦν οὐσιωδῶς, ὥστε τὸ ἐξαγόμενον τελικῶς μέγεθος, νὰ περιέχῃ καὶ αὐτὸ σφάλμα.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ὕψος ἑνὸς πύργου καὶ ἔχομεν εἰς τὴν διάθεσίν μας 12 μετρήσεις τῆς ὁριζοντίου ἀφ' ἡμῶν ἀποστάσεως αἱ αὐτοῦ καὶ 8 μετρήσεις τῆς γωνίας B_κ ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ἡ κορυφή του. Τότε τῇ βοηθείᾳ τῆς σχέσεως:

$$x=\alpha_0 \varepsilon\varphi B_0,\ \text{ὅπου}\ \alpha_0=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_{12}}{12}$$

$$\text{καὶ}\qquad B_0=\frac{B_1+B_2+\ldots+B_8}{8}$$

εὑρίσκομεν τὸ ὕψος x.

Ἐφ' ὅσον ὅμως τὰ α_0 καὶ B_0 περιέχουν σφάλματα, καὶ τὸ ἐκ τῆς ὡς ἄνω σχέσεως, δι' ὑπολογισμοῦ, προκῦπτον ὕψος x θὰ ἔχῃ καὶ αὐτὸ ἕνα σφάλμα. Ἐὰν m_1 εἶναι τὸ μέσον σφάλμα τῶν α_i, καὶ m_2 τὸ μέσον σφάλμα τῶν B_κ, ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ *μέσον σφάλμα* m_x τὸ *ὁποῖον μετεδόθη εἰς τὸ ὑπολογισθησόμενον ποσὸν* x. Τὸ πρόβλημα εἶναι γενικώτερον καὶ χρήζει λεπτομερεστέρας ἐξετάσεως προκειμένου νὰ εὕρωμεν τὸν *νόμον τῆς μεταδόσεως τοῦ σφάλματος*.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι γενικώτερον ἔχομεν τὴν συνάρτησιν:

$$x=\varphi(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n) \tag{26}$$

ὅπου t_1, t_2, ..., t_n εἶναι τὰ μετρηθέντα μεγέθη, ε_1, ε_2, ..., ε_n τὰ ἀληθῆ σφάλματα αὐτῶν, τότε ἐκ τῆς:

$$x+\delta=\varphi(t_1+\varepsilon_1,\ t_2+\varepsilon_2,\ldots,\ t_n+\varepsilon_n)$$

εὑρίσκομεν τὴν ἀληθῆ τιμὴν τῆς συναρτήσεως.

Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὰ σφάλματα $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ εἶναι πολὺ μικρά, ἀναπτύσσομεν εἰς σειρὰν Taylor, εἰς τὴν ὁποίαν παραλείπομεν τὰς δυνάμεις δευτέρας τάξεως καὶ ἀνωτέρας, ὁπότε τὸ συνολικὸν σφάλμα τὸ ὁποῖον μετεδόθη εἰς τὴν συνάρτησιν x, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\delta=\varphi(t_1+\varepsilon_1,\ t_2+\varepsilon_2, \ldots, t_n+\varepsilon_n)-\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

$$\delta=\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}\varepsilon_1+\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}\varepsilon_2+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial t_n}\varepsilon_n=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\varepsilon\right]^{(1)} \qquad (27)$$

Ἐὰν ἤδη φαντασθῶμεν ὅτι αἱ παρατηρήσεις ἐπαναλαμβάνονται ν φοράς, τότε προκύπτουν ν διάφορα σφάλματα, $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\nu$ τῆς συναρτήσεως φ. Ἐκ τῶν παρατηρήσεων τούτων—βάσει τῆς γνωστῆς ἤδη ἐννοίας τοῦ μέσου σφάλματος—ὁρίζομεν τὸ μέσον σφάλμα m_x τῆς συναρτήσεως x, τὸ ὁποῖον δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως:

$$m_x^2=\frac{[\delta\delta]}{\nu}=\frac{1}{\nu}\sum_1^\nu\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\varepsilon\right]^2 \qquad (28)$$

Εἰς αὐτήν, ἐὰν ἐκτελέσωμεν ὅλας τὰς πράξεις, καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς συνδυασμοὺς τῶν σημείων τοῦ ε καὶ κάμωμεν τὰς ἀναγκαίας ἀπαλοιφάς—, τὰ γινόμενα $\varepsilon_i.\varepsilon_\varkappa$ $(i\neq\varkappa)$, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν παρατηρήσεων εἶναι πολὺ μεγάλος, ἀλληλοεξουδετεροῦνται—θὰ ἔχωμεν τελικῶς:

$$m_x^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}\right)^2\frac{[\varepsilon_1\varepsilon_1]}{\nu}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}\right)^2\frac{[\varepsilon_2\varepsilon_2]}{\nu}+\ldots+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_n}\right)^2\frac{[\varepsilon_n\varepsilon_n]}{\nu}$$

Εἰς τὴν σχέσιν δὲ αὐτήν, ἂν θέσωμεν:

$$m_1^2=\frac{[\varepsilon_1\varepsilon_1]}{\nu},\quad m_2^2=\frac{[\varepsilon_2\varepsilon_2]}{\nu},\ \ldots m_n^2=\frac{[\varepsilon_n\varepsilon_n]}{\nu}$$

λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$m_x^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}\right)^2 m_1^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}\right)^2 m_2^2+\ldots+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_n}\right)^2 m_n^2=\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 m^2\right] \quad (29)$$

Ὁ τύπος οὗτος (29) μᾶς δίδει «τὸ μέσον σφάλμα τὸ μεταδιδόμενον εἰς μίαν συνάρτησιν φ». Ἢ ἀκόμη: «ἀποτελεῖ τὴν ἀναλυτικὴν ἔκφρασιν τοῦ σφάλματος μιᾶς ποσότητος προσδιορισθείσης δι' ἐμμέσων παρατηρήσεων».

1) Ὁ τύπος οὗτος δίδει, ὡς γνωστόν, τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως φ.

Νόμος μεταδόσεως τοῦ βάρους.

Ἐὰν ἐνθυμηθῶμεν τὴν ἐξίσωσιν (21), ἥτις μᾶς δίδει τὴν σχέσιν τοῦ βάρους μιᾶς παρατηρήσεως ὡς πρὸς τὸ μέσον σφάλμα αὐτῆς, ἤτοι τήν:

$$m_i = \mu : \sqrt{p} \qquad (i=1, 2 \ldots, n)$$

τότε, ἐξ αὐτῆς καὶ τῆς (29), λαμβάνομεν:

$$m_x = \mu \sqrt{\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 \cdot \frac{1}{p}\right]}$$

Ἡ ὑπὸ τὴν ῥίζαν παράστασις ὀνομάζεται *συντελεστὴς τοῦ βάρους τῆς συναρτήσεως* x.

Ἐὰν τὸν ὁρισμὸν τοῦ βάρους τὸν ἐφαρμόσωμεν εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ τύπου (29), θὰ ἔχωμεν τὸν ἀκόλουθον τύπον ὅστις ἐκφράζει *τὸν νόμον τῆς μεταδόσεως τοῦ σφάλματος.*

$$\frac{1}{p_x} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{p_1} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_2}\right)^2 \cdot \frac{1}{p_2} + \ldots \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_n}\right) \cdot \frac{1}{p_n} \qquad (30).$$

Ὅταν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις x εἶναι ἄθροισμα n παρατηρήσεων ἴσης ἀκριβείας τότε ἡ (26) λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$x = t_1 + t_2 + \ldots + t_n \qquad (26\alpha)$$

ὁπότε, ὅλαι αἱ παράγωγοι $\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t_2}$, ..., $\frac{\partial \varphi}{\partial t_n}$ θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὴν μονάδα. Καὶ ἐπειδὴ τὰ μέσα σφάλματα: $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$, ἡ (29) γίνεται:

$$m_x{}^2 = n.m^2 \quad \text{ἢ} \quad m_x = \pm m\sqrt{n} \qquad (29\alpha)$$

Ἤτοι: ***«Τὸ μέσον σφάλμα ἑνὸς ἀθροίσματος παρατηρήσεων ἴσης ἀκριβείας αὐξάνει ἀναλόγως τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ τῶν παρατηρήσεων».*** (1)

Καὶ ἐὰν γενικώτερον δίδεται ἡ σχέσις:

$$x = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 + \ldots + \alpha_n t_n \qquad (26\beta)$$

ὅπου α_1, α_2,...,α_n εἶναι δεδομένοι ἀριθμοὶ μὲ τοὺς ὁποίους πολλαπλα-

---

(1) Ἡ πρότασις αὕτη ἰσχύει, προφανῶς, καὶ ὅταν τὸ ἄθροισμα περιέχει καὶ ἀρνητικοὺς ὅρους.

σιάζονται ἀντιστοίχως οἱ ἐκ τῶν παρατηρήσεων προκύπτοντες: $t_1, t_2, \ldots, t_n$, μὲ μέσα σφάλματα: $m_1, m_2, \ldots, m_n$, θὰ ἔχωμεν:

$$m_x = \pm\sqrt{(\alpha_1 m_1)^2 + (\alpha_2 m_2)^2 + \ldots + (\alpha_n m_n)^2}$$

ὑποτιθεμένου δὲ ὅτι· $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$ τότε·

$$m_x = \pm m\sqrt{[\alpha\,\alpha]} \qquad (29\beta)$$

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ συνάρτησις x εἶναι τῆς μορφῆς:

$$x = \frac{t_1}{n} + \frac{t_2}{n} + \ldots + \frac{t_n}{n} \qquad (26\gamma)$$

δηλαδή, ὅταν ζητοῦμεν τὸ μέσον σφάλμα m_x τῆς ἀριθμητικῆς μέσης τιμῆς n ἰσοβαρῶν παρατηρήσεων, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$m_x^2 = \frac{1}{n^2}m^2 + \frac{1}{n^2}m^2 + \ldots + \frac{1}{n^2}m^2 = \frac{n}{n^2}m^2 = \frac{m^2}{n}$$

$$\text{καὶ} \quad m_x = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[\upsilon\upsilon]}{n(n-1)}} \qquad (29\gamma)$$

Ἤτοι: ***«Τὸ μέσον σφάλμα τῆς μέσης ἀριθμητικῆς τιμῆς εἶναι κατὰ $\sqrt{n}$ φορὰς μικρότερον τοῦ μέσου σφάλματος μιᾶς μεμονωμένης παρατηρήσεως».***

Στηριζόμενοι εἰς τὴν σχέσιν (29γ) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν κατ' ἄλλον τρόπον τὴν κατὰ προσέγγισιν ἔκφρασιν τοῦ μέσου σφάλματος μιᾶς μεμονωμένης παρατηρήσεως (16), ἤτοι τὸ τύπον

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\upsilon\upsilon]}{n-1}}$$

ὡς ἑξῆς:

Εἰς τὴν γνωστὴν σχέσιν (15΄΄), ἤτοι τήν:

$$[\varepsilon\varepsilon] = [\upsilon\upsilon] + n\,M^2$$

τὸ M εἶναι ἡ διαφορὰ ἀληθοῦς τιμῆς καὶ ἀριθμητικοῦ μέσου, δηλαδὴ ἡ X—T. Πρόκειται ἐνταῦθα περὶ ποσοῦ πολὺ μικροῦ ἐν συγκρίσει πρὸς τὰ σφάλματα $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_n$, τὸ ὁποῖον, εἰς τὴν ὡς ἄνω σχέσιν δὲν ἀσκεῖ αἰσθητὴν ἐπίδρασιν. Ἕνεκα τούτου, ἀντικαθιστῶμεν τὸ M, διὰ τοῦ μέσου σφάλματος m_x τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου, τὸ ὁποῖον εἶναι τῆς αὐτῆς τάξεως μέγεθος, μὲ τὸ ἀληθὲς σφάλμα. Δυνάμεθα ἑπομένως, κατὰ προσέγγισιν, νὰ γράψωμεν:

$$[\varepsilon\varepsilon] = n\,m_x^2 + [\upsilon\upsilon]$$

Καὶ σύμφωνα πρὸς τὸν ὁρισμὸν (8), $[\varepsilon\varepsilon]=n.m^2$ καὶ τὴν σχέσιν (29γ), λαμβάνομεν :

$$n.m^2 = m^2 + [\upsilon\upsilon] \quad \text{ἢ} \quad (n-1)\,m^2 = [\upsilon\upsilon]$$

Ἐξ αὐτῆς δὲ εὑρίσκομεν :

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\upsilon\upsilon]}{n-1}}$$

Παράδειγμα 1ον. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ 12 μετρήσεις τῆς ὁριζοντίου ἀποστάσεως α τοῦ προμνημονευθέντος πύργου ἔδωσαν τὸ ἐξαγόμενον 30,278m μὲ μέσον σφάλμα $m_\alpha = \pm 4$ mm, αἱ δὲ 8 μετρήσεις τῆς γωνίας B, τὴν τιμὴν $42^0\,12'\,26''$ μὲ μέσον σφάλμα : $m_B = \pm 2''$. *Ποῖον τὸ πιθανὸν ὕψος τοῦ πύργου καὶ ποῖον τὸ μέσον σφάλμα τὸ γινόμενον εἰς τὸν προσδιορισμὸν αὐτόν ;* Εὑρίσκομεν :

$$x = \alpha \;\text{εφ}\; B = 30{,}278 \;\text{εφ}\; (42^0\,12'\,26'') = 27{,}461 \text{ m.}$$

Μετατρέποντες τὸ m_B'' εἰς ἀκτίνια καὶ ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον (29), λαμβάνομεν :

$$m_x{}^2 = (\text{εφ}\, B)^2\, m_\alpha{}^2 + \left(\frac{\alpha}{\text{συν}^2 B}\right)^2 m_B{}^2 \text{ημ}^2 1'' = (0{,}82260 \times 16 + \frac{1670{,}07}{206265^2} \times 4) \text{ mm}$$

$$\text{καὶ} \quad m_x = \pm 3{,}6 \text{ mm.}$$

Παράδειγμα 2ον. *Ὑποθέσωμεν ὅτι ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ὕψος BH=α ἑνὸς σημείου B,* διὰ μετρήσεως τῆς ζενιθίας ἀποστάσεως αὐτοῦ Z, ὅταν τὸ μῆκος AB=ρ εἶναι γνωστὸν ἐκ τοῦ τριγωνισμοῦ.

Ἂν αἱ συντεταγμέναι τοῦ B′ εἶναι (ρ+dρ, Z+dZ), ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ σχ. 13 θὰ ἔχωμεν :

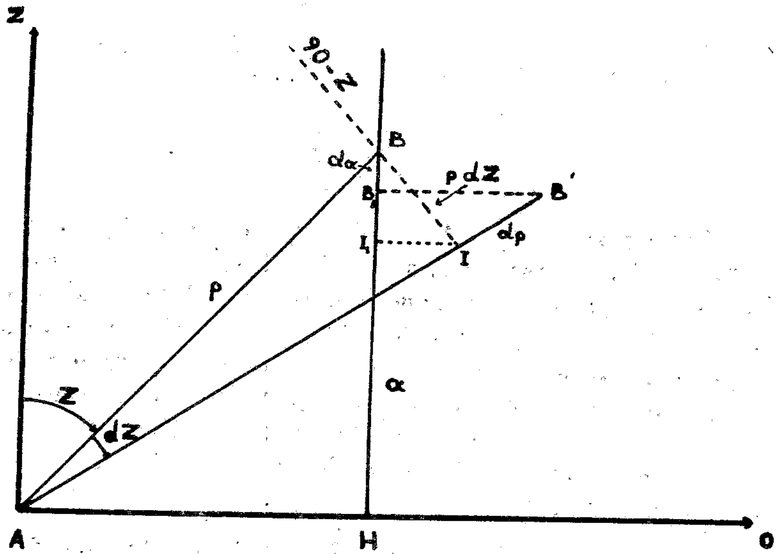
$$\alpha = \rho\,\text{συν}Z$$

$$d\alpha = d\rho\,\text{συν}Z - dZ\rho\,\text{ημ}Z.$$

Λαμβάνοντες τὰς προβολάς τοῦ B ἐπὶ τῆς AB′ καὶ τοῦ B′ καὶ I ἐπὶ τῆς κατακορύφου BH, τότε τὸ σφάλμα dρ παρίσταται ὑπὸ τοῦ τμήματος BB_1, ὅπερ εἶναι ἡ διαφορὰ $BI_1 - I_1B_1$. Ἐὰν δὲ παραλείψωμεν εἰς τὰς ἐκφράσεις αὐτὰς τὰς ποσότητας $d\rho^2$, dZ^2 καὶ $d\rho dZ$, ἔχομεν :

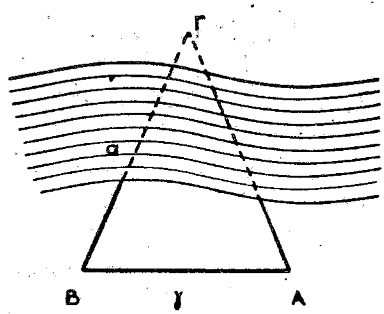
$$BI_1 = \rho\, dZ\,\text{ημ}Z$$

$$I_1B_1 = d\rho\,\text{συν}Z.$$



Σχ. 13

Παράδειγμα 3ον. Ζητοῦμεν τὴν ἀπόστασιν ΒΓ ἑνὸς ἀπροσίτου σημείου Γ (σχ. 14). Ἀρκεῖ νὰ μετρήσωμεν τὰς γωνίας Α καὶ Β καὶ τὴν πλευρὰν γ. Ἔστω δὲ ὅτι ἐμετρήθησαν τὰ στοιχεῖα ταῦτα καὶ ὅτι ἔχουν μέσα σφάλματα ἀντιστοίχως: m_A, m_B, m_γ. *Ποῖον τὸ μέσον σφάλμα* m_α, *τὸ ὁποῖον θὰ μεταδοθῇ κατὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἀποστάσεως α=ΒΓ;*



Σχ. 14

Ἡ γνωστὴ σχέσις:

$$\alpha = \gamma \, \frac{\eta\mu\, A}{\eta\mu\,(A+B)},$$

εἰς τὴν ὁποίαν τὰ μετρηθέντα μεγέθη Α, Β καὶ γ περιέχουν σφάλματα, θὰ μᾶς δώσῃ τὸ ζητούμενον μῆκος, ἐξ αὐτῆς δέ, συμφώνως πρὸς τὸν τύπον (29) θὰ εὕρωμεν τὸ m_α.

Λογαριθμίζομεν καὶ διαφορίζομεν:

$$\log \alpha = \log \gamma + \log \eta\mu\, A - \log \eta\mu\, (A+B)$$

$$d\alpha = \alpha \left(\frac{d\gamma}{\gamma} + \sigma\varphi\; A \;\; dA - \sigma\varphi\; (A+B).d(A+B) \right)$$

καὶ ἐπειδὴ αἱ Γ καὶ A+B εἶναι γωνίαι παραπληρωματικαί,

$$d\alpha = \alpha \left(\frac{d\gamma}{\gamma} + (\sigma\varphi\; A + \sigma\varphi\; \Gamma)\; dA + \sigma\varphi\; \Gamma dB \right)$$

Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν τὰς μερικὰς παραγώγους:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial A} = \alpha\, (\sigma\varphi\, A + \sigma\varphi\; \Gamma), \quad \frac{\partial \alpha}{\partial B} = \alpha d\sigma\varphi\Gamma.$$

Καὶ τὸ ζητούμενον σφάλμα mα, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύποι

$$m_\alpha = \pm \alpha \sqrt{\left(\frac{m_\gamma}{\gamma} \right)^2 + (\sigma\varphi\; A + \sigma\varphi\; \Gamma)^2 m_A{}^2 + \sigma\varphi^2\Gamma.\; m_B{}^2}$$

Ὅταν ἡ πλευρὰ γ δὲν περιέχει σφάλμα ($m_\gamma = o$), τότε:

$$m_\alpha = \pm \alpha \sqrt{(\sigma\varphi\; A + \sigma\varphi\; \Gamma)^2\, m_A{}^2 + \sigma\varphi^2\, \Gamma.\, m_B{}^2}$$

ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ὅτι αἱ γωνίαι A καὶ B ἐμετρήθησαν μετὰ τῆς αὐτῆς ἀκριβείας, ἐὰν δηλαδὴ $m_A = m_B = m$, τὸ m_α δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως:

$$m_\alpha = \pm \alpha\, m \sqrt{(\sigma\varphi\; A + \sigma\varphi\; \Gamma)^2 + \sigma\varphi^2\, \Gamma.}$$

Παράδειγμα 4ον. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἀπὸ n ἴσης ἀκριβείας, παρατηρήσεις. Ἐκ τῆς σχέσεως (19):

$$x = \frac{[pt]}{[p]} = \frac{p_1 t_1}{[p]} + \frac{p_2 t_2}{[p]} + \ldots + \frac{p_n\, t_n}{[p]}$$

λαμβάνομεν:

$$\frac{1}{p_x} = \left(\frac{p_1}{[p]} \right)^2 \frac{1}{p_1} + \left(\frac{p_2}{[p]} \right)^2 \frac{1}{p_2} + \ldots + \left(\frac{p_n}{[p]} \right)^2 \frac{1}{p_n} =$$

$$= \frac{p_1 + p_2 + \ldots p_n}{(p_1 + p_2 + \ldots p_n)}$$

$$\text{καὶ } p_x = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$$

Ἤτοι : *«Τὸ βάρος τοῦ συνόλου τῶν παρατηρήσεων, τοῦ γενικοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βαρῶν τῶν μεμονωμένων παρατηρήσεων».*

Εἰς μερικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$, τότε $p_x = np$, δηλαδή : «Τὸ βάρος τοῦ ἁπλοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου εἶναι κατὰ n φορὰς μεγαλύτερον τοῦ βάρους τῆς μεμονωμένης παρατηρήσεως». Ἐὰν δὲ $p = 1$, τότε $p_x = n$. Ἤτοι : «Τὸ βάρος ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν παρατηρήσεων» ἢ *μία παρατήρησις βάρους* p *εἶναι τόσον καλῆς ποιότητος, ὅσον* p *τὸν ἀριθμὸν παρατηρήσεις βάρους 1.*

Παράδειγμα 5ον. Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν πορείαν τοῦ μέσου σφάλματος τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου, τὸ ὁποῖον, τόσον ρόλον παίζει εἰς τὴν θεωρίαν τοῦ Gauss. Νὰ παραστήσωμεν, δηλαδή, γραφικῶς τὴν σχέσιν (29γ)

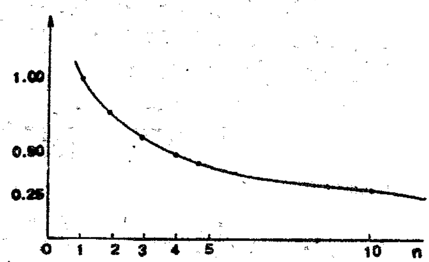
$$m_x = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[\upsilon\upsilon]}{n(n-1)}}$$

ὑποτιθεμένου ὅτι ἔχομεν μακρὰν σειρὰν ἰσοβαρῶν παρατηρήσεων. Ἂς ὑποθέσωμεν λοιπὸν ὅτι : $n = 1, 2, \ldots, 200$.

Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐπαναλήψεων καὶ τῆς μέσης τιμῆς; Σχηματίζομεν τὸν πίνακα:

$n =$	1	2	3	4	5	10	20	50	100	200
$m_x = \frac{1}{\sqrt{n}} =$	1,00	0,71	0,58	0 50	0,45	0,32	0,22	0,14	0,10	0,07

Ἐὰν λάβωμεν (σχ. 15) τὸν ἄξονα τῶν n, ὡς ἄξονα τῶν τετμημένων, ὡς ἄξονα δὲ τῶν m_x, τὸν ἄξονα τῶν τεταγμένων, θὰ ἔχωμεν τὴν παραπλεύρως γραφικὴν παράστασιν.



Σχ. 15

Καθὼς φαίνεται ἐκ τῆς πορείας τῆς καμπύλης, ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος τῶν τιμῶν n καὶ m_x, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν παρατηρήσεων εἶναι μικρὸς τὸ μέσον σφάλμα τῆς ἐξ αὐτῶν ἐξαγομένης μέσης ἀριθμητικῆς τιμῆς ἐλαττοῦται ταχέως, καθ' ὅσον ὁ n αὐξάνει. Ὅταν ὅμως ὁ ἀριθμὸς τῶν μετρήσεων αὐξηθῇ αἰσθητῶς, τότε τὸ m_x μεταβάλλεται πολὺ βραδέως, εἰς τρόπον ὥστε ἡ καμπύλη νὰ πλησιάζῃ ἀσυμπτωτικῶς τὸν ἄξονα τῶν n. Ὑπάρχει λοιπὸν εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν παρατηρήσεων ἕνα, οὕτως εἰπεῖν, ὅριον πέραν τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμὸς οὗτος δὲν παίζει σπουδαῖον ρόλον εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου. Ἤτοι, ***«τὸ μέσον σφάλμα τῆς ἀριθμητικῆς μέσης τιμῆς, πέραν ὡρισμένου ἀριθμοῦ παρατηρήσεων, παραμένει περίπου σταθερόν, ἔστω καὶ ἂν ἐπαναληφθοῦν ἐπὶ πολὺ αἱ μετρήσεις αὗται».***

Ἐξαρτᾶται ἑπομένως ἀπὸ τὸ εἶδος τῆς ἐργασίας τὴν ὁποίαν ἐκτελοῦμεν, διὰ νὰ ἀρκεσθῶμεν π.χ. εἰς τὰς 5 ἢ 10 ἢ καὶ 20 ἐπαναληπτικὰς μετρήσεις ἢ παρατηρήσεις. Καί, προκειμένου νὰ ἐπιτύχωμεν ἀκριβέστερα ἐξαγόμενα, θὰ πρέπῃ τότε νὰ στρέψωμεν τὴν προσοχήν μας εἰς τὴν βελτίωσιν τῶν συνθηκῶν παρατηρήσεως ἢ εἰς τὴν τελειοποίησιν τῶν ὀργάνων ἢ τὴν καθ' οἱονδήποτε ἄλλον τρόπον ποιοτικὴν αὔξησιν τῆς ἀκριβείας τῆς ἐκτελουμένης ἐργασίας, οὐχὶ δὲ εἰς τὴν συνεχῆ ἐπανάληψιν τῶν μετρήσεων.

Γενικοὶ τύποι μέσου σφάλματος καὶ βάρους.

Ἐὰν αἱ μετρήσεις τὰς ὁποίας ἐκτελῶμεν, δὲν εἶναι τῆς αὐτῆς ἀκριβείας, εἶναι προφανὲς ὅτι, προκειμένου νὰ εὕρωμεν τὸ μέσον σφάλμα μιᾶς παρατηρήσεως ἢ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου, δὲν δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τοὺς τύπους (8) καὶ (8΄) ἢ (16). Εἶναι ἀνάγκη νὰ εἰσαγάγωμεν καὶ τὴν ἔννοιαν τοῦ βάρους.

Ἀποδεικνύεται ὅτι, ὅταν ἔχωμεν μίαν σειρὰν παρατηρήσεων μὲ βάρη $p_1, p_2, \ldots, p_n$ καὶ ἀληθῆ σφάλματα $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, τὸ *σφάλμα τῆς μονάδος βάρους* δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[p\varepsilon\varepsilon]}{n}} \qquad (36)$$

τὸ δὲ *μέσον σφάλμα τῆς τιμῆς T* ὑπὸ τοῦ :

$$M^2 = \frac{\mu^2}{[p]} = \frac{[p\varepsilon\varepsilon]}{n[p]} \qquad (37)$$

Ἐὰν ἤδη τὰς σχέσεις (15) τὰς πολλαπλασιάσωμεν ἀντιστοίχως ἐπὶ $p_1, p_2, \ldots, p_n$, ἡ (15΄) θὰ λάβῃ τὴν μορφήν :

$$[p\varepsilon\varepsilon] = [pvv] + M^2[p] + 2M[pv] \qquad (38)$$

Τὸ μέγεθος M εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς ἀληθοῦς τιμῆς καὶ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου, ἑπομένως μᾶς εἶναι ἄγνωστον. Δι' αὐτὸ θέωροῦμεν τὸ M ὡς μέσον σφάλμα καὶ τὴν τιμὴν αὐτοῦ (37) τὴν εἰσάγομεν εἰς τὴν (38). Αὕτη, λόγῳ τῆς (31), γίνεται :

$$[p\varepsilon\varepsilon] = [pvv] + M^2 [p] \qquad (38')$$

Ἐὰν εἰς αὐτὴν ἀντικαταστήσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ M ἐκ τῆς (37), ἐν συνδυασμῷ μὲ τὴν (36), θὰ λάβωμεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$[p\varepsilon\varepsilon] = [pvv] + \frac{[p\varepsilon\varepsilon]}{n[p]} \cdot [p]$$

$$\text{καὶ} \quad [p\varepsilon\varepsilon] = \frac{n}{n-1} [pvv]$$

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης λαμβάνομεν :

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} \qquad (39)$$

Ὁ τύπος οὗτος μᾶς δίδει *τὸ μέσον σφάλμα τῆς μονάδος βάρους εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ γενικοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου.*

Ἐὰν τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ μ εἰσαγάγωμεν εἰς τὴν (21), θὰ λάβωμεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}} = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{(n-1)\,p_i}} \qquad (40)$$

διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν *τὸ μέσον σφάλμα μιᾶς παρατηρήσεως βάρους* p_i .

Τέλος, εἰσάγοντες τὴν τιμὴν τοῦ μ εἰς τὴν (37), θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν :

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{(n-1)\,[p]}} \qquad (41)$$

ἥτις μᾶς παρέχει *τὸ μέσον σφάλμα τῆς μέσης ἀριθμητικῆς τιμῆς ἐξαγομένης ἐκ σειρᾶς παρατηρήσεων, διαφόρου ἀκριβείας.*

Εἰς τὰς τρεῖς αὐτὰς ἐξισώσεις περιλαμβάνεται ὁλόκληρος ἡ θεωρία τῶν σφαλμάτων εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς γενικῆς μέσης ἀριθμητικῆς τιμῆς.

Παράδειγμα 1ον. Ὑποθέσωμεν ὅτι κατὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ζενιθίας ἀποστάσεως ἀστέρων, τὸ ὄργανον δίδει μέσον σφάλμα $m = \pm 3''$. *Ποῖος ὁ ἀριθμὸς n τῶν παρατηρήσεων αἱ ὁποῖαι χρειάζονται προκειμένου νὰ εὑρεθῇ ἡ μέση τιμὴ τῆς ὁποίας τὸ μέσον σφάλμα* m_x *νὰ ἰσοῦται πρὸς* $+0'',6$;

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (29γ) τὰς γνωστὰς τιμάς, λαμβάνομεν :

$$0{,}36 = \frac{9}{n} \quad \text{καὶ} \quad n = 25$$

Ἑπομένως, ὅταν ἐκτελέσωμεν 25 προσδιορισμοὺς τῆς ζενιθίας ἀποστάσεως ἕκαστος τῶν ὁποίων νὰ ἔχῃ ἀκρίβειαν $\pm 3''$, τότε εἰς τὸ ἀριθμητικὸν μέσον θὰ ἔχωμεν ἀκρίβειαν $\pm 0'',6$.

Παράδειγμα 2ον. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἐκ παρατηρήσεων 5 ἀστέρων, προσδιωρίσθησαν ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ γεωγραφικοῦ πλάτους Ἀθηνῶν καὶ ἑτέραν ἑσπέραν παρατηρήθησαν ἓξ ἀστέρες καὶ εὑρέθησαν ἰσάριθμοι τιμαὶ τοῦ φ. *Ζητεῖται τὸ μέσον σφάλμα ἑκάστης παρατηρήσεως* (m), *τὸ μέσον σφάλμα τῆς μέσης ἀριθμητικῆς τιμῆς* (m_x), *ἡ πιθανωτέρα τιμὴ τοῦ φ, ἐπὶ πλέον δὲ νὰ γίνῃ σύγκρισις τῶν δύο σειρῶν παρατηρήσεων.*

Σειρὰ Αη t	υ	υυ	*Σειρὰ Βα* t	υ	υυ
1. $\varphi = 37^0\ 58'\ 19.''5$	$+0.''06$	0,0036	$\varphi = 37^0\ 58'\ 19.''9$	$-0.2''0$	0,04
2. 19.5	$+0.06$	0,0036	19.8	-0.10	0,01
3. 19.6	-0.04	0,0016	19.9	-0.20	0,04
4. 19.7	-0.14	0,0196	19.6	$+0.10$	0,01
5. 19.5	$+0.06$	0,0036	19.5	$+0.20$	0,04
			19.5	$+0.20$	0,04
Ἄθροισμα	0.00	0,0320		0.00	0,18
Μέσον $37^0\ 58'\ 19''.56$			$37^0\ 58'\ 19''.70$		

$$m_1 = \pm\sqrt{\frac{[\upsilon\upsilon]}{n-1}} = \sqrt{\frac{0{,}032}{4}} = \pm 0''.09 \qquad m_2 = \sqrt{\frac{0{,}18}{5}} = \pm 0''.19$$

$$m_{\alpha_1} = \sqrt{\frac{[\upsilon\upsilon]}{n(n-1)}} = \frac{0{,}09}{\sqrt{5}} = \pm 0''.04 \qquad m_{\alpha_2} = \frac{0{,}19}{\sqrt{6}} = \pm 0''.08$$

Πιθανωτέρα τιμή :

$$\varphi_1 = 37^0\ 58'\ 19''.56 \pm 0{,}04, \qquad \varphi_2 = 37^\circ\ 58'\ 19''.70 \pm 0''.08$$

Ὑποτίθεται ὅτι αἱ παρατηρήσεις εἶναι τῆς ἰδίας ἀκριβείας καὶ ὅτι ἐχρησιμοποιήθη τὸ ἴδιον ὄργανον. Συγκρίνοντες τὰς δύο σειράς, βλέπομεν ὅτι ἡ παρατήρησις τῆς πρώτης ἡμέρας δίδει ἀκριβέστερον ἐξαγόμενον ἀπὸ τὴν δευτέραν. Ἑκάστη ἐκ τῶν 5 μεμονωμένων παρατηρήσεων παρουσιάζει $m = \pm 0''.09$, ἐνῷ ἑκάστη ἐκ τῶν 6 τῆς δευτέρας σειρᾶς $m = \pm 0''.19$. Ἐὰν τώρα θέλωμεν νὰ συνδυάσωμεν τὰς δύο τιμὰς φ_1 καὶ φ_2 καὶ ἐξ αὐτῶν νὰ εὕρωμεν τὴν περισσότερον πιθανήν, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ ***ἀριθμητικὸν μέσον αὐτῶν*** φ_μ, καθὼς ἐπίσης καὶ τὸ *μέσον σφάλμα* M τῆς μέσης τιμῆς. Ἐφ' ὅσον ὁ παρατηρητὴς εἶναι ὁ ἴδιος, τὸ ὄργανον τὸ αὐτὸ καὶ αἱ ἴδιαι κατὰ προσέγγισιν καιρικαὶ συνθῆκαι, διὰ τοῦτο, ἀντὶ ἄλλης ποιοτικῆς ἀξιολογήσεώς των, **θὰ κάμωμεν τὴν ἑξῆς: θὰ θεωρήσωμεν ὡς βάρη p_1 καὶ p_2 τῶν φ_1 καὶ** φ_2 τοὺς ἀριθμοὺς 5 καὶ 6 τῶν ἀστέρων οἵτινες παρατηρήθησαν.

Ἐφαρμόζομεν τάς:

$$T=\frac{[pt]}{[p]} \text{ καὶ } M=\pm\sqrt{\frac{[p\upsilon\upsilon]}{(n-1)[p]}}$$

καὶ ἔχομεν τὸν πίνακα:

$37^0\ 58'\ldots$	p	p.φ	υ	υυ	pυυ
$\varphi_1=\ldots\ 19''.56$	5	97''.80	+0,08	0,0064	0,0320
$\varphi_2=\ldots\ 19.70$	6	118.20	—0,06	0,0036	0,0216
	[p] 11	[pφ] 216.00			[pυυ] 0,0536

$$T=\frac{[p\varphi]}{[p]}=37^0\ 58'+\frac{216''.00}{11}=37^0\ 58'\ 19'',64$$

$$\text{καὶ} \quad M=\sqrt{\frac{[p\upsilon\upsilon]}{(n-1)[p]}}=\sqrt{\frac{0,0536}{1.11}}=\sqrt{0,0049}=\pm0'',07.$$

Ἑπομένως, ἡ πιθανωτέρα τιμὴ τοῦ πλάτους εἶναι:

$$\varphi_\mu=37^0\ 58'\ 19'',64\pm0'',07.$$

Ἡ τιμὴ αὕτη εὑρίσκεται πάντοτε μεταξὺ φ_1 καὶ φ_2.

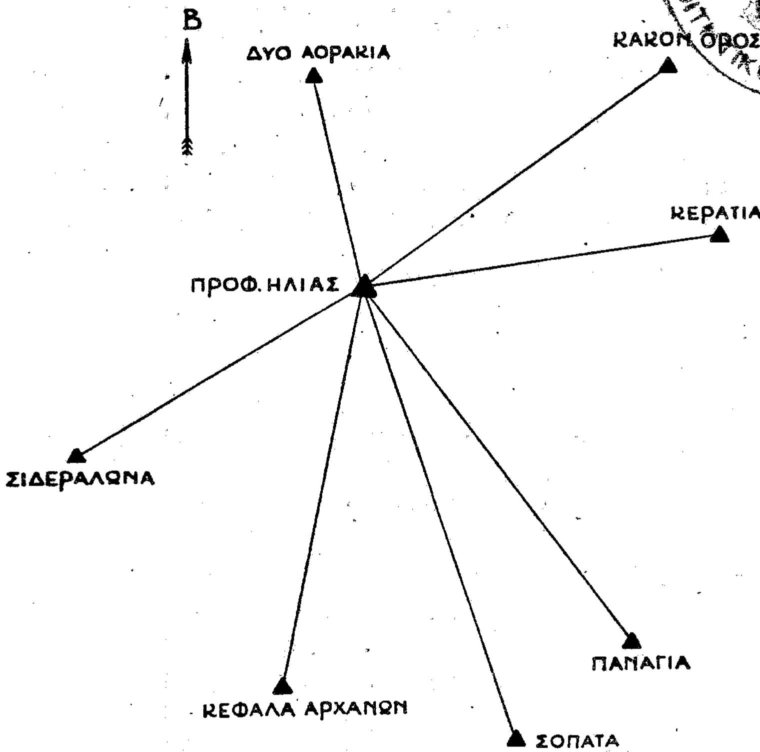
Εἰς περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ ἀστρονομικαὶ παρατηρήσεις δὲν ἔγιναν ὑπὸ τοῦ ἰδίου παρατηρητοῦ, τοῦ ἰδίου ὀργάνου καὶ ὑπὸ τὰς αὐτὰς περίπου καιρικὰς συνθήκας, τότε θὰ πρέπῃ κατ' ἄλλον τρόπον νὰ ἀξιολογηθοῦν, προκειμένου νὰ εὕρωμεν τὴν μέσην τιμὴν τῶν φ_1 καὶ φ_2. Ἐπειδὴ ἐνταῦθα σημασίαν ἔχει ὁ λόγος τῶν τιμῶν p_1 καὶ p_2 καὶ οὐχὶ αὐτὰ καθ' ἑαυτά, διὰ τοῦτο λαμβάνομεν:

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{m^2_{\alpha_2}}{m^2_{\alpha_1}}=\frac{(\pm0,08)^2}{(\pm0,04)^2}=\frac{0,0064}{0,0016}=\frac{4}{1}$$

καὶ προχωροῦμεν εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν ζητουμένων.

Παράδειγμα 3ον. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ, δι' ὑπολογισμοῦ, τὸ ὑπὲρ τὴν μέσην στάθμην ὕψος τοῦ σημείου: Προφήτης Ἠλίας ἐν

Κρήτη, (σχ. 16) ὅταν δίδωνται τὰ ὕψη καὶ αἱ ἀπ' αὐτοῦ ἀποστάσεις τῶν σημείων : Δύο 'Αοράκια, Κακὸν Ὄρος, Κερατιά, Παναγία, Σόπατα, Κεφάλα 'Αρχάνων καὶ Σιδεράλωνα.[1]



Σχ. 16

'Εκφράζοντες τὰ ὕψη εἰς μέτρα καὶ τὰς ἀποστάσεις α εἰς χιλιόμετρα, σχηματίζομεν τὸν πίνακα :

	ὕψος	διαφ. ὕψ.	ὑπ. ὕψ. (Y+t)	ἀποσ. α
Δύο 'Αοράκια—Προφ. 'Ηλίας	134.02	+ 164.94	298.96	2.740
Κακὸν Ὄρος » »	167.68	+ 131.24	298.92	4.813
Κερατιὰ » »	253.87	+ 45.01	298.88	4.638
Παναγία » »	303.98	— 4.97	299.01	5.703

(1) Τὰ στοιχεῖα τοῦ παραδείγματος τούτου, παρεχωρήθησαν λίαν εὐγενῶς ὑπὸ τῆς Γεωγραφικῆς 'Υπηρεσίας Στρατοῦ.

Σόπατα	»	»	338.35 — 39.38	298.97	6.089
Κεφάλα Ἀρχάνων	»	»	420.04 — 121.10	298.94	5.193
Σιδεράλωνα	»	»	287.55 + 11.39	298.94	4.166

Ἁπλοῦν ἀριθμ. μέσον=298.96

Ἐδέχθημεν ὅτι τὰ 7 ὕψη εἶναι ἐλεύθερα σφαλμάτων καὶ ἀμετάβλητα. Ἀλλ' εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς θεωρίας τῶν τριγωνομετρικῶν ὑψομετρήσεων ὅτι, τὰ μέσα σφάλματα εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῶν διαφορῶν ὕψους εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἀνάλογα τῶν ἀποστάσεων α. Δυνάμεθα ἑπομένως νὰ θέσωμεν ὡς βάρη p τὰ ἀντίστροφα τῶν α^2, δηλαδή :

$p=\frac{1}{\alpha^2}$, ἐκτελοῦντες δὲ τοὺς ὑπολογισμοὺς ἔχομεν :

$p=\frac{1}{\alpha^2}$:	0,133	0,043	0,046	0,031	0,027	0,037	0,058
t :	0,96	0,92	0,88	1,01	0,97	0,94	0,94
pt :	0,1279	0,0397	0,0409	0,0311	0,0262	0,0349	0,0542

$$x=\frac{[pt]}{[p]}=\frac{0,355}{0,375}=0,95$$

Καὶ ἐκ τοῦ πίνακος :

Y	t	υ=0,95—t	pυ	pυ²
298	+0,96	—0,01	—0,0013	0,0000
	+0,92	+0,03	+0,0013	0,0000
	+0,88	+0,07	+0,0032	0,0002
	+1,01	—0,06	—0,0019	0,0001
	+0,97	—0,02	—0,0005	0,0000
	+0,94	+0,01	+0,0004	0,0000
	+0,94	+0,01	+0,0006	0,0000
			+0,0055	0,0003
			—0,0037	
		Δοκιμὴ	[pυ]	

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[p\upsilon^2]}{n-1}}=\pm\sqrt{\frac{0,0003}{6}}=\pm0,007, \qquad M=\frac{\mu}{\sqrt{[p]}}=\pm0,011$$

Ἑπομένως, ἡ τελικὴ τιμὴ τοῦ ὕψους τοῦ Προφήτου Ἠλία εἶναι :

$$Y+x=298,00\mu+0,95\mu=298,95\pm0,01\mu.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'.

ΕΞΕΤΑΣΙΣ ΕΙΔΙΚΩΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ

Ἀπομόνωσις τῶν συστηματικῶν σφαλμάτων.

Ἐλέχθη εἰς τὸ α'. κεφάλαιον ὅτι τὰ συστηματικὰ σφάλματα ἄλλοτε ἔχουν χαρακτῆρα σταθερόν, δηλαδὴ ἐπαναλαμβάνονται πάντοτε τὰ αὐτά, ἄλλοτε ὅμως ὁ χαρακτήρ των εἶναι περιοδικός, διότι ἐπανέρχονται τὰ αὐτὰ καθ' ὡρισμένας περιόδους. Ἄς θεωρήσωμεν ἐνταῦθα τὴν περίπτωσιν τῶν σταθερῶν συστηματικῶν σφαλμάτων.

Ἔστω σειρὰ μετρήσεων $t_1, t_2, \ldots, t_n$ μιᾶς ἀληθοῦς ποσότητος x, μὲ τυχαῖα σφάλματα $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, ἀριθμητικὴν μέσην τιμὴν T καὶ ἕν σταθερὸν συστηματικὸν σφάλμα c. Διὰ προσθέσεως τῶν σχέσεων :

$$ti - x = \varepsilon i + c$$

λαμβάνομεν,

$$\Sigma ti - nx = -n(T - x) = \Sigma \varepsilon i + nc \qquad (42)$$

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ σφάλμα ε τὸ συναγόμενον ἐκ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου T, ὅτι εἶναι ἐν μέρει τυχαῖον καὶ ἐν μέρει συστηματικόν, τότε εἰσάγοντες τό :

$$T - x = \varepsilon$$

εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν, ἔχομεν :

$$n\varepsilon = \Sigma \varepsilon i + nc.$$

Ὑψώνοντες ταύτην εἰς τὸ τετράγωνον, λαμβάνομεν:

$$n^2\varepsilon^2=(\Sigma\varepsilon i)^2+n^2c^2+2nc\Sigma\varepsilon i=$$

$$=\Sigma\varepsilon i^2+R+n^2c^2+2ncs \qquad (42')$$

ὅπου $R=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon i\varepsilon j \quad (j=i)$ καὶ $s=\Sigma\varepsilon i$.

Ἐφ' ὅσον τὰ τυχαῖα σφάλματα εi εἶναι θετικὰ ἢ ἀρνητικά, τὸ R δύναται νὰ ὑποτεθῇ ὅτι εἶναι πολὺ μικρόν, τὸ ἴδιον δὲ δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν καὶ διὰ τὸ s. Ἐὰν διὰ τοῦ m_α παραστήσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ε ὅταν τὰ R καὶ s εἶναι ποσότητες ἀμελητέαι καὶ ἐὰν διὰ τοῦ m παραστήσωμεν τὸ μέσον σφάλμα τὸ σχετιζόμενον μὲ τὰ τυχαῖα σφάλματα, τὸ ὁποῖον δίδεται ὑπὸ τῆς (8), τότε ἡ (42') γίνεται:

$$m^2_\alpha=\frac{m^2}{n}+c^2 \qquad (42'')$$

Αἱ μετρήσεις ti περιέχουν τὸ σταθερὸν σφάλμα c, κατὰ συνέπειαν τὸ ἴδιον σταθερὸν σφάλμα θὰ περιέχῃ καὶ τὸ ἀριθμητικὸν μέσον. Τὰ υi παριστοῦν, ὡς γνωστόν, τὰ πιθανὰ σφάλματα, ὁπότε τὸ m δίδεται ὑπὸ τῆς (16) καὶ εἶναι:

$$m^2=\frac{[\upsilon\upsilon]}{n-1},$$

εἰς τὴν παράστασιν δὲ αὐτὴν δύναται νὰ ὑπάρχῃ ἢ μή, τὸ σταθερὸν σφάλμα. Λόγῳ τῆς τελευταίας σχέσεως ἡ (42'') λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$m^2_\alpha=\frac{[\upsilon\upsilon]}{n(n-1)}+c^2$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης σχέσεως βλέπομεν ὅτι, ὅσον καὶ ἂν αὐξήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν παρατηρήσεων μὲ τὸν σκοπὸν νὰ ἐλαττώσωμεν τὴν ἐπίδρασιν τῶν τυχαίων σφαλμάτων, καὶ ἐπομένως νὰ ἔχωμεν ἀκριβέστερα ἐξαγόμενα, ἡ τιμὴ τοῦ m^2_α δὲν γίνεται μικροτέρα τοῦ c^2. Διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν, ἐξ ἄλλου, μίαν ἀξιόπιστον τιμὴν τοῦ ζητουμένου ἀγνώστου μεγέθους ἢ ποσοῦ, ὅταν ὑποψιαζώμεθα ὅτι ὑπάρχει συστηματικὸν σφάλμα, εἶναι ἀναγκαῖον ἐν πρώτοις νὰ κάμωμεν μίαν συστηματικὴν σειρὰν παρατηρήσεων ἢ μετρήσεων μὲ τὸν σκοπὸν νὰ ἀποτιμήσωμεν τὸ σταθερὸν σφάλμα c καὶ ἀκολούθως νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ c ἀπὸ μίαν ἕκαστην ἐκ τῶν μετρήσεων $t_1, t_2, .., t_n$.

Διαφοραὶ παρατηρήσεων.

Ὅταν ἐκτελῶμεν ἀπ' εὐθείας παρατηρήσεις n διαφόρων μεγεθῶν καὶ λαμβάνομεν ἐξ ἑκάστου μίαν μόνον τιμήν, π.χ. $t_1, t_2, ..., t_n$, δὲν δυνάμεθα, προφανῶς, νὰ συγκρίνωμεν αὐτὰς μεταξύ των. Ἐὰν ὅμως ἐκτελέσωμεν καὶ μίαν ἀκόμη σειρὰν παρατηρήσεων, τῆς ἰδίας ἀκριβείας καὶ λάβωμεν : $t'_1, t'_2, ..., t'_n$, δηλαδὴ ὅταν ἔχωμεν διπλᾶς παρατηρήσεις ἐξ ἑκάστου μεγέθους, τότε ἀναμφιβόλως δυνάμεθα νὰ συσχετίσωμεν τὰ ζεύγη ταῦτα μεταξύ των. Μὲ ἄλλους λόγους, εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτάς, προκειμένου νὰ ἐκφέρωμεν κρίσιν περὶ τῆς ἀκριβείας τῶν τοιούτων παρατηρήσεων, εὑρίσκομεν τὰς μεταξὺ αὐτῶν διαφοράς, τὰς ὁποίας καὶ συγκρίνομεν πρὸς ἀλλήλας. Δηλαδὴ χρησιμοποιοῦμεν, ἀντὶ τῶν πιθανῶν σφαλμάτων υ, *τὰς διαφορὰς τῶν παρατηρήσεων* καὶ αὐτὰς συσχετίζομεν. Καὶ τὸν τοιοῦτον τρόπον τῆς θεωρήσεως τῶν παρατηρήσεων εἰσήγαγε τὸ πρῶτον, τὸ 1869, ὁ Ph. Jordan. (1)

Ἔστω ὅτι μετρῶμεν δὶς διάφορα μήκη ἢ ἀποστάσεις κατὰ τὴν χωροστάθμισιν. Τότε δυνάμεθα νὰ συσχετίσωμεν τὰ ζεύγη τῶν τοιούτων παρατηρήσεων, σχηματίζομεν δὲ οὕτω τὰς διαφοράς :

$$d_i = t'_i - t_i \qquad (i=1, 2, ... n) \qquad (43)$$

ὅπου διὰ τῶν d παριστῶμεν τὰς διαφορὰς τῶν ζευγῶν σφαλμάτων :

$$d_i = \upsilon_i - \upsilon'_i \qquad (i=1, 2, ..., n)$$

τὰ ὁποῖα ἐμφιλοχωροῦν εἰς τὰς μετρήσεις t'_i καὶ t_i.

Ἐὰν αἱ παρατηρήσεις ἦσαν ἐλεύθεραι σφαλμάτων, αἱ διαφοραὶ d_i θὰ εἶχον τιμὴν μηδέν. Τοῦτο ἀσφαλῶς δὲν συμβαίνει ἐν γένει, εἶναι ὅμως βέβαιον ὅτι αἱ διαφοραὶ $d_1, d_2, ..., d_n$ ἔχουν τὸν χαρακτῆρα τῶν

(1) Τὴν μέθοδον ταύτην ἐπεξέτειναν ἀκολούθως οἱ Andrae καὶ Helmert ἀνεξαρτήτως δὲ αὐτῶν καὶ τοῦ Jordan, ὁ Bréget, τὸ 1881, τὴν ἐπρότεινε πρὸς προσδιορισμὸν τῆς μεταπτώσεως.

ἀληθῶν σφαλμάτων τῶν παρατηρήσεων. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, τὸ *μέσον σφάλμα τῆς διαφορᾶς*, τὸ συναγόμενον ἐκ τῶν ἐπὶ μέρους τιμῶν τῶν d_i —καὶ τὸ ὁποῖον παριστῶμεν διὰ τοῦ m_α —, εὑρίσκεται ἀκριβῶς κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον καθ' ὃν τὸ $\mathbf{m}$ ἐκ τῶν ε. Καὶ εἰς τὴν γενικήν, ἑπομένως, περίπτωσιν καθ' ἣν ἔχομεν n ζεύγη τοιούτων παρατηρήσεων μὲ βάρη ἀντιστοίχως: $p_1, p_2, \ldots, p_n$, τότε, συμφώνως πρὸς τὸν τύπον (36), θὰ ἔχωμεν:

$$m_d = \sqrt{\frac{[pdd]}{n}} \qquad (44)$$

Ἡ σχέσις αὕτη μᾶς δίδει εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν τὸ *μέσον σφάλμα μιᾶς διαφορᾶς παρατηρήσεων.*

Προκειμένου ἤδη ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης (44) νὰ εὕρωμεν τὸ μέσον σφάλμα m μιᾶς παρατηρήσεως t, ἀκολουθοῦμεν τὴν ἰδίαν, ὡς καὶ προηγουμένως ὁδόν. Ὑποθέτομεν, δηλαδή, ὅτι αἱ ἀρχικαὶ μεμονωμέναι παρατηρήσεις εἶναι τῆς αὐτῆς ἀκριβείας καὶ τὸ βάρος των εἶναι: $p=1$. Τότε ἐκ τῆς σχέσεως:

$$x = t_1' - t_1$$

βάσει τοῦ τύπου (29), τῆς μεταδόσεως τοῦ μέσου σφάλματος, λαμβάνομεν:

$$m_d{}^2 = m^2 + m^2 = 2\,m^2 \qquad (44')$$

ἢ καὶ λόγῳ τῆς ὡς ἄνω σχέσεως:

$$m = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \pm\sqrt{\frac{[pdd]}{2n}} \qquad (45)$$

Ὁ τύπος οὗτος μᾶς δίδει τὸ *μέσον σφάλμα μιᾶς παρατηρήσεως.*

Εἰς μερικὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὰ ζεύγη τῶν παρατηρήσεών t_i καὶ t'_i δὲν ἔχουν βάρη, ὁ τύπος (44) γίνεται:

$$m_d = \sqrt{\frac{[dd]}{n}} \qquad (44'')$$

καὶ λόγῳ τῆς (44′) ἔχομεν:

$$m^2 = \frac{[dd]}{2n} \qquad (45')$$

Τέλος, ἐὰν λάβωμεν τὴν διπλῆν παρατήρησιν:

$$T = \frac{1}{2}(t_0' + t_0),$$

δυνάμεθα τὴν T νὰ τὴν θεωρήσωμεν ὡς ἀριθμητικὸν μέσον δύο μεμονωμένων καὶ συγκρισίμων παρατηρήσεων, βάρους 1. Ἐφαρμόζοντες καὶ ἐδῶ τὸν νόμον τοῦ μέσου σφάλματος, εὑρίσκομεν :

$$m_0 = \frac{m}{\sqrt{2}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[pdd]}{n}} \qquad (46)$$

Τὸ m_0[1] εἶναι μέσον σφάλμα τῆς διπλῆς παρατηρήσεως T ἢ τὸ μέσον σφάλμα ἑνὸς μέσου T ἐκ δύο παρατηρήσεων.

Ἐφαρμογή. Οἱ τύποι (45) καὶ (46) ἔχουν σπουδαιοτάτην ἐφαρμογὴν ὅταν κάμνωμεν ἐπαναλειπτικὰς μετρήσεις ὑψομετρήσεων ἢ μηκῶν. Αἱ μετρήσεις τῶν τοιούτων διαστημάτων **περιέχουν** σφάλματα τὰ ὁποῖα, ὅπως εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς **Γεωδαισίας**, αὐξάνουν μετὰ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῶν ἀποστάσεων α. Κατὰ συνέπειαν τὰ βάρη εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν $(\sqrt{\alpha})^2$, ἤτοι τῶν α καὶ οἱ ὡς ἄνω τύποι λαμβάνουν τὴν μορφήν :

$$m = \pm \sqrt{\frac{1}{2n}\left[\frac{dd}{\alpha}\right]} \quad \text{καὶ} \quad m_0 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n}\left[\frac{dd}{\alpha}\right]}$$

Βλέπομεν ἐντεῦθεν ὅτι ἡ ἀκρίβεια τῶν τοιούτων προσδιορισμῶν εἶναι μικροτέρα ἢ μεγαλυτέρα ἀναλόγως τοῦ μικροῦ ἢ μεγάλου ἀριθμοῦ τῶν πρὸς σύγκρισιν διαστημάτων. Ἑπομένως ἡ ἀκρίβεια δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ αὐτὰ ταῦτα τὰ μήκη τῶν διαστημάτων, ἀλλὰ μόνον ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν αὐτῶν.

Παράδειγμα : «Ὑποθέσωμεν ὅτι ἐπὶ μιᾶς φωτογραφικῆς πλακὸς μετρῶμεν τὰ μεγέθη ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀστέρων, κάμνομεν δὲ δύο τοιαύτας ἐκτιμήσεις ἑκάστου ἀστέρος. Ποῖον τὸ μέσον σφάλμα τῶν τελικῶν ἐνδείξεων τῆς λαμπρότητος, ἐὰν αὗται ἐξάγωνται ὡς μέσοι ὅροι ἐκ δύο ἀνεξαρτήτων ἀλλήλων ἐκτιμήσεων ; »

Ἔστω ὅτι τὰ ζεύγη τῶν ἐκτιμήσεων ἔδωσαν :

t′	t	d	dd
m	m		
6,8	7,1	—0,3	0,09
9,1	8,9	+0,2	0,04

(1) Ἀντὶ τῶν m_0 καὶ m θὰ ἠδυνάμεθα νὰ θέσωμεν: M καὶ μ, ὅπως δεικνύει μία θεώρησις τῶν τύπων (40) καὶ (42) ἐν σχέσει μὲ τοὺς (45) καὶ (46)

8,8	8,3	+0,5	0,25
10,8	10,8	0,0	0,00
8,6	8,8	—0,2	0,04
7,0	6,8	+0,2	0,04
7,1	7,1	0,0	0,00
6,8	7,0	—0,2	0,04
9,5	9,6	—0,1	0,01
9,2	9,4	—0,2	0,04
8,9	8,8	+0,1	0,01
10,4	10,7	—0,3	0,09
			[dd]=0,65

$m^2 = \frac{[dd]}{2n} = \frac{0,65}{24} = 0^m,0271$. Ἤτοι, τὸ μέσον σφάλμα μιᾶς ἐκτιμήσεως $m = \pm 0^m,16$.

Προκειμένου νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ μέσον σφάλμα τῶν τελικῶν ἐνδείξεων, ἤτοι τὸ m_x, συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν :

$$m_x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 m^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 m^2 = \frac{m^2}{2} = 0^m,0136 \text{ καὶ } m_x = \pm 0^m,12$$

Ἀπ' εὐθείας παρατηρήσεις πληροῦσαι ὡρισμένας συνθήκας.

Κατὰ τὰς ἀπ' εὐθείας μετρήσεις $t_1, t_2, \ldots t_n$, ἐκ τῶν ὁποίων πρόκειται νὰ ἐξαχθοῦν αἱ διορθώσεις $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots \upsilon_n$, συμβαίνει συχνὰ νὰ εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν καὶ μίαν βοηθητικὴν συνθήκην τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ πληροῦν αἱ εὑρεθησόμεναι δι' ὑπολογισμοῦ πιθαναὶ τιμαὶ $T_1, T_2, \ldots T_n$. **Μία τοιαύτη** συνθήκη π. χ. εἶναι ἡ: $T_1 + T_2 + \ldots + T_n = S$, ὅπου S εἶναι ποσότης σταθερά. Εἶναι προφανὲς ὅτι αἱ παρατηρήσεις $t_1\ t_2, \ldots t_n$ δὲν πληροῦν τὴν συνθήκην ταύτην. **Παρουσιάζεται δηλαδή, μία *ἀσυμφωνία,* τὴν ὁποίαν παριστῶμεν διὰ τοῦ W. Ἔχομεν προφανῶς τὰς σχέσεις :**

$$S = t_1 + \upsilon_1 + t_2 + \upsilon_2 + \ldots + t_n + \upsilon_n \quad \text{καὶ} \quad S - [t] = W \qquad (47)$$

Διὰ τοῦ ὅρου ***ἀσυμφωνία*** **(Discrepancy, Widerspruch) ἐκφράζεται τὸ ὁλικὸν σφάλμα τὸ ἐμφανιζόμενον εἰς τὸ τελικὸν ἐξαγομενον, τὸ ὁποῖον σύγκειται ἀπὸ πολλὰς ἐπὶ μέρους σειρᾶς παρατηρήσεων.**

Ἐὰν π. χ. μετρήσωμεν τὰς γωνίας t_1, t_2, t_3 ἑνὸς τριγώνου, αἱ πιθαναὶ τιμαὶ θὰ πληροῦν τὴν συνθήκην:

$$T_1+T_2+T_3=S=180^0$$

ἢ καὶ $$(t_1+\upsilon_1)+(t_2+\upsilon_2)+(t_3+\upsilon_3)=180^0.$$

Τότε συμφώνως πρὸς τὴν (47), ἔχομεν:

$$[t+\upsilon]-[t]=W$$

ἢ καὶ $$\upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3=W \tag{48}$$

Δηλαδή: ***Αἱ διορθώσεις τῶν παρατηρήσεων νὰ ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν (48).***

Προκειμένου, ἤδη, νὰ προσδιορίσωμεν τὰς πιθανὰς τιμὰς τῶν T_i, δυνάμεθα, νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὰς ἀμέσους ἢ ἀπ' εὐθείας παρατηρήσεις t_i μὲ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν βάρη p_i, τὸν τύπον ὅστις μᾶς δίδει τὸ μέσον σφάλμα:

$$m_x=\frac{\mu}{\sqrt{p}},$$

πρὸς τούτοις δὲ τὴν (47).

Μὲ ἄλλους λόγους ἔχομεν εἰς τὴν διάθεσίν μας δύο δυνατότητας ὑπολογισμοῦ μιᾶς οἱασδήποτε τιμῆς T_i (ὅπου $i=1,2,\ldots,n$).

α') Νὰ θέσωμεν τὴν ζητουμένην τιμὴν x'_i ἴσην πρὸς τὴν ἀπ' εὐθείας μέτρησιν t_i μὲ τὸ ἀντίστοιχον βάρος, ἔστω p_i καὶ

β') Νὰ θεωρήσωμεν τὴν ζητουμένην τιμὴν x''_i ὡς διαφορὰν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὑπολοίπων—ἐκτὸς τῆς t_i —παρατηρήσεων ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος S (ἢ ὅπερ τὸ αὐτό, ὡς ἄθροισμα τῆς t_i καὶ τῆς ἀσυμφωνίας W), μὲ βάρος p_i''. Δηλαδὴ θὰ ἔχωμεν:

$x_i'=t_i$ μὲ βάρος p_i

$x_i''=S-(t_1+t_2+\ldots+t_{i-1}+t_{i+1}+\ldots+t_n)=t_i+W$ μὲ βάρος p_i''.

Ἔχομεν, ἑπομένως, τὰς σχέσεις:

$$x_i'=t_i \quad \text{καὶ} \quad x_i''=t_i+W \tag{49}$$

καὶ τὴν πιθανωτέραν τιμήν:

$$T_i=\frac{p_i'x_i'+p_i''x_i''}{p_i'+p_i''} \tag{50}$$

Ἐφαρμόζοντες ἤδη εἰς τὰς (49) τὸν νόμον μεταδόσεως τοῦ βάρους (30), λαμβάνομεν:

$$\frac{1}{p_i'}=\frac{1}{p_i} \quad \text{καὶ} \quad \frac{1}{p_i''}=\left[\frac{1}{p}\right]-\frac{1}{p_i} \qquad (51)$$

Ἡ σχέσις (50), λόγῳ τῶν (49) καὶ (51), γίνεται :

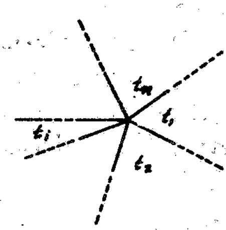
$$T_i=\frac{p_i\,t_i+\dfrac{t_i+W}{\left[\dfrac{1}{p}\right]-\dfrac{1}{p_i}}}{p_i+\dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{p}\right]-\dfrac{1}{p_i}}}=t_i+\frac{W}{p_i\left[\dfrac{1}{p}\right]}=t_i+\frac{m_i^{\,2}}{[m^2]}\cdot W \quad (52)$$

Ἑπομένως, *ἡ ἀσυμφωνία W εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὰ βάρη ἢ κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογος πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν μέσων σφαλμάτων τῶν κατανεμημένων ἐπὶ τῶν παρατηρήσεων.*

Εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν τὰ βάρη p εἶναι ἴσα μεταξύ των, δηλαδὴ αἱ παρατηρήσεις t εἶναι τῆς αὐτῆς ἀκριβείας, τότε ἡ (52) λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$T_i=t_i+\frac{W}{n} \qquad (52')$$

Παράδειγμα : Ὑποθέσωμεν ὅτι μετροῦμεν μετὰ τῆς ἰδίας ἀκριβείας γωνιώδεις ἀποστάσεις ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁρίζοντος (σχ. 17) καὶ εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς $t_1, t_2, \ldots, t_n$, τὸ ἄθροισμα τῶν ὁποίων πρέπει νὰ ἰσοῦται πρὸς 360^0, ἐφ' ὅσον καλύπτεται ὁλόκληρος περιφέρεια κύκλου. Ἀσφαλῶς θὰ παρουσιασθῇ ἀσυμφωνία W, διότι ἔχομεν τὰ σφάλματα $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Τὸ πρόβλημα τίθεται ὡς ἑξῆς : *Πῶς θὰ κατανεμηθῇ ἡ ἀσυμφωνία W ἐπὶ μιᾶς ἑκάστης γωνίας ; Ποῖον τὸ μέσον σφάλμα μιᾶς παρατηρηθείσης γωνίας καὶ μιᾶς γωνίας ἡ ὁποία προκύπτει ἐξ ἰσοσταθμισμένων παρατηρήσεων;*



Σχ. 17

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ γωνία ti προσδιορίζεται διὰ διπλῆς μετρήσεως, μιᾶς ἀπ' εὐθείας καὶ ἑτέρας ἐκ τῆς διαφορᾶς ὅλων τῶν ὑπολοίπων παρατηρήσεων ἀπὸ τὸ S. Οὕτως ἔχομεν δύο παρατηρήσεις (49) :

$x'i=ti$ μὲ βάρος $p_1=1$

$x''i=ti+W$ » » $p_2=\dfrac{1}{n-1}$

Τὸ p_2 εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν παρατηρήσεων. Συμφώνως δὲ πρὸς τὰς σχέσεις (50) καὶ (52') ἡ πιθανωτέρα τιμὴ Ti εἶναι :

$$Ti=ti+\frac{W}{n}\cdot$$

Ἐπειδὴ ἡ ti δύναται νὰ εἶναι μία τῶν n γωνιῶν, δι' αὐτὸ ἡ ἀσυμφωνία W κατανέμεται ἐξ ἴσου εἰς ὅλας τὰς γωνίας. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν σφαλμάτων σχηματίζομεν τὴν ἀκόλουθον διάταξιν :

xi	V	p	VVp
x′i	$\frac{W}{n}$	1	$\frac{W^2}{n^2}$
x″i	$(n-1)\frac{W}{n}$	$\frac{1}{n-1}$	$(n-1)\frac{W^2}{n^2}$
Ἄθροισμα	W	$\frac{n}{n-1}$	$\frac{W^2}{n}$

Τὸ μέσον σφάλμα μιᾶς ἀρχικῆς παρατηρήσεως εἶναι :

$$m=\pm\sqrt{\frac{[VVp]}{2-1}}=\pm\frac{W}{\sqrt{n}}$$

καὶ τὸ μέσον σφάλμα τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου :

$$m_x=\pm\frac{m}{\sqrt{[p]}}=\pm\sqrt{1-\frac{1}{n}}$$

Ἑπομένως διὰ τῆς ἰσοσταθμίσεως τὸ μέσον σφάλμα ἀνάγεται εἰς τὴν σχέσιν :

$$1:\sqrt{1-\frac{1}{n}}.$$

Μέσον σφάλμα πρὸ καὶ μετὰ τὴν ἰσοστάθμισιν.

Τὸ μέσον σφάλμα τῶν μεγεθῶν τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἐκ τοῦ ὑπολογισμοῦ, χωρὶς νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ βοηθητικὴ συνθήκη, ἢ ὅπως ἄλλως λέγεται, *τὸ μέσον σφάλμα πρὸ τῆς ἰσοσταθμίσεως*, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$m^2=\frac{W^2}{n} \quad \text{καὶ ἀντιστοίχως:} \quad m^2=\frac{W^2}{\left[\frac{1}{p}\right]} \qquad (53)$$

Ἐάν, ἐξ ἄλλου, χρησιμοποιήσωμεν τὴν βοηθητικὴν συνθήκην, ἤτοι τὴν σχέσιν τοῦ ἀθροίσματος S, θὰ ἔχωμεν ὡς *μέσα σφάλματα τῶν ἐξ ὑπολογισμοῦ μέσων* m_x

$$m_x{}^2=\frac{W^2}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right) \quad \text{καὶ ἀντιστοίχως:}$$

$$m_x=\pm\frac{W}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}}\sqrt{\frac{1}{p_i}\left(1-\frac{1}{p_i\left[\frac{1}{p}\right]}\right)} \qquad (54)$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὰς σχέσεις αἱ ὁποῖαι μᾶς δίδουν τὰ σφάλματα τῶν παρατηρήσεων:

$$v'_i = T_i - t_i \quad \text{καὶ} \quad v''_i = T_i - (t_i + \omega)$$

αἵτινες, δυνάμει τῆς (52), γίνονται:

$$v'_i = \frac{1}{p_i}\frac{W}{\left[\frac{1}{p}\right]} \quad \text{καὶ} \quad v_i'' = \frac{1}{p_i}\frac{W}{\left[\frac{1}{p}\right]} - W$$

Ἐκ τῶν σχέσεων τούτων καὶ τῶν βαρῶν p'_i καὶ p''_i εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν σφαλμάτων, ἤτοι τὸ $[pvv] = \frac{W^2}{\left[\frac{1}{p}\right]}$

καὶ ἀμέσως τοὺς τύπους (53). Προκειμένου περὶ τῶν (54) πρέπει νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι

$$p_i + p''_i = p_i : \left(1 - \frac{1}{p_i\left[\frac{1}{p}\right]}\right)$$

Πρέπει νὰ σημειωθῇ ἐνταῦθα ὅτι, *ὁ διὰ τοῦ τρόπου τούτου ὑπολογισμὸς τῶν σφαλμάτων, δὲν εἶναι πάρα πολὺ ἱκανοποιητικὸς καὶ τοῦτο διότι στηρίζεται μόνον ἐπὶ μιᾶς ἀσυμφωνίας W.*

Παράδειγμα: Ἡ γωνία α_0 ἑνὸς τριγώνου ἐμετρήθη πεντάκις καὶ αἱ β_0 καὶ γ_0 τετράκις. Ζητεῖται ἡ πιθανωτέρα τιμὴ ἑκάστης γωνίας καὶ τὰ ἀντίστοιχα σφάλματα αὐτῶν.

Ἡ ἐργασία προχωρεῖ ὡς ἑξῆς: Ἐκ τῶν διδομένων τιμῶν, σχηματίζομεν τὰ ἀριθμητικὰ μέσα:

α	β	γ
60° 8′ 46″	39° 52′ 18″	79° 58′ 49″
60 8 48	39 52 20	79 58 48
60 8 47	39 52 22	79 58 47
60 8 44	39 52 20	79 58 48
60 8 45		
α_0=60 8 46	β_0=39 52 20	γ_0=79 58 48

Τὰ βάρη εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐπαναληπτικῶν παρατηρήσεων, ἐφ' ὅσον αὗται ἔγιναν ὑπὸ τοῦ ἰδίου παρατηρητοῦ καὶ τοῦ αὐτοῦ ὀργάνου. Ἤτοι: $p_\alpha = 5$, $p_\beta = 4$, $p_\gamma = 4$.

$$W = 180 - (\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0) = 6''$$

Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν, βάσει τοῦ τύπου (52):

$$\alpha_x = \alpha_0 + 6'' \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = 60^0\,8'\,46''+1'',7 = 60^0\,8'\,47'',7$$

$$\beta_x = \beta_0 + 6'' \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = 39^0\,52'\,20''+2'',1 = 39^0\,52'\,22'',1$$

$$\gamma_x = \gamma_0 + 6'' \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = 79^0\,58'\,48''+2'',1 = 79^0\,58'\,50'',1$$

Δοκιμή : $\alpha_x + \beta_x + \gamma_x = 179^0\,59'\,59'',9$

Τὸ μέσον σφάλμα μιᾶς παρατηρήσεως, συμφώνως πρὸς τὸν τύπον (53) εἶναι :

$$m^2 = \frac{W^2}{\left[\frac{1}{p}\right]} = 6^2 \cdot \frac{10}{7} = \frac{360}{7} = 51,43 \text{ καὶ } m = \pm 7'',18$$

καὶ τὸ μέσον σφάλμα τῆς ἐξ ὑπολογισμοῦ προκυπτούσης τιμῆς τῆς α_x εἶναι, βάσει τῆς σχέσεως (54) :

$$m_{\alpha x}{}^2 = \frac{W^2}{\left[\frac{1}{p}\right]} \cdot \left(1 - \frac{\frac{1}{p_\alpha}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right) = 51,43 \times 0,14 = 7,20 \text{ καὶ } m_{\alpha x} = \pm 2'',68$$

Κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν καὶ τὰς τιμὰς τῶν $m_{\beta x}$ καὶ $m_{\gamma x}$ δι᾽ ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν ὡς ἄνω τύπον τοῦ p_α, διὰ τῶν p_β καὶ p_γ.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΓΕΝΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'.

ΕΜΜΕΣΟΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Τὸ πρόβλημα τῆς ἰσοσταθμήσεως.

Αἱ μέχρι τοῦδε ἐκτεθεῖσαι μέθοδοι ἰσοσταθμίσεως ἐσχετίζοντο μὲ *ἀπ' εὐθείας ἢ ἀμέσους παρατηρήσεις*, τῆς ἰδίας ἢ διαφόρου ἀκριβείας. Γενικώτερον ὅμως ἐξεταζομένου τοῦ ζητήματος, πειθόμεθα ὅτι, πολὺ συχνά, δὲν εἶναι δυνατὸν τὰ μεγέθη τῶν ὁποίων ζητοῦμεν τὰς πιθανὰς τιμὰς νὰ τὰ παρατηρήσωμεν ἀπ' εὐθείας. Συνήθως δὲ ἐκτελοῦμεν μετρήσεις ἄλλων μεγεθῶν ἅτινα συνδέονται δι' ὡρισμένων σχέσεων μὲ ἐκεῖνα, τῶν ὁποίων θέλομεν νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τιμήν. Ἡ τοιαύτη σχέσις παρατηρουμένων καὶ ὑπολογιζομένων μεγεθῶν ἐκφράζεται ὑπὸ μορφὴν ἐξισώσεων, τῶν ὁποίων οἱ ἄγνωστοι παριστοῦν τὰς ζητουμένας τιμάς. Παρατηροῦμεν ἐπὶ παραδείγματι, διὰ τοῦ θεοδολίχου τὸ ὕψος ἢ τὸ ἀζιμούθιον ἑνὸς ἀστέρος καὶ ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸν χρόνον καὶ τὸ γεωγραφικὸν πλάτος τοῦ τόπου τῆς παρατηρήσεως. Ἢ μᾶς δίδονται, διὰ τῆς παρατηρήσεως, αἱ ἀποστάσεις r_1, r_2, r_3, r_4 τοῦ ἀγνώστου σημείου $\Sigma(x, y)$ ἐκ τῶν γνωστῶν $\Sigma_1(x_1, y_1)$, $\Sigma_2(x_2, y_2)$, $\Sigma_3(x_3, y_3)$, $\Sigma_4(x_4, y_4)$, — τὰ ὁποῖα εἶναι περισσότερα ἐκείνων ἅτινα χρειάζονται διὰ νὰ ὁρισθῇ τὸ Σ — καὶ ζητεῖται νὰ προσδιορισθοῦν αἱ συντεταγμέναι αὐτοῦ.

Κατὰ ταῦτα, ὅταν αἱ ζητούμεναι νὰ ὑπολογισθοῦν ποσότητες συνδέωνται μὲ τὰ παρατηρούμενα μεγέθη δι' ὡρισμένων συναρτήσεων, τότε λέγομεν ὅτι πρόκειται *περὶ ἐμμέσων παρατηρήσεων*. Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα τῆς εὑρέσεως τῶν συντεταγμένων τοῦ Σ, ἔχομεν προφανῶς πρὸς λύσιν 4 ἐξισώσεις:

$$r_i + v_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} \qquad (55) \qquad (i=1, 2, 3, 4)$$

καὶ εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν *μέθοδον τῆς ἰσοστα-*

θμίσεως ἢ *τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων*, προκειμένου νὰ προσδιορίσωμεν τὰς τιμὰς τῶν x, y.

Ἐπίσης, ἐὰν τὰ x καὶ y συνδέωνται διὰ τῆς ἐξισώσεως:

$$y=\alpha+\beta x+\gamma x^2 \qquad (56)$$

ὅπου τὰ α, β, γ παριστοῦν μεγέθη τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ προσδιορισθοῦν, ὅταν ἔχωμεν παρατηρήσεις τῶν x καὶ y περισσοτέρας τῶν τριῶν, καὶ πάλιν πρέπει νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν *μέθοδον τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων*. Διότι, κατὰ τὴν θεωρίαν τῆς Ἀλγέβρας, πρὸς προσδιορισμὸν τῶν α, β, γ, ἀρκεῖ νὰ δοθοῦν τρία ζεύγη τιμῶν τῶν x καὶ y. Ἐὰν ὅμως ὑπάρχουν π. χ. 6 παρατηρήσεις τῶν x καὶ y, καὶ μάλιστα ἐὰν ὅλαι ἔχουν τὰς αὐτὰς ἀξιώσεις ἀκριβείας, δὲν δυνάμεθα νὰ προτιμήσωμεν τρεῖς οἱασδήποτε ἐξ αὐτῶν καὶ νὰ ἀπορρίψωμεν τὰς ἄλλας· διότι αἱ οὕτως ὑπολογιζόμεναι τιμαὶ τῶν α, β, γ δὲν θὰ ἦσαν ἀκριβέστεραι τῶν δι' οἱασδήποτε ἄλλης ἐπιλογῆς. Ἐὰν ἐκάμναμεν μίαν τοιαύτην ἐπιλογήν, θὰ εἴχομεν :

$$y_n-(\alpha_0+\beta_0 x_n+\gamma_0 x_n^2)=0 \qquad (n=1,\ 2,\ 3)$$

καὶ ἐπὶ πλέον :

$$y_4-(\alpha_0+\beta_0 x_4+\gamma_0 x_4^2)=W_4$$
$$y_5-(\alpha_0+\beta_0 x_5+\gamma_0 x_5^2)=W_5$$
$$y_6-(\alpha_0+\beta_0 x_6+\gamma_0 x_6^2)=W_6$$

ὅπου W_4, W_5, W_6 θὰ εἶναι ποσότητες ἔχουσαι τιμὰς ἐγγὺς τοῦ μηδενός.

Ὥστε τὸ συμπέρασμα εἶναι ὅτι, προκειμένου νὰ ἔχωμεν ἕνα ἐξαγόμενον τὸ ὁποῖον νὰ συμφωνῇ μὲ ὅλας τὰς παρατηρήσεις, καθ' ὅσον εἶναι δυνατόν, πρέπει νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅλας τὰς γενομένας παρατηρήσεις, δηλαδὴ νὰ *κάμωμεν ἰσοστάθμησιν αὐτῶν*. Θὰ ζητήσωμεν δηλαδή, νὰ εὕρωμεν τιμὰς τῶν α, β, γ, ὅσον τὸ δυνατὸν ἐγγὺς τῶν ἀληθῶν, π.χ. τὰς α_0, β_0, γ_0, ὁπότε νὰ ἔχωμεν :

$$\alpha_0+\beta_0 x_i+\gamma_0 x_i^2-y_i=\upsilon_i \qquad (57) \qquad (i=1,\ 2, \ldots\ 6)$$

Τὸ πρόβλημα διατυποῦται ἤδη ὡς ἑξῆς :

Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ α, β, γ εἰς τρόπον ὥστε, μὲ τὴν βοήθειαν τῶν x *νὰ ὑπολογίζωμεν τὰ* y *καὶ αἱ οὕτως ὑπολογιζόμεναι τιμαὶ νὰ διαφέρουν τῶν παρατηρηθεισῶν κατὰ τὰς ποσότητας:* $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots \upsilon_6$ *εἰς τρόπον ὥστε :*

$$[\upsilon^2]=[\upsilon\upsilon]=\text{ἐλάχιστον}.$$

Εἶναι προφανὲς ὅτι εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις τῶν (55) καὶ (57) πρόκειται περὶ ἐμμέσων παρατηρήσεων.

Γενικῶς ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ν ἀληθεῖς τιμαὶ X, Y, Z,... ἐξαρτῶνται ἐκ τῶν n ἀμέσων παρατηρήσεων $T_1, T_2, \ldots T_n$ μὲ ἀντίστοιχα βάρη $p_1, p_2, \ldots p_n$ καὶ $\nu < n$. Προκειμένου νὰ κάμωμεν ἰσοστάθμισιν τῶν ἐμμέσων τούτων παρατηρήσεων, *διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:*

Αη Περίπτωσις: Ἐκπεφρασμένη μορφή.

Τὰ παρατηρούμενα μεγέθη $T_1, T_2, \ldots T_n$ εἶναι συναρτήσεις τῶν X, Y, Z,... ὑπὸ ἐκπεφρασμένην μορφήν.

Ἔστω ὅτι δίδεται τὸ σύστημα:

$$\begin{aligned} f_1(X, Y, Z, \ldots) &= T_1 + \varepsilon_1 \\ f_2(X, Y, Z, \ldots) &= T_2 + \varepsilon_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots\ldots \\ f_n(X, Y, Z, \ldots) &= T_n + \varepsilon_n \end{aligned} \qquad (58)$$

ὅπου $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ εἶναι τὰ ἀληθῆ σφάλματα τῶν παρατηρήσεων, καὶ ζητεῖται ἡ λύσις αὐτοῦ, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξισώσεων εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀγνώστων.

Τὰς ἐξισώσεις (58) δυνάμεθα πάντοτε νὰ τὰς θεωρήσωμεν ὅτι εἶναι *ὑπὸ γραμμικὴν μορφήν*. Διότι, ἂν τοῦτο δὲν συμβαίνῃ εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς, εἶναι δυνατὸν νὰ τὸ ἐπιτύχωμεν κατὰ προσέγγισιν, τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου τοῦ Taylor.

Πράγματι ἀναλύομεν τὰ ἄγνωστα μεγέθη X,Y, Z,...εἰς ἄθροισμα δύο προσθετέων, ἐξ ὧν οἱ μὲν $X_0, Y_0, Z_0, \ldots$ νὰ εἶναι τιμαὶ ἐγγὺς τῶν ἀρχικῶν κείμεναι [1], οἱ δὲ x, y, z,... νὰ εἶναι ποσότητες πολὺ μικραὶ καὶ ἄγνωστοι κατὰ ποσὸν καὶ διεύθυνσιν. Καὶ ἐπὶ πλέον αἱ x, y, z,..., νὰ εἶναι τοιαῦται ὥστε, τὰ τετράγωνα καὶ τὰ γινόμενα αὐτῶν νὰ δυνάμεθα, εἰς πρώτην προσέγγισιν, νὰ τὰ παραλείψωμεν. Θέτομεν:

$$X = X_0 + x, \quad Y = Y_0 + y, \quad Z = Z_0 + z, \ldots$$

καὶ ἀντὶ τῶν ἀληθῶν σφαλμάτων, τὰ πιθανὰ $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots \upsilon_n$. Τότε αἱ (58) γίνονται:

---

(1) Συχνὰ ἐν τῇ πράξει, ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ T βάσει τοῦ (3) ἢ τοῦ (19) —ὅπως καὶ τῶν [υυ] καὶ [pυυ]—εἶναι πολὺ δύσκολος, δι' αὐτὸ ἀντὶ τῆς μέσης τιμῆς T λαμβάνομεν μίαν ἄλλην στρογγυλευμένην κατὰ τὸ δυνατὸν τιμὴν T_0, ἐγγὺς τῆς πρώτης εὑρισκομένην, καὶ τὰς διαφορὰς $T_0 - t_i$ τὰς παριστῶμεν διὰ τῶν ν_i. Τότε ἡ σχέσις:

$$T = \frac{[pt]}{[p]} \text{ δύναται νὰ γραφῇ καί: } T = T_0 + \frac{[p\nu]}{n}$$

ἢ $T = T_0 + x$. Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὰς σκέψεις αὐτάς, κάμνομεν ἐνταῦθα ἀνάλογον χωρισμὸν τῶν τιμῶν: X, Y, Z....

$$\left.\begin{array}{l} f_1(X_0+x,\ Y_0+y,\ Z_0+z,\ldots)-T_1=\upsilon_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(X_0+x,\ Y_0+y,\ Z_0+z,\ldots)-T_n=\upsilon_n \end{array}\right\} \quad (58\alpha)$$

Ἀναπτύσσομεν ἤδη κατὰ τὸν τύπον τοῦ Taylor καὶ λαμβάνομεν:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ldots)+\dfrac{\partial f_1}{\partial X_0}x+\dfrac{\partial f_1}{\partial Y_0}y+\dfrac{\partial f_1}{\partial Z_0}z+\ldots-T_1=\upsilon_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ldots)+\dfrac{\partial f_n}{\partial X_0}x+\dfrac{\partial f_n}{\partial Y_0}y+\dfrac{\partial f_n}{\partial Z_0}z+\ldots-T_n=\upsilon_n \end{array}\right\} \quad (58\beta)$$

Ἐὰν ἤδη θέσωμεν:

$$\frac{\partial f_i}{\partial X_0}=\alpha_i\,,\quad \frac{\partial f_i}{\partial Y_0}=\beta_i\,,\quad \frac{\partial f_i}{\partial Z_0}=\gamma_i\,,\ldots\ldots$$

καὶ $T_i - f_i(X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ldots)=t_i$ (58γ) $(i=1,\ 2,\ldots,n)$

τότε αἱ (58) λαμβάνουν τὴν γραμμικὴν μορφήν:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z+\ldots=t_1+\upsilon_1 \\ \alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2z+\ldots=t_2+\upsilon_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_n x+\beta_n y+\gamma_n z\ldots=t_n+\upsilon_n \end{array}\right| \quad (59)$$

ὅπου αἱ t_i, α_i, β_i, γ_i,... εἶναι ποσότητες γνωσταί, x, y, z,... εἶναι αἱ ἄγνωστοι καὶ υ_1, υ_2, υ_3,...υ_n τὰ πιθανὰ σφάλματα.

Ἐξισώσεις σφαλμάτων καὶ κανονικαὶ ἐξισώσεις.

Αἱ ἐξισώσεις (59) καλοῦνται *ἐξισώσεις τῶν παρατηρήσεων* ἢ *ἐξισώσεις τῶν σφαλμάτων* (équations d'observations, equations of observations, Fehlergleichungen).

Ἔστω λοιπὸν ὅτι δίδεται εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς ἓν γραμμικὸν σύστημα τῆς μορφῆς (59), ὅπου τὰ t_1, t_2,... t_n εἶναι τὰ παρατηρούμενα μεγέθη, p_1, p_2,...p_n τὰ βάρη καὶ υ_1 υ_2,... υ_n τὰ σφάλματα, ζητοῦνται δὲ νὰ προσδιορισθοῦν ν ἄγνωστοι τιμαὶ x, y, z,..., ὅπου ὁ $\nu<n$. Προκειμένου νὰ λυθῇ τὸ σύστημα τοῦτο, πρέπει νὰ εὑρεθοῦν

διὰ τὰ x, y, z,..., τοιαῦται τιμαί, π.χ. x_0, y_0, z_0,...,ὥστε εἰς τὰς (59) τὰ υ_1, υ_2,... υ_n νὰ εἶναι μηδέν. Δηλαδὴ νὰ ἔχωμεν :

$$\alpha_i x_0 + \beta_i y_0 + \gamma_i z_0 + \ldots - t_i = 0 \qquad (60) \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

Ἀλλὰ τοιαῦται τιμαὶ x_0, y_0, z_0,..., δὲν δύνανται νὰ εὑρεθοῦν. Δυνάμεθα ὅμως νὰ προσδιορίσωμεν τιμὰς τῶν x, y, z, τοιαύτας ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$[p\upsilon\upsilon] = \text{ἐλάχιστον}. \qquad (61)$$

Δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν σφαλμάτων υ_1,υ_2,...υ_n πολλαπλασιασμένων ἐπὶ τὰ βάρη των p_1, p_2,...p_n νὰ λαμβάνῃ τιμὴν ἐλαχίστην. Ἐφαρμόζομεν οὕτω τὴν *μέθοδον τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων*, ὁπότε *χρησιμοποιοῦμεν ὅλας τὰς ἐξισώσεις τῶν σφαλμάτων.*

Πράγματι ἐκ τῶν :

$$(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \ldots - t_1) = \upsilon_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(\alpha_n x + \beta_n y + \gamma_n z + \ldots - t_n) = \upsilon_n$$

ἀφοῦ τὰς ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον, τὰς πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὰ ἀντίστοιχα βάρη p_1, p_2,... p_n καὶ τὰς προσθέσωμεν, λαμβάνομεν :

$$[p\upsilon\upsilon]=p_1 (\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z+\ldots-t_1)^2+p_2 (\alpha_2 x+\beta_2 x + \gamma_2 z+\ldots-t_2)^2+ \ldots+p_n (\alpha_n x + \beta_n y + \gamma_n z + \ldots - t_n)^2$$

Ἐφ' ὅσον δέ, θὰ ἰσχύῃ ἡ (61), πρέπει:

$$\frac{\partial[p\upsilon\upsilon]}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial[p\upsilon\upsilon]}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial[p\upsilon\upsilon]}{\partial z} = 0, \ldots \qquad (61')$$

Ἤτοι :

$$\frac{\partial[p\upsilon\upsilon]}{\partial x} = 2p_1(\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z+\ldots- t_1).\alpha_1+2p_2(\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z+\ldots$$
$$\ldots-t_2)\,\alpha_2+\ldots+ 2\,p_n (\alpha_n x +\beta_n y + \gamma_n z+\ldots-t_n)\,\alpha_n = 0$$
$$=[p\alpha\alpha]\,x+ [p\alpha\beta]\,y + [p\alpha\gamma]z+\ldots-[p\alpha t]=0$$

Ἐπίσης εὑρίσκομεν τὰς τελικὰς ἐκφράσεις τῶν $\frac{\partial[p\upsilon\upsilon]}{\partial y}=0$, $\frac{\partial[p\upsilon\upsilon]}{\partial z}=0$,..., ὁπότε λαμβάνομεν τὸ σύστημα :

$$\left.\begin{array}{l} [p\alpha\alpha]x+[p\alpha\beta]y+[p\alpha\gamma]z+\ldots-[p\alpha t]=0 \\ [p\alpha\beta]x+[p\beta\beta]y+[p\beta\gamma]z+\ldots-[p\beta t]=0 \\ [p\alpha\gamma]x+[p\beta\gamma]y+[p\gamma\gamma]z+\ldots-[p\gamma t]=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (62)$$

Ἢ καὶ συμβολικῶς :

$$[p\upsilon\alpha]=0, \quad [p\upsilon\beta]=0, \quad [p\upsilon\gamma]=0, \ldots . \qquad (62')$$

Κατελήξαμεν οὕτως εἰς ἓν κανονικὸν σύστημα ν ἐξισώσεων μὲ ν ἀγνώστους καὶ αἱ οὕτω προσδιοριζόμεναι τιμαὶ τῶν x, y, z,... ἱκανοποιοῦν ὅλας τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (59) καὶ τὴν συνθήκην (61).

Ἐπειδὴ τὸ σύστημα (62) εἶναι κανονικόν, αἱ ἐξισώσεις αὐτοῦ καλοῦνται *κανονικαὶ ἐξισώσεις* ἢ *τελικαὶ ἐξισώσεις* (équations normales ἢ équations finales, normal equations, Normalgleichungen).

Εἰς περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ παρατηρήσεις εἶναι τῆς αὐτῆς ἀκριβείας ($p_1=p_2...=p_n=1$), αἱ κανονικαὶ ἐξισώσεις (62) γίνονται :

$$\left.\begin{array}{l}[\alpha\alpha]x+[\alpha\beta]y+[\alpha\gamma]z+\ldots-[\alpha t]=0\\ [\alpha\beta]x+[\beta\beta]y+[\beta\gamma]z+\ldots-[\beta t]=0\\ [\alpha\gamma]x+[\beta\gamma]y+[\gamma\gamma]z+\ldots-[\gamma t]=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} \qquad (62'')$$

Παρατήρησις. Βλέπομεν ἐνταῦθα ὅτι αἱ *κανονικαὶ ἐξισώσεις* εἶναι εἰς ἀριθμὸν ὅσοι καὶ οἱ ἄγνωστοι οἱ ὁποῖοι ἐμφανίζονται εἰς τὰς *ἐξισώσεις τῶν σφαλμάτων*. Ἑπομένως τὸ σύστημα (62)—καὶ ἀντιστοίχως τὸ (62'')—λύεται πλήρως διὰ τῆς Ἀλγέβρας. Ἐὰν δὲ τὰς τιμὰς ταύτας τὰς εἰσαγάγωμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις τῶν σφαλμάτων (59), λαμβάνομεν τὰ πιθανὰ σφάλματα υ.

Πρὸς λύσιν τοῦ συστήματος τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων, χρησιμοποιοῦμεν διαφόρους τρόπους καὶ διατάξεις ταχείας εὑρέσεως τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων. Συνήθως καὶ σήμερον προτιμᾶται ὁ τρόπος τῆς βαθμιαίας ἀπαλοιφῆς, ὅστις ἐνταῦθα συντομεύεται λόγῳ τῆς συμμετρίας τῶν συντελεστῶν, καὶ τὸν ὁποῖον ἔδωσεν ὁ Gauss τὸ 1810.

Βα Περίπτωσις : Πεπλεγμένη μορφή.

Αἱ σχέσεις αἱ συνδέουσαι τὰ παρατηρούμενα μεγέθη $T_1, T_2,...T_n$ μὲ τὰς ἀγνώστους τιμὰς X, Y, Z,... δίδονται ὑπὸ μορφὴν πεπλεγμένην.

Ἔστω ὅτι δίδεται τὸ σύστημα :

$$\left.\begin{array}{l}f_1(T_1, T_2,\ldots, T_n, X, Y, Z,\ldots)=W_1\\ f_2(T_1, T_2,\ldots, T_n, X, Y, Z,\ldots)=W_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ f_n(T_1, T_2,\ldots, T_n, X, Y, Z,\ldots)=W_n\end{array}\right\} \qquad (63)$$

n ἐξισώσεων μὲ ν ἀγνώστους X, Y, Z,...($\nu<n$), καὶ ὅπου $W_1, W_2,...W_n$ παριστοῦν τὰς ἀσυμφωνίας τῶν $f_1, f_2,...,f_n$ ὡς πρὸς τὴν μηδενικὴν τιμὴν τὴν ὁποίαν *πρέπει νὰ ἔχουν* τὰ πρῶτα μέλη τῶν ὡς ἄνω ἐξισώσεων.

Αἱ τιμαὶ T_1, T_2,... T_n φέρουν, ὡς γνωστόν, μεθ' ἑαυτῶν τὰ τυχαῖα σφάλματα υ_1, υ_2,... υ_n. Τότε, ἐὰν εἰς τὸ σύστημα (63), ἀντὶ τῶν T_1, T_2,... T_n θέσωμεν τὰς ἀληθεῖς τιμὰς $T_1+\upsilon_1$, $T_2+\upsilon_2$,... $T_n+\upsilon_n$ καὶ ἀκόμη :

$$X=X_0+x,\ Y=Y_0+y,\ Z=Z_0+z,\ldots$$

ὅπως ἐκάμαμεν καὶ προηγουμένως καὶ εὕρομεν τὰς (58α), τότε λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις :

$$\left.\begin{array}{l} f_1(T_1+\upsilon_1,\ T_2+\upsilon_2,\ldots T_n+\upsilon_n,\ X_0+x,\ Y_0+y,\ Z_0+z,\ldots)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(T_1+\upsilon_1,\ T_2+\upsilon_2,\ldots T_n+\upsilon_n,\ X_0+x,\ Y_0+y,\ Z_0+z,\ldots)=0 \end{array}\right\}\ (63\alpha)$$

Ἀναπτύσσοντες δὲ κατὰ τὸν τύπον τοῦ Taylor, λαμβάνομεν :

$$\left.\begin{array}{l} f_1(T_1, T_2,\ldots T_n, X_0, Y_0, Z_0,\ldots)+\dfrac{\partial f_1}{\partial T_1}\upsilon_1+\dfrac{\partial f_1}{\partial T_2}\upsilon_2+\ldots \\ \ldots+\dfrac{\partial f_1}{\partial T_n}\upsilon_n+\dfrac{\partial f_1}{\partial X_0}x+\dfrac{\partial f_1}{\partial Y_0}y+\dfrac{\partial f_1}{\partial Z_0}z+\ldots=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(T_1, T_2,\ldots T_n, X_0, Y_0, Z_0,\ldots)+\dfrac{\partial f_n}{\partial T_1}\upsilon_1+\ldots+\dfrac{\partial f_n}{\partial T_n}\upsilon_n+ \\ +\dfrac{\partial f_n}{\partial X_0}x+\dfrac{\partial f_n}{\partial Y_0}y+\dfrac{\partial f_n}{\partial Z_0}z+\ldots=0 \end{array}\right\}\ (64)$$

Εἶναι προφανὲς ὅτι αἱ διορθώσεις υ_1, υ_2,... υ_n τῶν ἀπ' εὐθείας μετρήσεων T, καθὼς ἐπίσης καὶ αἱ κατὰ προσέγγισιν ἀπειροσταὶ ποσότητες x, y, z,..., μᾶς εἶναι ἄγνωστοι, καὶ αὐτὰς ἀκριβῶς ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν. Ἐπὶ τῶν συναρτήσεων δὲ f_1, f_2,... f_n ἐπιδροῦν αἱ διορθώσεις υ_1, υ_2,... υ_n οὕτως ὥστε, ἐμμέσως, νὰ ἔχωμεν τὰ τελικὰ πιθανὰ σφάλματα W_1, W_2,... W_n. Δι' αὐτὸ δυνάμεθα νὰ θέσωμεν :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f_i}{\partial T_1}\upsilon_1+\dfrac{\partial f_i}{\partial T_2}\upsilon_2+\ldots+\dfrac{\partial f_i}{\partial f_n}\upsilon_n=W_i \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial X_0}=\alpha_i,\ \dfrac{\partial f_i}{\partial Y_0}=\beta_i,\ \dfrac{\partial f_i}{\partial Z_0}=\gamma_i,\ldots \\ f_i(T_1, T_2,\ldots, T_n, X_0, Y_0, Z_0,\ldots)=-t_i \\ \qquad\qquad (i=1, 2,\ldots n) \end{array}\right\}\ (64')$$

ὁπότε αἱ (64), δυνάμει τῶν (64'), γίνονται :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z+\ldots=t_1+W_1 \\ \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z+\ldots=t_2+W_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n x+\beta_n y+\gamma_n z+\ldots=t_n+W_n \end{array}\right\} \qquad (65)$$

Κατελήξαμεν οὕτως εἰς ἐξισώσεις τῆς ἰδίας μορφῆς μὲ τὰς ἐξισώσεις (59). Εἶναι καὶ αὗται *ἐξισώσεις τῶν σφαλμάτων τῶν πεπλεγμένων συναρτήσεων* (63). Αἱ τιμαὶ t_1, t_2, ... t_n αἱ ὁποῖαι εἰσέρχονται εἰς τὰς ἀνωτέρω σχέσεις εἶναι τῆς ἰδίας κατηγορίας μὲ ἐκείνας αἱ ὁποῖαι παρουσιάζονται εἰς τὰς ἐκπεφρασμένας συναρτήσεις. Ἐνταῦθα, ἀρκεῖ ἀντὶ τῶν T_1, T_2, ... T_n, X, Y, Z, ..., νὰ θέσωμεν $T_1+\upsilon_1$, $T_2+\upsilon_2$, ..., $T_n+\upsilon_n$, X_0, Y_0, Z_0, ... *Αἱ ἀσυμφωνίαι ὅμως* W_1, W_2,.... W_n *δὲν παριστοῦν τὰ πιθανὰ σφάλματα* υ_1, υ_2, ... υ_n, *τὰ ὁποῖα ἐμφανίζονται εἰς τὰς ἀπ' εὐθείας μετρήσεις T, ἀλλὰ τὰς ἐπιδράσεις τῶν τυχαίων αὐτῶν σφαλμάτων ἐπὶ τῶν τιμῶν τῶν συναρτήσεων* f. Καὶ ἔχουν, ἑπομένως, διάφορον βάρος ἀπὸ τὰ σφάλματα τὰ ἀμέσως ἐμφανιζόμενα.

Ἡ περαιτέρω ἐργασία διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων εἰς τὰς περιπτώσεις τῶν πεπλεγμένων συναρτήσεων μεταξὺ παρατηρουμένων καὶ ἀγνώστων μεγεθῶν, βαίνει ὅπως καὶ εἰς τὴν Αην περίπτωσιν, ἐφ' ὅσον καὶ αἱ δύο μορφαὶ συναρτήσεων ἀνάγονται τελικῶς εἰς σύστημα γραμμικόν.

Παράδειγμα 1ον. «Ἔστω ὅτι αἱ γενόμεναι ἐν Ἀθήναις παρατηρήσεις πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ γεωγραφικοῦ πλάτους, ἔδωσαν:

$$\begin{array}{lll} \varphi_1=37^0 & 58' & 20'',5 \\ \varphi_2=37 & 58 & 18,5 \\ \varphi_3=37 & 58 & 21,4 \\ \varphi_4=37 & 58 & 17,8 \\ \varphi_5=37 & 58 & 22,3 \end{array}$$

Ἐὰν x εἶναι ἡ ζητουμένη τιμὴ καὶ υ_1, υ_2, ... υ_5 αἱ ἀπ' αὐτῆς ἀποκλίσεις, θὰ ἔχωμεν τὰς *ἐξισώσεις τῶν σφαλμάτων*:

$$\left.\begin{array}{l} x-\varphi_1=\upsilon_1 \\ x-\varphi_2=\upsilon_2 \\ x-\varphi_3=\upsilon_3 \\ x-\varphi_4=\upsilon_4 \\ x-\varphi_5=\upsilon_5 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} [\upsilon\upsilon]=(x-\varphi_1)^2+(x-\varphi_2)^2+(x-\varphi_3)^2+ \\ \qquad +(x-\varphi_4)^2+(x-\varphi_5)^2 \end{array}$$

Ἀρκεῖ νὰ λυθῇ ἡ:

$$\frac{d[\upsilon\upsilon]}{dx}=2[1.1]x-2[\varphi]=0. \text{ Δηλαδὴ ἤ: } [1.1]\,x+[\varphi]=0$$

$$\text{ἢ } x=\frac{[\varphi]}{[1.1]}$$

$$\text{ἤτοι: } x=\frac{\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4+\varphi_5}{5}$$

Ἑπομένως, ἀρκεῖ ἐνταῦθα νὰ λάβωμεν τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν δεδομένων παρατηρήσεων, τὸ ὁποῖον εἶναι:

$$\boxed{\varphi=37^0\,58'\,20'',1}$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τῶν σφαλμάτων, λαμβάνομεν:

$$\begin{array}{ll}
\varphi-\varphi_1=\upsilon_1=-0'',4 & \text{καὶ } \upsilon_1^2=0,16 \\
\varphi-\varphi_2=\upsilon_2=+1,6 & \upsilon_2^2=2,56 \\
\varphi-\varphi_3=\upsilon_3=-1,3 & \upsilon_3^2=1,69 \\
\varphi-\varphi_4=\upsilon_4=+2,3 & \upsilon_4^2=5,29 \\
\varphi-\varphi_5=\upsilon_5=-2,2 & \upsilon_5^2=4,84 \\
\hline
[\upsilon]=0,0 & [\upsilon\upsilon]=14,54
\end{array}$$

Παράδειγμα 2ον. Δίδονται ἐκ σχετικῶν μετρήσεων αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων Σ_1 (x_1, y_1), Σ_2 (x_2,y_2),...Σ_6 (x_6,y_6) καὶ ζητεῖται ἡ ἐξίσωσις τῆς πιθανῆς εὐθείας ἐφ' ἧς δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς κείμενα τὰ σημεῖα ταῦτα».

Ζητεῖται δηλαδὴ ἡ ἐξίσωσις τῆς πιθανῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται κατὰ προσέγγισιν ἐξ ὅλων τῶν διδομένων σημείων (σχ. 18). Ἀρκεῖ, εἰς τὴν ζητουμένην ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας:

$$Ax+By+\Gamma=0$$

ἢ

$$\alpha x+\beta y+1=0$$

νὰ προσδιορισθοῦν τὰ α καὶ β συναρτήσει τῶν συντεταγμένων τῶν ἐξ σημείων (x_1,y_1), (x_2,y_2), ... (x_6,y_6).

Συμφώνως πρὸς τὰς (59) θὰ ἔχωμεν ἐνταῦθα ὡς *ἐξισώσεις τῶν σφαλμάτων*, τάς:

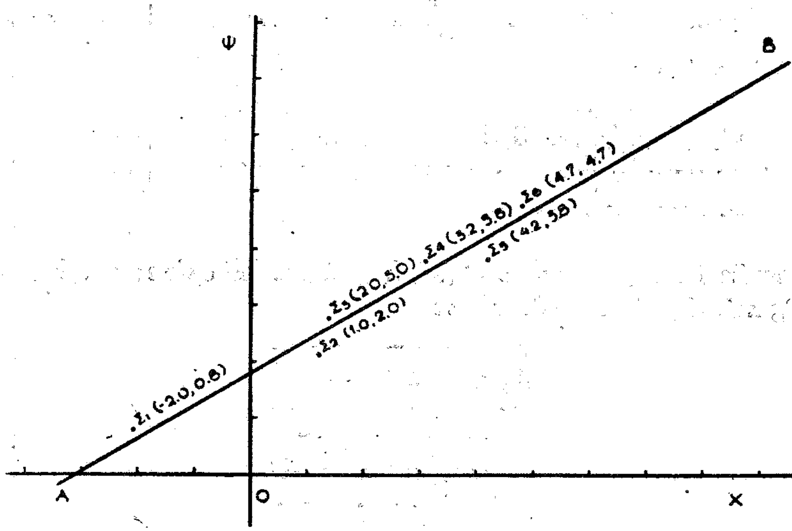
$$\left.\begin{array}{l}
\alpha x_1+\beta y_1+1=\upsilon_1 \\
\alpha x_2+\beta y_2+1=\upsilon_2 \\
\dots\dots\dots \\
\alpha x_6+\beta y_6+1=\upsilon_6
\end{array}\right\} \quad (A)$$

Λαμβάνομεν τὸ $[\upsilon\upsilon]=\upsilon_1^2+\upsilon_2^2+\ldots+\upsilon_6^2$ καὶ ἐκ τῶν:

$$\frac{\partial[\upsilon\upsilon]}{\partial x}=0 \quad \text{καὶ} \quad \frac{\partial[\upsilon\upsilon]}{\partial y}=0$$

τὸ σύστημα τῶν *κανονικῶν ἐξισώσεων*:

$$\left.\begin{array}{l}[xx]\alpha+[xy]\beta+[x.1]=0\\ [xy]\alpha+[yy]\beta+[y.1]=0\end{array}\right\} \qquad (B)$$



Σχ. 18

Ἐκ τοῦ πίνακος:

	x	y	xx	yy	xy
Σ_1	−2.0	0.8	4.00	0.16	−1.60
Σ_2	1.0	2.0	1.00	4.00	2.00
Σ_3	2.0	3.0	4.00	9.00	6.00
Σ_4	3.2	3.8	10.24	14.44	12.16
Σ_5	4.2	3.8	17.64	14.44	15.96
Σ_6	4.7	4.7	22.09	22.09	22.09
	[x]=13.1	[y]=18.1	[xx]=58.97	[yy]=64.13	[xy]=56.61

λαμβάνομεν τὰς τιμὰς τῶν [x], [y], [xx], [yy] καὶ [xy] καὶ τὰς εἰσάγομεν εἰς τὰς (Β) αἵτινες γίνονται:

$$\left.\begin{array}{l}58{,}97\alpha+56{,}61\beta+13{,}10=0\\ 56{,}61\alpha+64{,}13\beta+18{,}10=0\end{array}\right\} \qquad (B')$$

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα τοῦτο, χρησιμοποιοῦμεν τὴν μέθοδον ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss. Πρὸς τοῦτο, πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην τῶν ὡς ἄνω ἐξισώσεων ἐπὶ $-\frac{56{,}61}{58{,}97}$ καὶ αὐτὴν τὴν προσθέτομεν εἰς τὴν δευτέραν, ὁπότε:

$$\beta=-\frac{18{,}10-\frac{56{,}61}{58{,}97}\cdot 13{,}10}{64{,}13-\frac{56{,}61}{58{,}97}\cdot 56{,}61}=-\frac{18{,}10-12{,}57}{64{,}13-54{,}34}=-\frac{5{,}53}{9{,}79}=-0{,}56$$

Τελικῶς δὲ εὑρίσκομεν: $\alpha=0{,}32$, $\beta=-0{,}56$. Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς πιθανῆς εὐθείας ΑΒ, εἶναι:

$$\boxed{0{,}32x-0{,}56y+1=0}$$

ἢ

$$\boxed{-\frac{x}{3{,}1}+\frac{y}{1{,}8}=1}$$

τὴν ὁποίαν καὶ κατασκευάζομεν (σχ. 15).

Ἐὰν τώρα τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ὑπολογίσωμεν ἐκ τῶν διδομένων τιμῶν x_1, x_2, ... x_6, τὰ y θὰ σχηματίσωμεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

ὑπολ. y	παρατ. y	σφαλ. φ	φφ
0,64	0,80	—0,16	0,0256
2,36	2,00	+0,36	0,1296
2,92	3,00	—0,08	0,0064
3,61	3,80	—0,19	0,0361
4,18	3,80	+0,38	0,1444
4,46	4,70	—0,24	0,0576
		[φ]=+0,07	[φφ]=0,3997

Αἱ διαφοραὶ φ δεικνύουν τὰς ἀποκλίσεις τῶν ὑπολογισθεισῶν τιμῶν τῶν y ἀπὸ τὰς ἀντιστοίχους ἀπ' εὐθείας μετρήσεις τοῦ ἰδίου μεγέθους. Τὸ ἴδιον ἠδυνάμεθα νὰ κάμωμεν καὶ ὡς πρὸς τὸ x. Ἐπίσης δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὰ σφάλματα υ ἐκ τῶν ἐξισώσεων τῶν σφαλμάτων, ἐφ' ὅσον γνωρίζομεν τὰ α καὶ β.

Δυνάμεθα δὲ ἤδη νὰ λάβωμεν οἱαδήποτε ζεύγη τιμῶν τῶν x καὶ y καὶ νὰ προσδιορίσωμεν τὰ α καὶ β. Ἀλλ' αἱ ληφθεῖσαι ἀνωτέρω τιμαὶ τῶν συντελεστῶν τούτων ἔχουν τὴν μεγαλυτέραν πιθανότητα προσεγγίσεως πρὸς τοὺς συντελεστὰς τῆς *ἀληθοῦς εὐθείας*, ἐπὶ τῆς ὁποίας δεχόμεθα ὅτι κεῖνται ὅλα τὰ σημεῖα, διότι αὗται ἀντιστοιχοῦν εἰς ἕνα ἐλάχιστον τοῦ [υυ].

Παράδειγμα 3ον. «Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς συναρτήσει τοῦ γεωγραφικοῦ πλάτους».

Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς:

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

ὅπου δεχόμεθα ὅτι $t=1$, —δηλαδὴ τὸ ἐκκρεμὲς ἔχει ρυθμισθῇ ὥστε νὰ δεικνύῃ δευτερόλεπτα— ἔχομεν:

$$1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \text{ἢ } l = \frac{g}{\pi^2}$$

Ἐὰν διὰ τοῦ g_0 παραστήσωμεν τὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς βαρύτητος εἰς τὸν ἰσημερινόν, ε τὴν ἐκκεντρότητα τοῦ μεσημβρινοῦ καὶ φ τὸ πλάτος, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$g_0 : g = \sqrt{1-\varepsilon^2 \eta\mu^2 \varphi} : 1$$

διότι αἱ ἐπιταχύνσεις σχετίζονται ὡς αἱ κάθετοι τοῦ γηΐνου ἐλλειψοειδοῦς. Ἐπειδὴ τὸ ε εἶναι πολὺ μικρόν, δυνάμεθα, ἀναπτύσσοντες τὴν παράστασιν $1 : \sqrt{1-\varepsilon^2 \eta\mu^2 \varphi}$ κατὰ τὸν τύπον τοῦ Taylor, νὰ λάβωμεν μόνον τοὺς δύο πρώτους ὅρους, ἤτοι νὰ θέσωμεν:

$$1 : \sqrt{1-\varepsilon^2 \eta\mu^2 \varphi} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\eta\mu^2 \varphi$$

$$\text{ὅτε τὸ } l = \frac{g_0}{\pi^2}\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2}\eta\mu^2\varphi\right) = \frac{g_0}{\pi^2} + \frac{g_0}{\pi^2}\cdot\frac{\varepsilon^2}{2}\eta\mu^2\varphi \qquad (A)$$

Ἂν τὰ μεγέθη: $\frac{g_0}{\pi^2}$ καὶ $\frac{g_0}{\pi^2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2}$ τὰ θεωρήσωμεν ὡς x καὶ y, δυνάμεθα αὐτὰ νὰ τὰ προσδιορίσωμεν διὰ παρατηρήσεων. Τότε ἡ (A) γίνεται:

$$l = x + y\eta\mu^2\varphi \qquad (B)$$

Διὰ τὸν προσδιορισμὸν ἤδη τῶν x καὶ y θὰ ἦτο ἀρκετὸν νὰ δοθοῦν δύο ζεύγη τιμῶν τῶν l καὶ φ. Ἀλλ' ἐὰν ἔχωμεν περισσοτέρας ἰσοβαρεῖς παρατηρήσεις, τότε, προκειμένου νὰ εὕρωμεν τὰς πιθανωτέρας τιμὰς αὐτῶν, θὰ πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν ἰδίαν μέθοδον.

Ἐκφράζομεν τὸ l εἰς μέτρα καὶ ἔστω ὅτι ἔχομεν:

$$0{,}9929750 - 0{,}3903417y - x = 0$$
$$0{,}9934620 - 0{,}4972122y - x = 0$$
$$0{,}9938784 - 0{,}5667721y - x = 0$$
$$0{,}9934740 - 0{,}4932370y - x = 0$$
$$0{,}9935976 - 0{,}5136117y - x = 0$$
$$0{,}9940932 - 0{,}6045628y - x = 0$$

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν τὸ σύστημα τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων:

$$5{,}9614793 - 3{,}0657375y - 6x = 0$$
$$3{,}0461977 - 1{,}5933894y - 3{,}0657375x = 0$$

ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν:

$$x = 0{,}9908755 \text{ καὶ } y = 0{,}0052942.$$

Ἡ δὲ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι:

$$\boxed{l = 0{,}9908755 + 0{,}0052942\eta\mu^2\varphi}$$

Ἐὰν φ=0—ὅταν εὑρισκώμεθα εἰς τὸν ἰσημερινὸν—τότε $l_0 = 0{,}9908755$. Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ: $\frac{g_0}{\pi^2} = 0{,}9908755$ καὶ $\frac{g_0}{\pi^2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2} = 0{,}0052942$ εἶναι γνωσταί, δυνάμεθα ἀντιστρόφως νὰ προσδιορίσωμεν τὰ g_0 καὶ ε, ἄρα εὑρίσκομεν καὶ τὴν *πλάτυνσιν*.

Παράδειγμα 4ον **«Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις ἥτις ὑφίσταται μεταξὺ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στροφῶν ὑδραυλικοῦ τινος τροχοῦ καὶ τοῦ παραγομένου μηχανικοῦ ἔργου».**

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν ἀνὰ πρῶτον λεπτὸν ἀριθμὸν

περιστροφῶν καὶ διὰ y τὸ παραγόμενον ἔργον εἰς ἵππους, ἔστω ὅτι διὰ τοῦ πειράματος εὑρίσκομεν :

$$\begin{array}{ll} x_1=100 & y_1=15 \\ x_2=90 & y_2=19 \\ x_3=80 & y_3=22 \\ x_4=70 & y_4=24 \\ x_5=60 & y_5=25 \\ x_6=50 & y_6=23 \end{array}$$

Ζητοῦμεν νὰ παραστήσωμεν διὰ μιᾶς ἐξισώσεως, βάσει τῶν διδομένων τιμῶν, τὸ ἔργον ὡς συνάρτησιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν **στροφῶν x.**

Κάθε συνεχὴς συνάρτησις ἐντὸς ὡρισμένων ὁρίων **δύναται νὰ** ἐκφρασθῇ, ὡς γνωστόν, διὰ μιᾶς ἀκεραίας ρητῆς **συναρτήσεως. Ἄς** θεωρήσωμεν ἐνταῦθα τὴν σχέσιν :

$$y=\alpha x+\beta x^2+\gamma.$$

Ἐπειδὴ εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο τὸ y πρέπει νὰ μηδενίζεται **ὅταν** ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφῶν εἶναι μηδὲν **(x=0), αὕτη λαμβάνει τὴν** μορφήν :

$$y=\alpha x+\beta x^2$$

Ἤδη τὸ πρόβλημα ἁπλοποιεῖται : *Ἐκ τῶν δοθεισῶν τιμῶν τῶν* x *καὶ* y *νὰ προσδιορισθοῦν τὰ α καὶ β.* Ἀκολουθοῦντες **τὴν προτέραν** μέθοδον, εὑρίσκομεν :

$$\alpha=0{,}79143 \text{ καὶ } \beta=0{,}00643$$

καὶ ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι :

$$\boxed{y=0{,}79143x-0{,}00643x^2}$$

Τὸ y μηδενίζεται, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφῶν **x=0 ἢ x=123,** λαμβάνει δὲ τιμὴν μεγίστην, ὅταν x=61,5.

Γενικοὶ τύποι λύσεως κανονικοῦ συστήματος.

Ἔστω ὅτι δίδεται τὸ κανονικὸν σύστημα :

$$\left.\begin{array}{l} [\alpha\alpha]x+[\alpha\beta]y+[\alpha t]=0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ [\alpha\beta]x+[\beta\beta]y+[\beta t]=0. \end{array}\right\}$$

Δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν μίαν τῶν γνωστῶν **μεθόδων τῆς** Ἀλγέβρας καὶ νὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τῶν x καὶ y. Ἡ **πεῖρα ὅμως δεικνύει**, εἰς τὴν περίπτωσιν μάλιστα αὐτήν, καθ' ἣν ὑπάρχει **συμμετρία** εἰς τὴν ὁρίζουσαν τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων, νὰ ἀκολουθήσωμεν ὡρισμένην πορείαν ὥστε νὰ καταλήξωμεν ταχέως εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων. Ἐὰν λοιπόν, ὅπως ἐκάμαμεν εἰς προηγούμενον παράδειγμα, ***πολλαπλασιάσωμεν τὴν α΄. τῶν ὡς ἄνω κανονικῶν ἐξισώσεων ἐπὶ τὸν λόγον : τοῦ συντελεστοῦ τοῦ*** y ***τῆς α΄. ἐξισώσεως διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ*** x ***τῆς ἰδίας ἐξισώσεως μὲ ἀντίθετον σημεῖον λαμβανόμενον, ἤτοι ἐπὶ*** $-\frac{[\alpha\beta]}{[\alpha\alpha]}$ ***καὶ τὴν οὕτω προκύπτουσαν ἐξίσωσιν τὴν προσθέσωμεν εἰς τὴν β΄. τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος,*** τότε θὰ ἔχωμεν :

$$y = -\frac{-[\beta t] - \frac{[\alpha\beta]}{[\alpha\alpha]}[\alpha t]}{[\beta\beta] - \frac{[\alpha\beta]}{[\alpha\alpha]}[\alpha\beta]}$$

Εἰς τὴν παράστασιν αὐτὴν βλέπομεν ὅτι, τόσον εἰς τὸν ἀριθμητήν ὅσον καὶ εἰς τὸν παρονομαστήν, οἱ δύο λόγοι εἶναι οἱ αὐτοὶ καὶ τὰ ἄλλα ἀθροίσματα διαφέρουν μεταξύ των μόνον ὡς πρὸς ὡρισμένα γράμματα. Δυνάμεθα δὲ νὰ θέσωμεν :

$$[\beta t] - \frac{[\alpha\beta]}{[\alpha\alpha]}[\alpha t] \quad \text{τὸ σύμβολον:} \quad [\beta t.1]$$

$$[\beta\beta] - \frac{[\alpha\beta]}{[\alpha\alpha]}[\alpha\beta] \quad \text{»} \quad \text{»} \quad : \quad [\beta\beta.1]$$

Δηλαδὴ μὲ τὸ 1 παριστῶμεν τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἀθροισμάτων, εὐκόλως δὲ φαίνεται ἡ ἀλλαγὴ τῶν ἄλλων γραμμάτων, ὁπότε λαμβάνομεν :

$$\boxed{y = -\frac{[\beta t.1]}{[\beta\beta.1]}}$$

Ἐὰν εἴχομεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν ἑνὸς μόνον ἀγνώστου, τότε ἐκ τῆς $[\alpha\alpha]\,x + [\alpha t] = 0$, λαμβάνομεν :

$$\boxed{x = -\frac{[\alpha t]}{[\alpha\alpha]}}$$

Πολλαπλασιάζοντες εἰς τὴν ἰδίαν αὐτὴν περίπτωσιν τὰς ἐξισώσεις τῶν σφαλμάτων ἀντιστοίχως ἐπὶ α_1, α_2,... α_n καὶ προσθέτοντες λαμβάνομεν :

$$[\alpha\alpha]\, x + [\alpha t] = [\alpha\upsilon]$$

θέτοντες δὲ τὴν τιμὴν τοῦ x, εὑρίσκομεν : $[\alpha\upsilon]=0$. (1)

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμεθα καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν δύο ἀγνώστων, ὅτε λαμβάνομεν :

$$[\alpha\alpha]x+[\alpha\beta]y+[\alpha t]=[\alpha\upsilon]=0$$
$$[\beta\beta]y+[\alpha\beta]x+[\beta t]=[\beta\upsilon]=0.$$

Ἐὰν ἤδη ἔχωμεν κανονικὸν σύστημα μὲ τρεῖς ἀγνώστους, ἤτοι τό:

$$[\alpha\alpha]x+[\alpha\beta]y+[\alpha\gamma]z+[\alpha t]=0$$
$$[\alpha\beta]x+[\beta\beta]y+[\beta\gamma]z+[\beta t]=0$$
$$[\alpha\gamma]x+[\beta\gamma]y+[\gamma\gamma]z+[\gamma t]=0$$

ἐργαζόμενοι κατ' ἀνάλογον τρόπον, καὶ εἰσάγοντες τὸν συμβολισμόν :

$$[\gamma t.1] - \frac{[\beta\gamma.1]}{[\beta\beta.1]}\,[\beta t.1] = [\gamma t.2]$$

εὑρίσκομεν :

$$\boxed{z = -\frac{[\gamma t.2]}{[\gamma\gamma.2]}} \quad \text{καὶ } [\gamma\upsilon]=0.$$

Διὰ τῶν διαδοχικῶν αὐτῶν ἀπαλοιφῶν, εὑρίσκομεν καὶ γενικώτερον τὰς τιμὰς τῶν x_1, x_2, x_3... ἐξ ἰσαρίθμων κανονικῶν ἐξισώσεων, ὥστε νὰ δυνάμεθα συνοπτικῶς νὰ γράψωμεν διὰ τὰς διαφόρους περιπτώσεις :

1ον) Ἑνὸς ἀγνώστου : $\quad x_1 = -\dfrac{[\alpha t]}{[\alpha\alpha]}$ καὶ $[\alpha\upsilon]=0$

2ον) Δύο ἀγνώστων : $\quad x_2 = -\dfrac{[\beta t.1]}{[\beta\beta.1]}$ καὶ $\begin{matrix}[\alpha\upsilon]=0\\ [\beta\upsilon]=0\end{matrix}$

3ον) Τριῶν ἀγνώστων : $\quad x_3 = -\dfrac{[\gamma t.2]}{[\gamma\gamma.2]}$, καὶ $\begin{matrix}[\alpha\upsilon]=0\\ [\beta\upsilon]=0\\ [\gamma\upsilon]=0\end{matrix}$

Καὶ ν ἀγνώστων : $\quad x_\nu = -\dfrac{[\vartheta t.(\nu-1)]}{[\vartheta\vartheta.(\nu-1)]}$ καὶ $\begin{matrix}[\alpha\upsilon]=0\\ [\beta\upsilon]=0\\ \vdots\\ [\vartheta\upsilon]=0\end{matrix}$

Τοὺς τύπους τούτους ἔδωσεν ὁ Gauss. Μὲ κατάλληλον δὲ διάταξιν τῶν σχετικῶν πράξεων, δυνάμεθα νὰ ἐξοικονομοῦμεν χρόνον κατὰ τοὺς ὑπολογισμούς.

---

(1) Δυνάμεθα νὰ κάμωμεν ἀναλόγους σκέψεις μὲ τὰς τῆς ὑποσημειώσεως τῆς σελ. 69.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'.

ΓΕΝΙΚΕΥΣΙΣ ΕΝΝΟΙΩΝ ΚΑΙ ΤΥΠΩΝ

Γενίκευσις τοῦ τύπου τοῦ μέσου σφάλματος.

Ὅταν χρησιμοποιοῦμεν τὴν μέθοδον τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων ἐπὶ ἐμμέσων παρατηρήσεων, ἐμφανίζονται ὅπως εἴδομεν ἐκτὸς τῶν πιθανῶν σφαλμάτων υ τῶν ἀπ' εὐθείας παρατηρήσεων, καὶ *ἔμμεσα σφάλματα ἢ ἀσυμφωνίαι* W, εἰς τὰ μεγέθη τὰ ὁποῖα προσδιορίζονται δι' ὑπολογισμοῦ. Κατὰ συνέπειαν, πρέπει ἐνταῦθα νὰ διακρίνωμεν δύο μέτρα ἐκτιμήσεως τῶν παρατηρήσεων καὶ δή: *τὸ μέσον σφάλμα τῶν παρατηρουμένων μεγεθῶν καὶ τὸ μέσον σφάλμα τῶν ὑπολογιζομένων μεγεθῶν.*

Περὶ τοῦ μέσου σφάλματος τῶν παρατηρουμένων ἀπ' εὐθείας μεγεθῶν ἔγινεν ἤδη λόγος καὶ κυρίως ἐξητάσθη ἡ περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἄγνωστος τιμὴ εἶναι μία—ὅταν πρόκειται ἐν γένει περὶ ἀριθμητικοῦ μέσου. Ἀλλὰ καθίσταται φανερὸν ὅτι εἶναι ἀναγκαία μία ἐπέκτασις τοῦ τύπου ἐκείνου τοῦ μέσου σφάλματος τῶν παρατηρουμένων μεγεθῶν. Διότι, ἂν ἀναλογισθῶμεν ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν x, y, z... αἵτινες προσδιορίζονται ἐκ τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (62) ἢ (62') μᾶς βοηθοῦν εἰς τὸ νὰ προσδιορίσωμεν ἐξ ὑστέρου, ἐκ τῶν ἐξισώσεων τῶν σφαλμάτων (59), τὰ υ_1, υ_2, ...υ_n, τότε ἐννοοῦμεν τὴν ἀκόλουθον ἀλήθειαν. Ὅτι δηλαδή, τὰ ἐμφανιζόμενα σφάλματα υ, κατὰ τὰς ἀπ' εὐθείας μετρήσεις T, ἐπιδροῦν εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν ἀγνώστων x,y,z,..., οὕτως ὥστε, ὅσον μικρότερα εἶναι ταῦτα, τόσον ἀκριβέστεραι εἶναι αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων. Ἐξ αὐτῶν δὲ ἐκλέγομεν ἐκεῖνα διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει : $[\upsilon\upsilon]$=ἐλάχιστον.

Ζητοῦμεν δηλαδὴ νὰ εὕρωμεν τὸν γενικὸν τύπον ὅστις μᾶς δίδει τὸ μέσον σφάλμα τῶν παρατηρουμένων μεγεθῶν T, συναρτήσει τῶν διορθώσεων υ αἱ ὁποῖαι παρουσιάζονται κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν παρατηρήσεων αὐτῶν.

Ὡς γνωστόν, εἰς τὴν μερικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν πρόκειται περὶ προσδιορισμοῦ, ἐκ n ἐξισώσεων, ἑνὸς μόνον ἀγνώστου x, δηλαδὴ ὅταν δίδωνται αἱ ἐξισώσεις τῶν σφαλμάτων:

$$a_i x + t_i - \upsilon_i = 0 \qquad (i=1,2,\ldots 4)$$

τότε, ἄν ἀντὶ τῶν $a_i x$ θέσωμεν τὸ T, ὁ τύπος

$$m^2 = \frac{[\upsilon\upsilon]}{n-1}$$

δίδει τὸ μέσον σφάλμα μιᾶς παρατηρήσεως. Ἐὰν ὅμως ἔχωμεν γενικώτερον τὴν περίπτωσιν n ἐξισώσεων τῶν σφαλμάτων αἱ ὁποῖαι περιέχουν ν ἀγνώστους, ποῖος τύπος δίδει τὸ μέσον σφάλμα μιᾶς τοιαύτης παρατηρήσεως ;

Λέγομεν ὅτι εἰς τὴν γενικὴν αὐτὴν περίπτωσιν τὸ *μέσον σφάλμα μιᾶς παρατηρήσεως δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου* :

$$m^2 = \frac{[\upsilon\upsilon]}{n-\nu} \qquad (66)$$

ὅπου n—ν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μὴ ἀνεξαρτήτων πρὸς ἀλλήλας ἐξισώσεων τῶν σφαλμάτων.

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι διὰ νὰ ἔχῃ πρακτικὸν νόημα ἡ ἐφαρμογὴ τῆς ἀρχῆς τῆς ἰσοσταθμίσεως, εἶναι ἀνάγκη νὰ ἰσχύῃ πάντοτε ἡ σχέσις :

$$n > \nu \qquad (67)$$

Διότι ἂν τὸ $n < \nu$, τότε προφανῶς οἱ ἄγνωστοι x, y, z,.... εἶναι περισσότεροι τῶν ἐξισώσεων τῶν σφαλμάτων καὶ ἑπομένως τὸ πρόβλημα εἶναι ἀπροσδιόριστον. Ἐὰν πάλιν $n=\nu$, προσδιορίζονται μὲν ὅλοι οἱ ἄγνωστοι x,y,z,..., ἀλλὰ τὰ ἐξαγόμενα αὐτὰ στεροῦνται τῆς ἀκριβείας ἐκείνης τὴν ὁποίαν ἐπιδιώκομεν εἰς τοιαύτας περιπτώσεις.

Πρέπει λοιπὸν νὰ ἰσχύῃ ἡ (67) διὰ νὰ ἔχῃ ἐνταῦθα νόημα καὶ πρακτικὸν περιεχόμενον ἡ ἀρχὴ τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων. Διότι ἐὰν $n>\nu$, ἐκ τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων, αἱ ὁποῖαι πάντοτε σχηματίζονται, προσδιορίζονται τὰ σφάλματα $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots. \upsilon_n$ καὶ ὅταν ὁ ἀριθμὸς n τῶν παρατηρήσεων αὐξάνῃ καὶ τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον, τότε τὸ μέσον σφάλμα πλησιάζει τὸ ἀληθὲς σφάλμα.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται φανερὸν ὅτι τὸ μέσον σφάλμα τῶν παρατηρήσεων θὰ εἶναι μία συνάρτησις τῆς μορφῆς :

$$m = \sigma\ ([\upsilon\upsilon],\ n,\ \nu)$$

διὰ τὴν ὁποίαν θὰ ἰσχύουν οἱ ὡς ἄνω διατυπωθέντες περιορισμοὶ καὶ ἐπὶ πλέον θὰ περιλαμβάνῃ ὡς μερικὴν περίπτωσιν καὶ τὸν μέχρι τοῦδε χρησιμοποιηθέντα τύπον τοῦ μέσου σφάλματος.

Πράγματι ὁ τύπος:

$$m^2=\frac{[\upsilon\upsilon]}{n-\nu}$$

πληροῖ ὅλας τὰς ζητουμένας ἀπαιτήσεις. Διότι οὗτος μᾶς δίδει:

1) Διὰ $\nu=1$: $m^2=\frac{[\upsilon\upsilon]}{n-1}$

ἤτοι, τὸν χρησιμοποιηθέντα ἤδη τύπον.

2) Διὰ $n>\nu$ $m^2=\frac{[\upsilon\upsilon]}{\text{ἀρνητ.}}=$ ἀρνητικός.

Δηλαδὴ τὸ $m=$φανταστικόν.

3) Διὰ $n=\nu$, θὰ εἶναι καί: $\upsilon_1=\upsilon_2=\ldots=\upsilon_n=0$

$$m^2=\frac{[\upsilon\upsilon]}{n-\nu}=\frac{0}{0}=\text{ἀπροσδιόριστον.}$$

Πρᾶγμα τὸ ὁποῖον μαρτυρεῖ ὅτι ὁ μηδενισμὸς τῶν $\upsilon_1, \upsilon_2,\ldots,\upsilon_n$ εἶναι φαινομενικὸς καὶ δὲν φανερώνει ἀκρίβειαν των μετρήσεων.

4) Ὅταν $n>\nu$, ἔχομεν: $m^2=\frac{[\upsilon\upsilon]}{\text{θετ.}}$

Ἑπομένως τὸ m εἶναι πάντοτε πραγματικὸς ἀριθμός. Ὅσον δὲ ὁ ἀριθμὸς n τῶν παρατηρήσεων αὐξάνει, τόσον καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν υ αὐξάνει καὶ κατὰ συνέπειαν ὁ προσδιορισμὸς τοῦ m εἶναι ἀσφαλέστερος.

Μέσον σφάλμα καὶ βάρος τῶν ὑπολογιζομένων ἀγνώστων.

Προκειμένου νὰ εὕρωμεν τὸ μέσον σφάλμα τῶν ὑπολογιζομένων ἀγνώστων $x, y, z,\ldots$ ἀρκεῖ νὰ σκεφθῶμεν ὅτι τὰ $\upsilon_1, \upsilon_2,\ldots\upsilon_n$ τῶν ἀμέσων παρατηρήσεων $T_1, T_2,\ldots T_n$, ἐπιδροῦν ἐπ' αὐτῶν ἐμμέσως, εἰς τρόπον ὥστε ἐπιφέρουν μίαν ἀπόκλισιν ἐκ τῶν ἀληθῶν τιμῶν αὐτῶν. Ἑπομένως, τὸ μέσον σφάλμα m τῶν $x, y, z,\ldots$ ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν μέσων σφαλμάτων m_n τῶν παρατηρήσεων, δηλαδὴ ἐκ τῶν διορθώσεων υ τῶν ἀπ' εὐθείας μετρήσεων T.

Ἂς ὑποθέσωμεν χάριν ἁπλότητος ὅτι ἡ ἄγνωστος x ἐξαρτᾶται ἐκ $T_1, T_2,\ldots T_n$ μετρήσεων μὲ μέσα σφάλματα $m_1, m_2,\ldots m_n$. Ἤτοι:

$$x=\sigma\,(T_1, T_2, \ldots T_n) \tag{68}$$

Ἐὰν τὰ ἀληθῆ σφάλματα ἦσαν $\varepsilon_1, \varepsilon_2,\ldots \varepsilon_n$, τότε τὸ ἀληθὲς σφάλμα E τὸ ὁποῖον θὰ παρουσιάζετο εἰς τὴν x, θὰ δίδεται ὑπὸ τῆς διαφορᾶς:

$$E=\sigma\,(T_1\pm\varepsilon_1, T_2\pm\varepsilon_2,\ldots T_n\pm\varepsilon_n)-\sigma\,(T_1, T_2,\ldots T_n).$$

Ἐὰν τὸν μειωτέον τῆς διαφορᾶς αὐτῆς τὸν ἀναπτύξωμεν κατὰ τὸν τύπον τοῦ Taylor καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ ε εἶναι πολὺ μικρά, ὥστε νὰ δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τὰς δυνάμεις ἀνωτέρας τάξεως, τότε ὁ τύπος :

$$E = \pm \frac{\partial\sigma}{\partial T_1} \varepsilon_1 \pm \frac{\partial\sigma}{\partial T_2} \varepsilon_2 \pm \ldots \pm \frac{\partial\sigma}{\partial T_n} \varepsilon_n \tag{69}$$

μᾶς δίδει *τὸ ἀληθὲς σφάλμα τοῦ ὑπολογιζομένου μεγέθους* x. Θέτοντες:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial T_1} = t_1, \ \ldots\ldots, \ \frac{\partial\sigma}{\partial T_n} = t_n \tag{70}$$

ὁ (69) γίνεται :

$$E = \pm t_1\, \varepsilon_1 \pm t_2\, \varepsilon_2 \pm \ldots \pm t_n\, \varepsilon_n \tag{69'}$$

Ἐνταῦθα ὅμως μᾶς δίδονται τὰ μέσα σφάλματα τῶν $T_1, T_2, \ldots T_n$ ἤτοι τὰ $m_1, m_2, \ldots m_n$. Δυνάμεθα δέ, συμφώνως πρὸς τὰ προηγουμένως λεχθέντα, νὰ θέσωμεν κατὰ προσέγγισιν ὡς *μέσον σφάλμα* m_x *τοῦ ὑπολογιζομένου μεγέθους* x, τὴν σχέσιν :

$$m_x{}^2 = \frac{[E\,E]}{n} = t_1{}^2 \frac{[\varepsilon_1\, \varepsilon_1]}{n} + t_2{}^2 \frac{[\varepsilon_2\, \varepsilon_2]}{n} + \ldots =$$

$$= t_1{}^2\, m_1{}^2 + t_2{}^2\, m_2{}^2 + \ldots + t_n{}^2 m_n{}^2 = [t^2 m^2] \tag{71}$$

καὶ ἐὰν μ εἶναι τὸ μέσον σφάλμα τῆς μονάδος βάρους, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{1}{P_x} = \frac{m^2}{\mu^2} = \frac{m_1{}^2}{\mu^2}\, t_1{}^2 + \ldots + \frac{m_n{}^2}{\mu^2}\, t_n{}^2 \tag{72}$$

ἐὰν δὲ εἰσαγάγωμεν τὰ βάρη p καὶ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν (24), ἡ (72) γίνεται :

$$\frac{1}{P_x} = \frac{t_1{}^2}{p_1} + \frac{t_2{}^2}{p_2} + \ldots = \left[\frac{tt}{p}\right] \tag{73}$$

Μέσον σφάλμα μονάδος βάρους. Ἐξισώσεις τῶν βαρῶν.

Γενικώτερον, ὅταν ἔχωμεν νὰ ἰσοσταθμίσωμεν παρατηρήσεις διαφόρου ἀκριβείας, τότε καταλήγομεν εἰς κανονικὸν σύστημα τῆς μορφῆς (62) καὶ τὸ *μέσον σφάλμα τῆς μονάδος βάρους* θὰ εἶναι :

$$\mu^2 = \frac{[pvv]}{n - \nu} \tag{74}$$

Ἐὰν ἤδη ὑποτεθῇ, ὅτι αἱ ἐξισώσεις τῶν σφαλμάτων περιέχουν δύο ἀγνώστους, θὰ ἔχωμεν τὸ κανονικὸν σύστημα :

$$\begin{aligned} [p\alpha\alpha]\, x + [p\alpha\beta]\, y + [p\alpha t] &= 0 \\ [p\alpha\beta]\, x + [p\beta\beta]\, y + [p\beta t] &= 0 \end{aligned} \tag{75}$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τὸ μέσον σφάλμα τοῦ μεγέθους x, πρέπει νὰ εὕρωμεν μίαν σχέσιν μεταξὺ τῶν παρατηρήσεων καὶ τοῦ μεγέθους τὸ ὁποῖον πρόκειται νὰ ὑπολογίσωμεν. Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτόν, πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην τῶν (75) ἐπὶ μίαν, προσωρινῶς ἄγνωστον, ἀλλὰ σταθερὰν ποσότητα Q_{11} καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ Q_{12}—καλουμένας *συντελεστὰς βάρους*—καὶ τὰς προσθέτομεν :

$$([p\alpha\alpha]\, Q_{11} + [p\alpha\beta]\, Q_{12})\, x + ([p\alpha\beta]\, Q_{11} + [p\beta\beta]\, Q_{12})\, y = \\ = - ([p\alpha t]\, Q_{11} + [p\beta t]\, Q_{12})$$

Πρὸς προσδιορισμὸν τῶν Q θέτομεν :

$$\left.\begin{array}{l} [p\alpha\alpha]\, Q_{11} + [p\alpha\beta]\, Q_{12} = 1 \\ [p\alpha\beta]\, Q_{11} + [p\beta\beta]\, Q_{12} = 0 \end{array}\right\} \qquad (76)$$

Ἐξ αὐτῶν ὁρίζονται τὰ Q_{11} καὶ Q_{12} καὶ ἀκόμη αἱ σχέσεις αὗται δίδουν τὴν ζητουμένην ἐξίσωσιν μεταξὺ x καὶ τῶν παρατηρηθέντων μεγεθῶν, τὰ ὁποῖα περιέχονται εἰς τὴν t (*). Δηλαδὴ ἔχομεν :

$$x = - [p\alpha t]\, Q_{11} - [p\beta t]\, Q_{12}.$$

Ἀντιστοίχως ἐργαζόμενοι διὰ τὸ μέσον σφάλμα τοῦ μεγέθους y εὑρίσκομεν :

$$\left.\begin{array}{l} [p\alpha\alpha]\, Q_{21} + [p\alpha\beta]\, Q_{22} = 0 \\ [p\alpha\beta]\, Q_{21} + [p\beta\beta]\, Q_{22} = 1 \end{array}\right\} \qquad (76')$$

Ἂν εἴχομεν τρεῖς κανονικὰς ἐξισώσεις θὰ τὰς ἐξισώναμεν διαδοχικῶς διὰ τῶν 1,0,0· 0,1,0· καὶ 0,0,1.

Αἱ σχέσεις (76) καὶ (76'), λέγονται *ἐξισώσεις τῶν βαρῶν ἢ τῶν ἀντιστρόφων βαρῶν*, ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὸ σύστημα (75).

Ἐὰν εἰς τὰ ἐξισώσεις τῶν βαρῶν ἐφαρμόσωμεν τὸν νόμον τῆς μεταδόσεως τοῦ σφάλματος, ἐὰν δηλαδὴ ἐργασθῶμεν μὲ τὴν βοήθειαν τῶν *συντελεστῶν βάρους*, λαμβάνομεν *τὸ μέσον σφάλμα τῆς πιθανωτέρας τιμῆς τῶν ἀγνώστων*, ἤτοι :

$$m_x = \mu \sqrt{Q_{11}} \quad \text{καὶ} \quad m_y = \mu \sqrt{Q_{22}}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἔχομεν ἐκ τοῦ τύπου (72) τὴν σχέσιν :

$$m_x^{\,2} = \mu^2 \frac{1}{p_x}$$

δι' αὐτὸ τὰ βοηθητικὰ μεγέθη Q ὀνομάζονται *ἀντίστροφα βάρη*.

(*) Διότι, ὡς γνωστόν, $t_i = T_i - f_i (X_0, Y_0, Z_0, \ldots)$.

Πορεία ἐργασίας.

Συνοψίζοντες ὅλα ὅσα ἐλέχθησαν ἀνωτέρω περὶ τῆς ἰσοσταθμίσεως σειρᾶς ἐμμέσων παρατηρήσεων, δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τὸ ἀκόλουθον διάγραμμα πορείας τῆς ὅλης ἐργασίας.

α') Ἐὰν αἱ ἐξισώσεις τῶν σφαλμάτων δὲν δίδωνται ὑπὸ γραμμικὴν μορφήν, τὰς φέρομεν εἰς τὴν τοιαύτην μορφήν. Πρὸς τοῦτο εἰσάγομεν τὰς ἀπειροστὰς διορθώσεις x, y, z,..., οὕτως ὥστε νὰ δυνάμεθα νὰ κάμωμεν χρῆσιν τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ Taylor, ὁπότε ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις ταύτας ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots-t=\upsilon.$$

2) Ἐκ τούτων, σχηματίζομεν τὰς κανονικὰς ἐξισώσεις :

$$[p\alpha\alpha]x+[p\alpha\beta]y+[p\alpha\gamma]z+\ldots-[p\alpha t]=0$$

ἀφοῦ ὑπολογίσομεν τά : $[p\alpha\alpha]$, $[p\alpha\beta]$,....

3) Λύομεν τὰς κανονικὰς ἐξισώσεις καὶ εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων x, y, z,... καὶ ἐξ αὐτῶν τάς : $X=Xo+x$, $Y=Yo+y$,....

4) Ὑπολογίζομεν ἀκολούθως τὰ ἀθροίσματα $[\upsilon\upsilon]$ καὶ ἀντιστοίχως $[p\upsilon\upsilon]$ ἐκ τῶν ἐξισώσεων τῶν σφαλμάτων καὶ ἐκτελοῦμεν τὰς δοκιμάς :

$$[\upsilon\upsilon]=[tt]+[\alpha t]x+[\beta t]y+[\gamma t]z+\ldots$$

καὶ ἀντιστοίχως :

$$[p\upsilon\upsilon]=[ptt]+[p\alpha t]x+[p\beta t]y+[p\gamma t]z+\ldots.$$

5) Ἐν συνεχείᾳ ὑπολογίζομεν τὰ μέσα σφάλματα :

$$m^2=\frac{[\upsilon\upsilon]}{n-\nu} \quad \text{καὶ} \quad \mu^2=\frac{[p\upsilon\upsilon]}{n-\nu}$$

6) Σχηματίζομεν τὰς ἐξισώσεις τῶν βαρῶν :

$$[p\alpha\alpha]Q_{11}+[p\alpha\beta]Q_{12}+\ldots=1$$

καὶ ἐξ αὐτῶν εὑρίσκομεν τοὺς συντελεστὰς βαρῶν Q_{11}, Q_{12},... καὶ κάμνομεν τὴν δοκιμήν : $Q_{\kappa\lambda}=Q_{\lambda\kappa}$ καὶ

7) Προσδιορίζομεν τὰ μέσα σφάλματα τῶν δι' ὑπολογισμοῦ προκυπτόντων μεγεθῶν. Ἤτοι :

$$m^2_x=\mu^2 Q_{11},\ m^2_y=\mu^2 Q_{22},\ m^2_z=\mu^2 Q_{33},\ldots$$

Παράδειγμα 1ον. Ἔστω ὅτι ἐμετρήθη 11κις ἀπὸ τοῦ Νοεμβρίου 1949 ἕως Σεπτεμβρίου 1950 ἡ ὁριζόντιος κάμψις ἑνὸς μεσημβρινοῦ τηλεσκοπίου διὰ παρατηρήσεως ἀστέρων ἐξ ἀνακλάσεως καὶ εὑρέθησαν τὰ ἀκόλουθα ἐξαγόμενα, ἐκπεφρασμένα εἰς δευτερόλεπτα τόξου :

Ἡμερομηνία	Θερμοκρ. Κελσ.	Παρατ. τιμὴ	Ἐξισ. συνθηκῶν
1949 Νοεμ. 18	$-0^0,6$	$0'',39$	$x-0,6y=0'',39$
Δεκ. 13	$-5,4$	$0,37$	$x-5,4y=0,37$
1950 Φεβ. 6	$+1,2$	$0,21$	$x+1,2y=0,21$
Μαρτ. 27	$+4,4$	$0,60$	$x+4,4y=0,60$
Ἀπρ. 30	$+9,3$	$0,70$	$x+9,3y=0,70$
Μαΐου 29	$+11,1$	$0,71$	$x+11,1y=0,71$
Ἰουν. 12	$+16,3$	$0,63$	$x+16,2y=0,63$
Ἰουν. 29	$+20,4$	$1,12$	$x+20,4y=1,12$
Αὐγ. 15	$+15,5$	$1,32$	$x+15,5y=1,32$
Αὐγ. 28	$+19,0$	$1,13$	$x+19,0y=1,13$
Σεπτ. 13	$+14^0,1$	$1'',41$	$x+14,1y=1'',41$

Ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς κάμψεως εἰς θερμοκρασίαν 0^0, *ἡ μεταβολὴ αὐτῆς ἀνὰ* 1^0 *καὶ τὰ μέσα σφάλματα* μ_x *καὶ* μ_y.

Μία σύντομος καὶ ἐπιφανειακὴ σύγκρισις τῶν ὡς ἄνω θερμοκρασιῶν δεικνύει ὅτι αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς κάμψεως ἐπιρρεάζονται ἀπὸ τὴν θερμοκρασίαν. Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὴν κάμψιν εἰς 0^0 καὶ διὰ τοῦ y τὴν μεταβολὴν τῆς κάμψεως ἀνὰ 1^0, τότε σχηματίζομεν τὰς ὡς ἄνω ἐξισώσεις τῶν συνθηκῶν, δεχόμενοι ὅτι ὑπάρχει γραμμικὴ σχέσις μεταξὺ τῶν δύο μεταβλητῶν. Ἐκ τούτων ἔχομεν τὰς δύο κανονικὰς ἐξισώσεις:

$$11,00x+105,30y=+8,59$$
$$105,30x+1741,93y=+109,98.$$

Ἡ λύσις τοῦ συστήματος δίδει τὰς τιμάς:

$$m^2=0,07 \qquad x=+0'',419\pm0'',123$$
$$Q_{11}=0,22 \qquad y=+0'',030\pm0'',010$$
$$Q_{22}=0,0014.$$

Ὁ συντελεστὴς y ἔχει τιμὴν 4πλασίαν τοῦ μέσου σφάλματός του καὶ ἑπομένως εἶναι αὕτη ἀξιόπιστος, ἡ δὲ κάμψις ἔχει τιμὴν $0'',4$ εἰς 0^0 καὶ αὐξάνει ἀνὰ 1^0 κατὰ $0'',038$.

Τὰ μέσα σφάλματα μ_x, μ_y, τῶν δύο ἀγνώστων, συμφώνως πρὸς τοὺς τύπους $\mu^2_x=m^2Q_{11}$, $\mu^2_y=m^2Q_{22}$

εἶναι: $\mu^2_x=0,0154$ καὶ $\mu^2_y=0,0001$.

Παράδειγμα 2ον. «Ἔστω ὅτι δίδονται αἱ γραμμικαὶ συναρτήσεις:

$$x - y + 2z = V_1$$
$$3x + 2y - 5z = V_2$$
$$4x + y + 4z = V_3$$
$$-x + 3y + 3z = V_3$$

καὶ ὅτι διὰ τῶν παρατηρήσεων τῶν V_1, V_2, V_3, V_4 εὑρέθησαν αἱ τιμαὶ $T_1=3$, $T_2=5$, $T_3=21$, $T_4=14$.

Ζητοῦνται τὰ βάρη p_x, p_y, p_z *καθὼς καὶ τιμαὶ τῶν* x, y, z».

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις τῶν συνθηκῶν:

$$F_1: \quad x - y + 2z - 3 = 0$$
$$F_2: \quad 3x + 2y - 5z - 5 = 0$$
$$F_3: \quad 4x + y + 4z - 21 = 0$$
$$F_4: \quad -x + 3y + 3z - 14 = 0$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν πρώτην τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων, πολλαπλασιάζομεν τὰς ὡς ἄνω ἐξισώσεις ἀντιστοίχως ἐπὶ 1, 3, 4 καὶ -1, δηλαδὴ ἐπὶ τὰς τινὰς τῶν:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\partial F_4}{\partial x}$$

ὁπότε λαμβάνομεν:

$$x - y + 2z - 3 = 0$$
$$9x + 6y - 15z - 15 = 0$$
$$16x + 4y + 16z - 84 = 0$$
$$x - 3y - 3z + 14 = 0$$

ταύτας προσθέτομεν κατὰ μέλη καὶ εὑρίσκομεν:

$$27x + 6y - 0 - 88 = 0,$$

διότι $[\alpha\alpha]=27$, $[\alpha\beta]=6$, $[\alpha\gamma]=0$ καὶ $[\alpha t]=88$.

Ἐργαζόμενοι καθ' ὅμοιον τρόπον ἔχομεν τὴν δευτέραν κανονικὴν ἐξίσωσιν :

$$6x+15y+z-70=0$$

διότι $[\alpha\beta]=6$, $[\beta\beta]=15$, $[\beta\gamma]=1$ καὶ $[\beta t]=-70$. Καὶ τέλος τὴν :

$$0+y+54z-107=0$$

Ἐξ αὐτῶν σχηματίζομεν τὰς ἐξισώσεις τῶν βαρῶν. Διὰ τὸ x ἔχομεν :

$$\begin{aligned} 27Q_{11}+6Q_{12}&=1\\ 6Q_{11}+15Q_{12}+Q_{13}&=0\\ Q_{12}+54Q_{13}&=0. \end{aligned}$$

Διὰ κανονικῆς ἀπαλοιφῆς εὑρίσκομεν :

$$Q_{11}=\frac{809}{19899} \quad \text{καὶ} \quad p_x=\frac{19899}{809}=24,597;$$

Διὰ τὸ y :

$$\begin{aligned} 27Q_{11}+6Q_{12}&=0\\ 6Q_{11}+15Q_{12}+Q_{13}&=1\\ Q_{12}+54Q_{13}&=0 \end{aligned}$$

ἐξ οὗ :

$$Q_{13}=\frac{54}{737} \quad \text{καὶ} \quad p_y=\frac{737}{54}=13,648.$$

Διὰ τὸ z :

$$\begin{aligned} 27Q_{11}+6Q_{12}&=0\\ 6Q_{11}+15Q_{12}+Q_{13}&=0\\ Q_{12}+54Q_{13}&=1 \end{aligned}$$

ἐξ οὗ :

$$Q_{13}=\frac{41}{2211} \quad \text{καὶ} \quad p_z=\frac{2211}{41}=53,927.$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ x,y,z δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν μίαν ἐκ τῶν γνωστῶν μεθόδων.

Διὰ νὰ ἀπαλείψωμεν π.χ. τὸ x ἀπὸ τὰς κανονικὰς ἐξισώσεις:

$$A: \quad 27x+6y-88=0$$
$$B: \quad 6x+15y+z-70=0$$
$$\Gamma: \quad y+54z-107=0$$

πολλαπλασιάζομεν τὴν A ἐπὶ $-\frac{6}{27}$ καὶ λαμβάνομεν

$$-6x-1{,}33y+19{,}55=0.$$

Ἂν αὐτὴν τὴν προσθέσωμεν εἰς τὴν B θὰ ἔχωμεν τὰς ἅπαξ ἀναχθείσας κανονικὰς ἐξισώσεις:

$$B.1: \quad 13{,}67y+z-50{,}45=0$$
$$\Gamma.1: \quad y+54z-107=0.$$

Πολλαπλασιάζομεν τὴν B.1 ἐπὶ $-\frac{1}{13{,}67}$ ὅτε ἔχομεν:

$$-y-0{,}07z+3{,}69=0$$

τὴν ὁποίαν προσθέτοντες εἰς τὴν Γ.1 λαμβάνομεν τὴν:

$$\Gamma.2: \quad 53{,}93z-103{,}31=0.$$

Ἐκ τῆς Γ.2 ἔχομεν:

$$z=\frac{103{,}31}{53{,}93}=1{,}91$$

Ἐκ τῆς B:

$$y=\frac{48{,}54}{13{,}67}=3{,}55$$

Ἐκ τῆς A:

$$x=\frac{47{,}86}{27}=2{,}47$$

Παράδειγμα 3ον. «Ζητοῦνται νὰ προσδιορισθοῦν αἱ διαφοραὶ τῶν ὀρθῶν ἀναφορῶν τῶν ἀστέρων A B Γ καὶ Δ ὅταν δίδωνται ἐκ παρατηρήσεων αἱ ἀκόλουθοι ἕξ διαφοραί

$AB = 0^{\omega}\ 30^{\lambda}\ 16^{\delta} = T_1$ $\qquad$ $B\Gamma = 0^{\omega}\ 12^{\lambda}\ 37^{\delta} = T_4$

$A\Gamma = 0\ \ 42\ \ 42 = T_2$ $\qquad$ $B\Delta = 0\ \ 33\ \ 40 = T_5$

$A\Delta = 1\ \ 03\ \ 58 = T_3$ $\qquad$ $\Gamma\Delta = 0\ \ 21\ \ 02 = T_6$

Πρὸς τοῦτο ἐκλέγομεν ὡς X_0, Y_0, Z_0 τὰς τιμάς : T_1, T_4, T_6 καὶ σχηματίζομεν τὰς ἐξισώσεις τῶν σφαλμάτων :

$$\begin{array}{lll}
t_1 + \upsilon_1 = X & \upsilon_1 = (X_0 - T_1) \quad + x & = 0^{\delta} + x \\
t_2 + \upsilon_2 = X + Y & \upsilon_2 = (X_0 + Y_0 - T_2) + x + y & = 11 + x + y \\
t_3 + \upsilon_3 = X + Y + Z & \upsilon_3 = (X_0 + Y_0 + Z_0 - T_3) + x + y + z & = -3 + x + y + z \\
t_4 + \upsilon_4 = Y & \upsilon_4 = (Y_0 - T_4) \quad + y & = 0 \quad + y \\
t_5 + \upsilon_5 = Y + Z & \upsilon_5 = (Y_0 + Z_0 - T_5) + y + z & = -1 + y + z \\
t_6 + \upsilon_6 = Z & \upsilon_6 = (Z_0 - T_6) \quad + z & = 0 \quad + z
\end{array}$$

Ἐὰν διὰ τῶν α, β, γ παραστήσωμεν τοὺς συντελεστὰς τῶν x,y,z εἰς τὰς ὡς ἄνω ἐξισώσεις καὶ θέσωμεν :

$$\Sigma = \alpha + \beta + \gamma$$

ἔχομεν τὴν ἀκόλουθον διάταξιν τῶν συντελεστῶν :

	α	β	γ	Σ	t	αα	αβ	αγ	αΣ	αt	ββ
1	+1	0	0	+1	0	+1	0	0	+1	0	0
2	+1	+1	0	+2	+11	+1	+1	0	+2	+11	+1
3	+1	+1	+1	+3	—3	+1	+1	+1	+3	—3	+1
4	0	+1	0	+1	0	0	0	0	0	0	+1
5	0	+1	+1	+2	—1	0	0	0	0	0	+1
6	0	0	+1	+1	0	0	0	0	0	0	0
	+3	+4	+3	+10	+7	+3	+2	+1	+6	+8	+4

	βγ	βΣ	βt	γγ	γΣ	γt	tt	tΣ
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	+2	+11	0	0	0	+121	+22
3	+1	+3	—3	+1	+3	—3	+9	—9
4	0	+1	0	0	0	0	0	0
5	+1	+2	—1	+1	+2	—1	+1	—2
6	0	0	0	+1	+1	0	0	0
	+2	+8	+7	+3	+6	—4	+131	+11

Λαμβάνομεν τὰς ἀκολούθους κανονικὰς ἐξισώσεις :

$$\begin{array}{r} 3x+2y+\ z+8=0 \\ 2x+4y+2z+7=0 \\ x+2y+3z-4=0 \\ \hline \text{Ἄθροισμα: } 6x+8y+6z+11=0 \end{array}$$

Πρὸς λύσιν αὐτοῦ χρησιμοποιοῦμεν τὴν μέθοδον τοῦ Gauss. Πολλαπλασιάζομεν τὴν α'. ἐπὶ $-\frac{2}{3}$, κατόπιν ἐπὶ $-\frac{1}{3}$ καὶ τέλος ἐπὶ -2, τὰς οὕτω δὲ προκυπτούσας ἐξισώσεις προσθέτομεν ἀντιστοίχως εἰς τὰς τρεῖς ὑπολοίπους, ὁπότε λαμβάνομεν τὸ ἀνηγμένον κανονικὸν σύστημα :

$$\begin{array}{r} \frac{8}{3}y+\frac{4}{3}z+\frac{5}{3}=0 \\ \frac{4}{3}y+\frac{8}{3}z-\frac{20}{3}=0 \\ \hline 4y+4z-5=0 \end{array}$$

Τὴν α'. τῶν ἐξισώσεων τούτων τὴν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ $-\frac{1}{2}$, κατόπιν ἐπὶ $-\frac{3}{2}$ καὶ ταύτας προσθέτομεν ἀντιστοίχως εἰς τὰς ἄλλας δύο, ὁπότε τὸ σύστημα τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων γίνεται :

$$\begin{array}{r} \frac{6}{3}z-\frac{45}{6}=0 \\ \hline 2z-\frac{15}{2}=0 \end{array}$$

Ἐκ τούτων δὲ εὑρίσκομεν : $z=+3^{\delta},75$.

Ἐὰν τὴν τιμὴν ταύτην θέσωμεν εἰς τὸ ἀμέσως ἀνωτέρω σύστημα, λαμβάνομεν : $y=-2^{\delta},50$, καὶ ἂν τὰς τιμὰς y καὶ z θέσωμεν εἰς τὸ μὴ ἀνηγμένον σύστημα τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων, εὑρίσκομεν ὅτι $x=-2^{\delta},25$.

Ἤδη ἐκ τῶν ἐξισώσεων τῶν σφαλμάτων εὑρίσκομεν τὰ v_1, v_2, …, v_6. Ἤτοι :

	v	vv
1	$-2{,}25$	5,06
2	$+6{,}25$	39,06
3	$-4{,}00$	16,00
4	$-2{,}50$	6,25
5	$+0{,}25$	0,07
6	$+3{,}75$	14,06
		$[vv]=80{,}50$

Δοκιμή :

$[vv]=[7t]+[\alpha t]x+[\beta t]y+[\gamma t]z,$

$80.50=131.00-8\times 2.25-7\times 2.50$
$-4\times 3.75=80.50.$

$m^2=\frac{[vv]}{n-\nu}=\frac{80.50}{6-3}=26.83$ καὶ

$m=\pm 5^{\delta},18.$

Αἱ τρεῖς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος τῶν ἀντιστρόφων βαρῶν εἶναι :

$3Q_{11}+2Q_{12}+Q_{13}=1 \quad 3Q_{21}+2Q_{22}+Q_{23}=0 \quad 3Q_{31}+2Q_{32}+Q_{33}=0$

$2Q_{11}+4Q_{12}+2Q_{13}=0 \quad 2Q_{21}+4Q_{22}+2Q_{23}=1 \quad 2Q_{31}+4Q_{32}+2Q_{33}=0$

$Q_{11}+2Q_{12}+3Q_{13}=0 \quad Q_{21}+2Q_{22}+3Q_{23}=0 \quad Q_{31}+2Q_{32}+3Q_{33}=1$

Λύοντες δὲ ταύτας, λαμβάνομεν :

$Q_{11}=+0{,}50 \quad Q_{21}=-0{,}25 \quad Q_{31}=\ 0{,}00$

$Q_{12}=-0{,}25 \quad Q_{22}=+0{,}50 \quad Q_{32}=-0{,}25$

$Q_{13}=\ 0{,}00 \quad Q_{23}=-0{,}25 \quad Q_{33}=+0{,}50$

Δοκιμή :

$Q_{12}=Q_{21},\ Q_{13}=Q_{31},\ Q_{23}=Q_{32}$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ παρατηρήσεις $T_1, T_2, \ldots T_6$ εἶναι ἰσοβαρεῖς, ἔπρεπεν ὄντως νὰ ἔχωμεν : $Q_{11}=Q_{22}=Q_{33}$, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον καὶ συμβαίνει. Ἔχομεν ἀκόμη : $m^2_x=\mu^2 Q_{11}=26{,}83\times 0{,}50=13{,}42$ καὶ $m_x=\pm 3^{\delta}, 7$, ἀναλόγως δὲ καί : $m_Y=m_Z=\pm 3^{\delta}, 7$. Ἑπομένως αἱ πιθαναὶ τιμαὶ τῶν διαφορῶν τῶν ὀρθῶν ἀναφορῶν τῶν τεσσάρων ἀστέρων εἶναι :

$X=T_1+x+m_X=0^{\omega}\ 30^{\lambda}\ 13{,}8^{\delta}\pm 3{,}^{\delta}7$

$Y=T_4+y+m_Y=0\ \ 12\ \ 34{,}5\ \pm 3{,}7$

$Z=T_6+z+m_Z=0\ \ 21\ \ \ 5{,}8\ \pm 3{,}7$

ΣΥΝΟΠΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΤΥΠΩΝ ΤΩΝ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΩΝ

Παρατηρήσεις ἴσης ἀκριβείας.

Αον Ἁπλοῦν ἀριθμητικὸν μέσον.

Ἐξισ. τῶν σφαλμάτων	σφάλμ.	τετράγ.
$T=t_1+\upsilon_1$	υ_1	$\upsilon_1\upsilon_1$
$T=t_2+\upsilon_2$	υ_2	$\upsilon_2\upsilon_2$
....	..	...
$T_n=t_n+\upsilon_n$	υ_n	$\upsilon_n\upsilon_n$

Καν. Ἐξισ. $nT=[t]$ καὶ $[\upsilon]=0$ Ἄθροισμα $[\upsilon\upsilon]$

Λύσις : $T=\dfrac{[t]}{n}$

Μέσον σφάλμα μιᾶς παρατηρήσεως.....$m=\pm\sqrt{\dfrac{[\upsilon\upsilon]}{n-1}}$

Μέσον σφάλμα τοῦ ἁπλοῦ ἀριθμ. μέσου Τ...$M=\pm\sqrt{\dfrac{[\upsilon\upsilon]}{n(n-1)}}$

Βον Γραμμικαὶ ἐξισώσεις πολλῶν ἀγνώστων.

Ἐξισ. τῶν σφαλμάτων	σφάλμ.	τετράγ.
$\alpha_1x+\beta_1y=t_1+\upsilon_1$	υ_1	$\upsilon_1\upsilon_1$
$\alpha_2x+\beta_2y=t_2+\upsilon_2$	υ_2	$\upsilon_2\upsilon_2$
....	..	...
$\alpha_n x+\beta_n y=t_n+\upsilon_n$	υ_n	$\upsilon_n\upsilon_n$

Κανονικαὶ ἐξισώσεις : Ἄθροισμα $[\upsilon\upsilon]$

$$\left.\begin{array}{l}[\alpha\alpha]x+[\alpha\beta]y-[\alpha t]=0\\ [\alpha\beta]x+[\beta\beta]y-[\beta t]=0\end{array}\right\}$$ Μέσον σφάλμα μιᾶς παρατηρήσεως : $\mu=\pm\sqrt{\dfrac{[\upsilon\upsilon]}{n-2}}$

Ὑπολογισμὸς τοῦ μέσου σφάλματος τῶν μεγεθῶν x καὶ y.

$$\left.\begin{array}{l}[\alpha\alpha]Q_{11}+[\alpha\beta]Q_{12}=1\\ [\alpha\beta]Q_{11}+[\beta\beta]Q_{12}=0\end{array}\right\}$$ Μέσον σφάλμα τῆς τιμῆς x ..... $m_x=\mu\sqrt{Q_{11}}$

καί :

$$\left.\begin{array}{l}[\alpha\alpha]Q_{21}+[\alpha\beta]Q_{22}=0\\ [\alpha\beta]Q_{21}+[\beta\beta]Q_{22}=1\end{array}\right\}$$ Μέσον σφάλμα τῆς τιμῆς y ..... $m_y=\mu\sqrt{Q_{22}}$

ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟΝ ΤΩΝ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Παρατηρήσεις διαφόρου ἀκριβείας.

Αον Γενικὸν ἀριθμητικὸν μέσον

Ἐξισ. τῶν σφαλμάτων	βάρος	σφάλμ.	τετράγ.×βάρος
$T=t_1+v_1$	p_1	v_1	$p_1v_1v_1$
$T=t_2+v_2$	p_2	v_2	$p_2v_2v_2$
......	.	..	....
$T=t_n+v_n$	p_n	v_n	$p_n v_n v_n$

Καν. Ἐξισ. $[p]T=[pt]$ καὶ $[pv]=0$ Ἄθροισμα $[pvv]$

Λύσις : $T=\dfrac{[pt]}{[p]}$

Μέσον σφάλμα τῆς μονάδος βάρους......... $\mu=\pm\sqrt{\dfrac{[pvv]}{n-1}}$

Μέσον σφάλμα τοῦ γεν. ἀριθμ. μέσου T.... $M=\pm\dfrac{\mu}{\sqrt{[p]}}$

Βον Γραμμικαὶ ἐξισώσεις πολλῶν ἀγνώστων.

Ἐξισ. τῶν σφαλμάτων	βάρος	σφάλμ.	σφαλμ.×βάρος
$\alpha_1x+\beta_1y=t_1$	p_1	v_1	$p_1v_1v_1$
$\alpha_2x+\beta_2y=t_2$	p_2	v_2	$p_2v_2v_2$
....	..	..	....
$\alpha_n x+\beta_n y=t_n$	p_n	v_n	$p_n v_n v_n$

Κανονικαὶ ἐξισώσεις : Ἄθροισμα $[pvv]$

$$\left.\begin{array}{l}[p\alpha\alpha]x+[p\alpha\beta]y-[p\alpha t]=0\\ [p\alpha\beta]x+[p\beta\beta]y-[p\beta t]=0\end{array}\right\}$$ Μέσον σφάλμα τῆς μονάδος βάρους $\mu=\pm\sqrt{\dfrac{[pvv]}{n-2}}$

Ὑπολογισμὸς τοῦ μέσου σφάλματος τῶν μεγεθῶν x καὶ y.

$$\left.\begin{array}{l}[p\alpha\alpha]Q_{11}+[p\alpha\beta]Q_{12}=1\\ [p\alpha\beta]Q_{11}+[p\beta\beta]Q_{12}=0\end{array}\right\}$$ Μέσον σφάλμα τῆς τιμῆς x... $m_x=\mu\sqrt{Q_{11}}$

καὶ :

$$\left.\begin{array}{l}[p\alpha\alpha]Q_{21}+[p\alpha\beta]Q_{22}=0\\ [p\alpha\beta]Q_{21}+[p\beta\beta]Q_{22}=1\end{array}\right\}$$ Μέσον σφάλμα τῆς τιμῆς y... $m_y=\mu\sqrt{Q_{22}}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η'.

ΕΞΗΡΤΗΜΕΝΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Θέσις τοῦ προβλήματος.

Ὅταν μελετῶμεν σειρὰν ἐμμέσων παρατηρήσεων, δεχόμεθα ὅτι αἱ ἐξισώσεις αἵτινες συνδέουν αὐτὰς πρὸς τὰ ἀπ' εὐθείας μετρούμενα μεγέθη, εἶναι ἐν γένει ἀνεξάρτητοι ἀλλήλων. Ὅταν π.χ. ἔχωμεν n παρατηρήσεις καὶ ἐξ αὐτῶν ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν ν ἀγνώστους, ἔχομεν ἐν γένει r=n—ν ἐξισώσεις αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀλλήλων. Ἐὰν ὅμως οἱ ἄγνωστοι συνδέωνται μεταξύ των καὶ δι' ἄλλων σχέσεων, τότε προφανῶς, αἱ προσδιορισθησόμεναι τιμαί πρέπει νὰ ἐπαληθεύουν καὶ τὰς συνθήκας αὐτάς. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ὅτι πρόκειται νὰ *ἰσοσταθμίσωμεν ἐξηρτημένας παρατηρήσεις*. Περιπτώσεις τοιούτων παρατηρήσεων παρουσιάζονται συνήθως εἰς τὴν Γεωδαισίαν, σπανιώτερον δὲ εἰς τὴν Ἀστρονομίαν. Πάντως λογιστικῶς ἀκολουθεῖται ὁ ἴδιος τρόπος μὲ τὸν τῶν ἐμμέσων παρατηρήσεων, συχνὰ δὲ αἱ πράξεις εἶναι καὶ ἁπλούστεραι ἐκείνων.

Ἔστω π.χ. ὅτι μετρῶμεν τὰς γωνίας Α,Β,Γ ἑνὸς τριγώνου καὶ εὑρίσκομεν, κατόπιν ἐπανειλημμένων μετρήσεων, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν βάσει τοῦ τύπου :

$$T=\frac{[pt]}{[p]}$$

πρέπει νὰ ἰσχύῃ καὶ ἡ *συνθήκη* :

$$A+B+\Gamma=2R+\Sigma\varphi.\ \text{ὑπεροχή}.$$

Ἢ ἔστω ὅτι ἐκ τῶν μετρουμένων μεγεθῶν T_1, T_2,....T_n ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὰ X καὶ Y τῇ βοηθείᾳ τῶν :

$$\sigma\,(X,\ Y,\ T_1,\ T_2, \ldots,\ T_n)=0$$

$$\varphi\,(X,\ Y,\ T_1,\ T_2,\ \ldots,\ T_n)=0$$

οὕτως ὥστε νὰ πληροῦται καὶ ἡ *συνθήκη*

$$X^2+Y^2=\alpha^2.$$

Αἱ τοιαῦται παρατηρήσεις ὀνομάζονται *ἐξηρτημέναι* ἢ *συμβατικαί*.

Ἐξισώσεις συνθηκῶν καὶ συσχετίσεως.

Ἔστω γενικώτερον ὅτι ἔχομεν τοὺς ἀγνώστους $X_1, X_2, \ldots X_n$, οἵτινες συνδέονται μεταξύ των διὰ r ἐξισώσεων.

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_1 (X_1, X_2, \ldots\ldots X_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_r (X_1, X_2, \ldots\ldots X_n) = 0 \end{array}\right. \qquad (77)$$

Αἱ σχέσεις αὗται καλοῦνται *ἐξισώσεις τῶν συνθηκῶν* [1] (équations de condition, equations of conditions. bedingte Gleichungen).

Ἐὰν τὰ παρατηρούμενα μεγέθη $T_1, T_2, \ldots T_n$ φέρουν μεθ' ἑαυτῶν σφάλματα $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots \upsilon_n$ τότε ζητεῖται νὰ προσδιορισθοῦν τὰ $X_1, X_2, \ldots X_n$ οὕτως ὥστε νὰ πληροῦνται αἱ ἐξισώσεις τῶν συνθηκῶν. Θὰ πρέπει προφανῶς·

$$\Phi_i (T_1 + \upsilon_1, \; T_2 + \upsilon_2, \ldots T_n + \upsilon_n) = 0 \qquad (78) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

ὅπου αἱ Φ_i εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀλλήλων.

Ἐπειδὴ αἱ υ ὑποτίθενται πολὺ μικραὶ ποσότητες, ἀναπτύσσομεν κατὰ τὸν τύπον τοῦ Taylor, ὁπότε λαμβάνομεν:

$$\Phi_i (T_1, T_2, \ldots T_n) + \upsilon_1 \frac{\partial \Phi_i}{\partial T_1} + \upsilon_2 \frac{\partial \Phi_i}{\partial T_2} + \ldots + \upsilon_n \frac{\partial \Phi_i}{\partial T_n} = 0$$

καὶ ἐὰν θέσωμεν:

$$\Phi_i (T_1, T_2, \ldots T_n) = W_i \, , \; \frac{\partial \Phi_1}{\partial T_i} = \alpha_i \, , \; \frac{\partial \Phi_2}{\partial T_i} = \beta_i \, , \ldots\ldots$$

θὰ ἔχωμεν:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 \upsilon_1 + \alpha_2 \upsilon_2 + \ldots + \alpha_n \upsilon_n + W_1 = [\alpha\upsilon] + W_1 = 0 \\ \beta_1 \upsilon_1 + \beta_2 \upsilon_2 + \ldots + \beta_n \upsilon_n + W_2 = [\beta\upsilon] + W_2 = 0 \\ \gamma_1 \upsilon_1 + \gamma_2 \upsilon_2 + \ldots + \gamma_n \upsilon_n + W_3 = [\gamma\upsilon] + W_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (78)$$

ὅπου W_i εἶναι αἱ ἀσυμφωνίαι αἱ ὁποῖαι παρουσιάζονται εἰς τὰς συναρτήσεις, λόγῳ τῶν υ_i. Καὶ τὸ πρόβλημα ἤδη εἶναι νὰ προσδιορισθοῦν τὰ n μεγέθη υ, οὕτως ὥστε αἱ ἐξισώσεις τῶν συνθηκῶν νὰ πληροῦνται ἐπ' ἀκριβῶς καὶ ἀκόμη τὸ μέγεθος: $[\rho\upsilon\upsilon]$ = ἐλάχιστον. Δηλαδὴ ἔχομεν ἐνταῦθα τὸ μαθηματικὸν πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ ἑνὸς ἐλαχίστου μὲ βοηθητικὰς συνθήκας τὰς (78), αἵτινες εἶναι *αἱ ἐξισώσεις τῶν σφαλμάτων.*

---

1) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνεξαρτήτων ἀπ' ἀλλήλων ἐξισώσεων εἶναι μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀγνώστων. Δηλαδὴ $r < n$.

Παρατηρήσεις διαφόρου ἀκριβείας.

Διὰ νὰ ἔχη, ὡς γνωστόν, μία συνάρτησις π.χ. ἡ $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ἕνα ἐλάχιστον καὶ συγχρόνως νὰ πληροῦνται αἱ ἐξισώσεις τῶν συνθηκῶν $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ καὶ $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$, πρέπει νὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n = 0$$

Πρὸς λύσιν τούτου πολλαπλασιάζομεν τὰς δύο τελευταίας ἐξισώσεως ἐπὶ τοὺς ἀορίστους, προσωρινῶς, παράγοντας λ_1 καὶ λ_2 καὶ τὰς ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὴν πρώτην. Ἤτοι:

$$dx_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \lambda_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right) + dx_2\left(\frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \lambda_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right) + \ldots$$

$$\ldots + dx_n\left(\frac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} - \lambda_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_n}\right) = 0$$

Καὶ ἐπειδὴ ἡ σχέσις αὕτη πρέπει νὰ ἰσχύῃ δι' οἱασδήποτε τιμὰς τῶν $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$, πρέπει νὰ ἰσχύουν αἱ ἐξισώσεις:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \lambda_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0 \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

Ἐὰν ἤδη ἔλθωμεν εἰς τὴν περίπτωσιν τὴν ὁποίαν μελετῶμεν ἐνταῦθα, τότε αἱ φ καὶ ψ πρέπει νὰ ἀντικατασταθοῦν διὰ τῶν ἐξισώσεων τῶν σφαλμάτων (78) καὶ ἡ f διὰ τῆς [pυυ]. Σχηματίζομεν κατὰ τὸν **Lagrange**, τὴν βοηθητικὴν συνάρτησιν τῶν $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_n$:

$$F = [p\upsilon\upsilon] - 2k_1([\alpha\upsilon] - W_1) - 2k_2([\beta\upsilon] - W_2) - 2k_3([\gamma\upsilon] - W_3)\ldots$$

εἰς τὴν ὁποίαν ἔχομεν ἀντικαταστήσει τὰ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, διὰ τῶν $2k_1, 2k_2, \ldots$ Διὰ νὰ ἔχῃ δὲ αὕτη τιμὴν ἐλαχίστην, πρέπει νὰ ἰσχύουν αἱ συνθῆκαι:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial F}{\partial \upsilon_1} = 2p_1\upsilon_1 - 2(\alpha_1 k_1 + \beta_1 k_2 + \gamma_1 k_3 + \ldots) = 0 \\
\dfrac{\partial F}{\partial \upsilon_2} = 2p_2\upsilon_2 - 2(\alpha_2 k_1 + \beta_2 k_2 + \gamma_2 k_3 + \ldots) = 0 \\
\dfrac{\partial F}{\partial \upsilon_3} = 2p_3\upsilon_3 - 2(\alpha_3 k_1 + \beta_3 k_2 + \gamma_3 k_3 + \ldots) = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{\partial F}{\partial \upsilon_n} = 2p_n\upsilon_n - (\alpha_n k_1 + \beta_n k_2 + \gamma_n k_3 + \ldots) = 0
\end{array}\right\} \quad (79)$$

ἢ τάς:

$$\left.\begin{array}{l} \upsilon_1=\dfrac{\alpha_1}{p_1}k_1+\dfrac{\beta_1}{p_1}k_2+\dfrac{\gamma_1}{p_1}k_3+\ldots \\ \upsilon_2=\dfrac{\alpha_2}{p_2}k_1+\dfrac{\beta_2}{p_2}k_2+\dfrac{\gamma_2}{p_2}k_3+\ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \upsilon_n=\dfrac{\alpha_n}{p_n}k_1+\dfrac{\beta_n}{p_n}k_2+\dfrac{\gamma_n}{p_n}k_3+\ldots \end{array}\right\} \quad (79')$$

αἱ ὁποῖαι καλοῦνται *ἐξισώσεις συσχετίσεως* (équations corrélatives, correlate equations, Korrelatengleichungen) οἱ δὲ συντελεσταὶ k *πολλαπλασιασταὶ τοῦ Lagrange* ἢ *συσχετισταὶ τοῦ Gauss*.

Προκειμένου ἤδη νὰ προσδιορίσωμεν τὰ μεγέθη $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots \upsilon_n$ καὶ τοὺς πολλαπλασιαστὰς $k_1, k_2, \ldots k_r$, ἔχομεν $n+r$ ἐξισώσεις. Ἤτοι τὰς r ἐξισώσεις τῶν σφαλμάτων (78) καὶ τὰς n ἐξισώσεις συσχετίσεως (79΄). Πρὸς προσδιορισμὸν τῶν $k_1, k_2, \ldots k_r$ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἀντικαθιστῶμεν τὰ υ ἐκ τῶν (79΄) εἰς τὰς (78) καὶ λαμβάνομεν τὸ ἀκόλουθον σύστημα τῶν *κανονικῶν ἐξισώσεων*:

$$\left.\begin{array}{l} \left[\dfrac{\alpha\alpha}{p}\right]k_1+\left[\dfrac{\alpha\beta}{p}\right]k_2+\left[\dfrac{\alpha\gamma}{p}\right]k_3+\ldots+W_1=0 \\ \left[\dfrac{\alpha\beta}{p}\right]k_1+\left[\dfrac{\beta\beta}{p}\right]k_2+\left[\dfrac{\beta\gamma}{p}\right]k_3+\ldots+W_2=0 \\ \left[\dfrac{\alpha\gamma}{p}\right]k_1+\left[\dfrac{\beta\gamma}{p}\right]k_2+\left[\dfrac{\gamma\gamma}{p}\right]k_3+\ldots+W_3=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (80)$$

Τὸ σύστημα αὐτὸ (80) λύεται πλήρως, διότι ἔχομεν r ἀνεξαρτήτους ἐξισώσεις μὲ r ἀγνώστους πολλαπλασιαστάς. Τοῦτο διαφέρει τοῦ συστήματος τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (62) τῶν ἐμμέσων παρατηρήσεων, κατὰ τὸ ὅτι ἐδῶ τὰ βάρη εἶναι εἰς τὸν παρονομαστήν, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον δὲν δυσκολεύει εἰς τὴν λύσιν αὐτοῦ. Ἀκόμη, ἀντὶ τῶν [αt], [βt], ..., ἐνταῦθα ἐμφανίζονται τὰ μεγέθη W. Ἐξ αὐτῶν εὑρίσκομεν τὰ k, τὰ ὁποῖα ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς (79΄) καὶ ἔχομεν τὰ $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_n$. Αἱ διορθωμέναι παρατηρήσεις εἶναι αἱ τιμαὶ $T_1+\upsilon_1$, $T_2+\upsilon_2$, ... $T_n+\upsilon_n$.

Διάγραμμα ἐργασίας.

Προκειμένου νὰ *ἀκολουθήσωμεν μίαν ὡρισμένην πορείαν κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἐξηρτημένων παρατηρήσεων*, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

1. Ἐὰν αἱ μετρήσεις εἶναι *τῆς ἰδίας ἀκριβείας*, τότε θὰ πρέπῃ νὰ ἰσχύῃ :

$$[\upsilon\upsilon] = \text{ἐλάχιστον}.$$

Ἔχομεν τὰς *ἐξισώσεις συσχετίσεως* :

$$\left.\begin{array}{l} \upsilon_1 = \alpha_1 k_1 + \beta_1 k_2 + .. \\ \dots\dots\dots\dots \\ \upsilon_n = \alpha_n k_1 + \beta_n k_2 + .. \end{array}\right\}$$

ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν r *κανονικὰς ἐξισώσεις* :

$$\left.\begin{array}{l} [\alpha\alpha]k_1 + [\alpha\beta]k_2 + [\alpha\gamma]k_3 + .. + W_1 = 0 \\ [\alpha\beta]k_1 + [\beta\beta]k_2 + [\beta\gamma]k_3 + .. + W_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}$$

ἐξ ὧν προσδιορίζομεν τὰ k. Ἀκολούθως ἐκ τῶν ὑπολογισθεισῶν ἀπ' εὐθείας τιμῶν υ ἢ τῇ βοηθείᾳ τῆς σχέσεως :

$$-[kW] = [\upsilon\upsilon]$$

εὑρίσκομεν τὸ *μέσον σφάλμα μιᾶς παρατηρήσεως* :

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\upsilon\upsilon]}{r}}$$

2. Ἐὰν αἱ μετρήσεις εἶναι *διαφόρου ἀκριβείας*, πρέπει :

$$[p\upsilon\upsilon] = \text{ἐλάχιστον},$$

τότε δὲ ἀκολουθοῦμεν τὴν ἑξῆς πορείαν :

α') Ἐκ σειρᾶς n παρατηρήσεων μὲ ν ἀγνώστους ἔχομεν r=n—ν ἐξισώσεις τῶν συνθηκῶν, ἀνεξαρτήτους ἀλλήλων. Εἰς αὐτὰς θέτομεν, ἀντὶ τῶν ζητουμένων X_1, X_2, ..., τὰ παρατηρούμενα T_1, T_2, ... καὶ ἐκ τῶν ν τούτων ἐξισώσεων ὑπολογίζομεν τοὺς n.ν συντελεστὰς α, β, γ, ... Ἤτοι:

$$\alpha_1=\frac{\partial\Phi_1}{\partial T_1},\quad \alpha_2=\frac{\partial\Phi_1}{\partial T_2},\quad \ldots\ldots\quad \alpha_n=\frac{\partial\Phi_1}{\partial T_n}$$

$$\beta_1=\frac{\partial\Phi_2}{\partial T_1},\quad \beta_2=\frac{\partial\Phi_2}{\partial T_2},\quad \ldots\ldots\quad \beta_n=\frac{\partial\Phi_2}{\partial T_n}$$

$$\ldots\ldots\quad\ldots\ldots\quad\ldots\quad\ldots\ldots$$

ὁπότε ἔχομεν τὰς ἀνηγμένας *ἐξισώσεις τῶν συνθηκῶν*:

$$\alpha_1 \upsilon_1+\alpha_2\upsilon_2+\ldots+\alpha_n\upsilon_n+W_1=0$$
$$\beta_1\upsilon_1+\beta_2\upsilon_2+\ldots+\beta_n\upsilon_n+W_2=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

β') Ἐκ τῶν συντελεστῶν τούτων: $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n$, β_1, β_2, ... β_n, ..., σχηματίζομεν τὰς παραστάσεις $\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]$, $\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right]$,... καὶ γράφομεν τὸ *κανονικὸν σύστημα*:

$$\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]k_1+\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right]k_2+\ldots\; W_1=0$$
$$\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right]k_1+\left[\frac{\beta\beta}{p}\right]k_2+\ldots\; W_2=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

γ') Λύομεν τὰς κανονικὰς ἐξισώσεις ὡς πρὸς k_1, k_2, ... k_r καὶ ἐκ τῶν ἐξισώσεων συσχετίσεως (79) ἢ (79'), εὑρίσκομεν τὰ υ_1, υ_2, ..., υ_n, ὁπότε εἰσάγομεν τὰς διορθώσεις αὐτὰς εἰς τὰς παρατηρήσεις καὶ εὑρίσκομεν τὰς πιθανὰς τιμάς.

δ') Ἔχοντες ἤδη τὰς πιθανὰς τιμὰς τῶν παρατηρουμένων μεγεθῶν, εὑρίσκομεν δι' ὑπολογισμοῦ τὰ ζητούμενα μεγέθη.

ε') Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις συσχετίσεως σχηματίζομεν τὴν παράστασιν [pυυ].

Προκειμένου νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ μέσον σφάλμα μιᾶς παρατηρήσεως, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἐφ' ὅσον ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξισώσεων τῶν συνθηκῶν εἶναι r, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνεξαρτήτων ἀγνώστων ὑποβιβάζεται εἰς n—r, καὶ ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐπὶ πλέον παρατηρήσεων εἶναι: n—(n—r)=r. Κατὰ ταῦτα, ὅπως καὶ προηγουμένως, *τὸ μέσον σφάλμα τῆς μονάδος βάρους* θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\mu^2=\frac{[p\upsilon\upsilon]}{r} \qquad (81)$$

τὸ δὲ μέσον σφάλμα μιᾶς παρατηρήσεως βάρους p, ὑπὸ τῆς σχέσεως :

$$m_x{}^2=\frac{\mu^2}{p_x} \qquad (81')$$

Προκειμένου νὰ εὕρωμεν τὸ [pυυ], χρησιμοποιοῦμεν τὸν ἀκόλουθον ἁπλοῦν τρόπον : Τετραγωνίζομεν ἑκάστην τῶν (79), τὰς προσθέτομεν καὶ λαμβάνομεν :

$$\begin{aligned}[p\upsilon\upsilon]=[\alpha\alpha]\, k_1k_1+[\alpha\beta]k_1k_2+[\alpha\gamma]k_1k_3+\dots\\ +[\alpha\beta]k_1k_2+[\beta\beta]k_2k_2+[\beta\gamma]k_2k_3+\dots\\ +[\alpha\gamma]k_1k_3+[\beta\gamma]k_2k_3+[\gamma\gamma]k_3k_3+\dots\end{aligned}$$

Συγκρίνοντες δὲ αὐτὰς μὲ τὰς κανονικὰς ἐξισώσεις, ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$[p\upsilon\upsilon]=-k_1W_1-k_2W_2-\dots=-[kW] \qquad (82)$$

ἥτις χρησιμεύει καὶ ὡς *δοκιμή*.

Παράδειγμα 1ον. Ἔστω ὅτι αἱ μετρήσεις τῆς ἰδίας ἀκριβείας τῶν τριῶν γωνιῶν α, β, γ ἑνὸς τριγώνου ἔδωσαν T_1, T_2, T_3, αἱ ὁποῖαι ἀθροιζόμεναι δίδουν ἀντὶ τῶν 2 ὀρθῶν, τὸ ἄθροισμα 180+W. *Ποῖον τὸ μέγεθος τοῦ γινομένου σφάλματος ἐπὶ ἑκάστου υ ;*

Λύσις : 1. Ἡ μόνη ἐξίσωσις τῶν συνθηκῶν εἶναι :

$$\Phi(\alpha,\beta,\gamma)\equiv\alpha+\beta+\gamma-180=0.$$

2. Ἂν θέσωμεν τὰς παρατηρηθείσας τιμὰς ἔχομεν :

$$\Phi(T_1,T_2,T_3)\equiv T_1+T_2+T_3-180=W.$$

3. $$\frac{\partial\Phi}{\partial T_1}=1=\alpha_1 \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial T_2}=1=\alpha_2 \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial T_3}=1=\alpha_3,$$

οὕτως ὥστε ἡ ἀνηγμένη ἐξίσωσις γίνεται :

$$\upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3=-W.$$

4. Ἐξ αὐτῆς ἔχομεν : [αα]=3 καὶ ἡ κανονικὴ ἐξίσωσις

$$3k_1+W=0$$

5. δίδει :

$$k_1=-\frac{W}{3}$$

Ἤδη ἡ ἐξίσωσις συσχετίσεως δίδει τὰς ἀγνώστους τιμάς:

$$6.\quad \left\{\begin{array}{l} \upsilon_1=\alpha_1 k_1=-\dfrac{W}{3} \\ \upsilon_2=\alpha_2 k_1=-\dfrac{W}{3} \\ \upsilon_3=\alpha_3 k_1=-\dfrac{W}{3} \end{array}\right\} \text{ καὶ ἑπομένως: } \left\{\begin{array}{l} \alpha=T_1+\upsilon_1=T_1-\dfrac{W}{3} \\ \beta=T_2+\upsilon_2=T_2-\dfrac{W}{3} \\ \gamma=T_3+\upsilon_3=T_3-\dfrac{W}{3} \end{array}\right.$$

$$7.\quad [\upsilon\upsilon]=-k_1 W_1=\frac{W}{3}.W=\frac{W^2}{3}$$

$$8.\quad m=\pm\sqrt{\frac{\frac{W^2}{3}}{1}}=\frac{W}{\sqrt{3}}.$$

Παράδειγμα 2ον. Ἔστω ὅτι αἱ μετρήσεις τῶν τριῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου δὲν εἶναι τῆς ἰδίας ἀκριβείας καὶ μᾶς δίδουν τὰς τιμάς:

$$\alpha=36^0\ 25'\ 47'', \qquad \beta=90^0\ 36'\ 28'', \qquad \gamma=52^0\ 57'\ 57''.$$

Ζητοῦνται αἱ ἐπὶ μέρους διορθώσεις καὶ τὰ μέσα σφάλματα τῆς μονάδος βάρους καὶ μιᾶς παρατηρήσεως.

Λύσις: Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐπαναληπτικῶν μετρήσεων εἶναι διαφορετικὸς εἰς κάθε γωνίαν καὶ ὅτι οὗτος ἐκφράζει τὸ ἀντίστοιχον βάρος. Ἤτοι:

$$p_1=4, \quad p_2=2 \quad \text{καὶ} \quad p_3=3.$$

Ἡ ἀναγκαία συνθήκη τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ πληροῦν αἱ γωνίαι εἶναι:

$$T_1+T_2+T_3=180^0+12''.$$

Ἑπομένως ἔχομεν:

$$(T_1+\upsilon_1)+(T_2+\upsilon_2)+(T_3+\upsilon_3)=180^0.$$

Ἀφαιροῦντες τὰς δύο ταύτας ἐξισώσεις ἔχομεν τὴν συνθήκην:

$$\upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3+12=0.$$

Πρέπει νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ υ_1, υ_2, υ_3 οὕτως ὥστε: νὰ πληροῦται ἡ συνθήκη αὕτη καὶ $[p\upsilon\upsilon]$=ἐλάχιστον.

Βάσει τοῦ (79′) ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις συσχετίσεως

$$\upsilon_1 = \frac{k_1 \alpha_1}{p_1},\ \upsilon_2 = \frac{k_1 \alpha_2}{p_2},\ \upsilon_3 = \frac{k_1 \alpha_3}{p_3}$$

Ἐνταῦθα $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1, \quad p_1 = 4,\ p_2 = 2,\ p_3 = 3$

καὶ

$$\upsilon_1 = \frac{k_1}{4},\ \upsilon_2 = \frac{k_1}{2},\ \upsilon_3 = \frac{k_1}{3}$$

Καὶ ἡ κανονικὴ ἐξίσωσις συμφώνως πρὸς τὰς (80) εἶναι :

$$\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] k_1 + W = 0,$$

ὅθεν

$$\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] = \frac{\alpha_1\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2\alpha_2}{p_2} + \frac{\alpha_3\alpha_3}{p_3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{13}{12}$$

καί :

$$\frac{13}{12} k_1 + 12'' = 0.$$

Ἐξ ἧς :

$$k_1 = -\frac{144}{13} = -11{,}077$$

καὶ ἐν συνεχείᾳ :

$$\upsilon_1 = -2'',77 \cdot\cdot\ \upsilon_2 = -5''54 \cdot\cdot\ \upsilon_3 = -3'',69.$$

Ἐξ αὐτῶν φαίνεται ὅτι, τὰ ἐπὶ μέρους σφάλματα κατανέμονται ἐπὶ τῶν τριῶν γωνιῶν ἀντιστρόφως ἀναλόγως τῶν βαρῶν. Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ μέσου σφάλματος μ τῆς μονάδος βάρους, ἐπειδὴ $r=1$, δίδει (81) τὴν τιμὴν :

$$\mu = \sqrt{[p\upsilon\upsilon]} = \sqrt{132{,}9231} = \pm 11{,}53,$$

τοῦ δὲ μέσου σφάλματος μιᾶς παρατηρήσεως βάρους p_1 συμφώνως πρὸς τὸν (81′), δίδει τὰς τιμάς :

$$m_x = \frac{\mu}{\sqrt{p_1}} = \pm 5'',76,$$

$$m_y = \frac{\mu}{\sqrt{p_2}} = \pm 8'',15 \quad \text{καὶ} \quad m_z = \frac{\mu}{\sqrt{p_3}} = +6'',65.$$

Ἐπαλήθευσις : Συμφώνως πρὸς τὴν (82) ἔχομεν :

$$[p\upsilon\upsilon] = p_1\upsilon_1^2 + p_2\upsilon_2^2 + p_3\upsilon_3^2 = 132{,}92$$

$$\text{καὶ } -[kW] = 12 + 11{,}077 = 132{,}92,$$

ὅπερ σημαίνει, ὅτι ὁ ὑπολογισμὸς εἶναι ἀκριβής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ'.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ

Σύντομος εἰσαγωγή

῾Ο C. F. Gauss ἐχρησιμοποίησε τὴν μέθοδον τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων διὰ τὴν ἰσοστάθμησιν τῶν παρατηρήσεων ἑνὸς τριγωνομετρικοῦ δικτύου παρὰ τὸ ῾Ανόβερον, τοῦτο δὲ συνετέλεσεν εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς ὅλης θεωρίας τῆς ἰσοσταθμήσεως. ᾿Ακριβῶς δὲ εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν χρησιμοποιοῦνται ἐξηρτημέναι παρατηρήσεις καὶ ἐμφανίζονται διάφορα «εἴδη συνθηκῶν», τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ πληροῦνται, διὰ νὰ λύωνται τὰ τιθέμενα προβλήματα.

῎Ηδη εἰς πολλὰς περιπτώσεις, εἰς παραδείγματα κυρίως, ἐγένετο χρῆσις μέχρι τοῦδε τῶν ἐξισώσεων τῶν συνθηκῶν καὶ ἐλύθησαν προβλήματα «ἰσοσταθμήσεως σφαλμάτων γεωμετρικῆς χωροσταθμήσεως» ἢ καὶ «τριγωνομετρικῆς ὑψομετρήσεως». Σημειοῦμεν δὲ τρεῖς ὁμάδας τῶν τοιούτων συνθηκῶν:

α') Συνθῆκαι ὁριζοντίας περιστροφῆς, ὅτι δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν πέριξ ἑνὸς σταθμοῦ πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ 4 ὀρθάς. Εἰς σταθμὸν μὲ δ διευθύνσεις ἔχομεν δ—1 γωνίας, τὰς: $\alpha_1+\upsilon_1$, $\alpha_2+\upsilon_2$ οὕτως ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$\upsilon_1+\upsilon_2+\ldots\upsilon_n+W_0=0$$

ὅπου $W_0=[\alpha]-4$ ὀρθαὶ $=$ ὁριζόντιος ἀσυμφωνία.

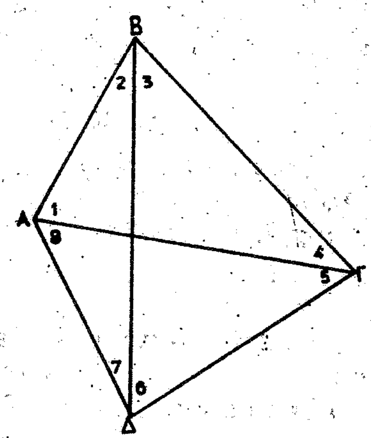
β'). Συνθῆκαι ἀθροίσματος γωνιῶν, ἑνὸς κλειστοῦ πολυγώνου, ὅπου ἰσχύει ὅτι:

$$\upsilon_1+\upsilon_2+\ldots+\upsilon_n+W_\gamma=0$$

ὅπου $W_\gamma-[\alpha]-(2n\text{-}4)$ ὀρθαὶ $-\varepsilon$ (σφαιρ. ὑπεροχή) $=$ ἀσυμφωνία ἀθροίσματος γωνιῶν.

γ'.) Συνθῆκαι τῶν πλευρῶν, καθ' ἃς αἱ πλευραὶ ἑνὸς πολυγώνου διατηροῦν τὰ αὐτὰ μήκη, ἀνεξαρτήτως τοῦ δρόμου τὸν ὁποῖον ἀκολουθοῦμεν κατὰ τὴν μέτρησιν αὐτῶν.

Αἱ ἐξισώσεις τῶν συνθηκῶν ἑνὸς τετραπλεύρου μὲ τὰς δύο διαγωνίους του (σχ. 19) εἰς ἃς ἐμετρήθησαν καὶ αἱ 8 γωνίαι εἶναι 5. Ἡ μία, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τούτου = 4 ὀρθὰς καὶ αἱ ἄλλαι 4, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑκάστου τριγώνου = 2 ὀρθάς. *Ἡ ἔκφρασις τῶν συνθηκῶν τῶν τριγώνων* : ΑΒΓ, ΑΓΔ καὶ ΑΒΔ εἶναι :



Σχ. 19

$$(1)+(2+3)+(4)=180^0$$
$$(5)+(6+7)+(8)=180^0$$
$$(1+8)+(2)+(7)=180^0.$$

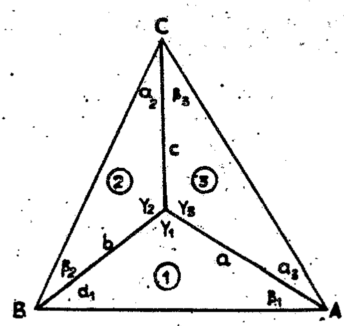
Ἐὰν εἰς τὸ τρίγωνον ABC (σχ. 20) μὲ σύμβολα (αἱ) ἐννοήσωμεν τὰς ἰσοσταθμησμένας γωνίας, αἱ σχέσεις :

$$\frac{a}{b}=\frac{\eta\mu(\alpha_1)}{\eta\mu(\beta_1)}, \quad \frac{b}{c}=\frac{\eta\mu(\alpha_2)}{\eta\mu(\beta_2)}, \quad \frac{c}{a}=\frac{\eta\mu(\alpha_3)}{\eta\mu(\beta_3)}$$

πολλαπλασιαζόμεναι δίδουν τὴν ἔκφρασιν :

$$\frac{\eta\mu(\alpha_1)\eta\mu(\alpha_2)\eta\mu(\alpha_3)}{\eta\mu(\beta_1)\eta\mu(\beta_2)\eta\mu(\beta_3)}=1,$$

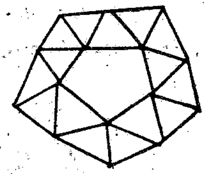
ἡ ὁποία παριστᾷ τὴν *ἀρχικὴν ἐξίσωσιν τῶν πλευρῶν*. Δι' ἁπλῆς λογαριθμήσεως γίνεται γραμμικὴ καὶ ὑπολογίζονται τὰ ἄγνωστα.



Σχ. 20

Αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν παρουσιάζονται εἰς τὰ ἐλεύθερα δίκτυα, κυρίως εἰς τὰ τετράπλευρα μὲ δύο διαγωνίους, εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν, καθὼς καὶ ὅταν ἔχωμεν τρίγωνα ἐν εἴδη στεφάνης (σχ. 21). Εἰς τὰς ἁπλᾶς ἀλύσεις τριγώνων δὲν ἐμφανίζονται αὗται.

Ἐξ ἄλλου, προκειμένου νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐξισώσεων, αἱ ὁποῖαι ἐμφανίζονται κατὰ τὰς μετρήσεις γωνιῶν εἰς ἐλεύθερον δίκτυον, χρησιμοποιοῦμεν τοὺς ἀκολούθους τύπους.



Σχ. 21

α′) Ὁ συνολικὸς ἀριθμὸς τῶν ἀνεξαρτήτων συνθηκῶν :

$$r = W - 2p + 4$$

ὅπου r ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνεξαρτήτων ἐξισώσεων συνθηκῶν.
p τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν
W » » » παρατηρηθεῖσων γωνιῶν.

β′) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξισώσεων γωνιῶν,

$$(l - l') - p + 1$$

ὅπου l εἶναι ὁ ἀριθμὸς ὅλων τῶν παρατηρηθησῶν γραμμῶν (πλευρῶν τριγώνων)
l′ » » » ὀπισθοτομιῶν
l-l′ » » » τῶν ἑκατέρωθεν παρατηρηθησῶν πλευρῶν.

γ′) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξισώσεων τῶν πλευρῶν :

$$l - 2p + 3$$

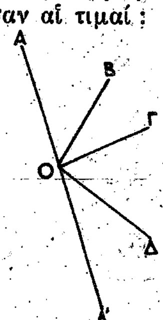
δ′) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξισώσεων τοῦ σταθμοῦ :

$$n - s + 1$$

ὅπου s εἶναι αἱ διευθύνσεις καὶ n ὁ ἀριθμὸς τῶν μετρηθεισῶν γωνιῶν.

Παραδείγματα ἐξηρτημένων παρατηρήσεων.

Παράδειγμα 1ον. «Ἐπὶ ἑνὸς σταθμοῦ Σ (σχ. 22) μὲ 5 διευθύνσεις ἐμετρήθησαν καθ' ὅλους τοὺς συνδυασμοὺς ἀνὰ δύο καὶ εὑρέθησαν αἱ τιμαί :



Σχ. 22

t_1	=(2–1)=	86°	19′	55″,0
t_2	=(3–1)=	123	30	12,5
t_3	=(4–1)=	150	40	36,8
t_4	=(5–1)=	277	33	02,5
t_5	=(3–2)=	87	10	21,8
t_6	=(4–2)=	114	20	46,2
t_7	=(5–2)=	241	13	11,2
t_8	=(4–3)=	27	10	23,8
t_9	=(5–3)=	154	2	51,2
t_{10}	=(5–4)=	126	52	30,6

Ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν γωνιῶν αἱ προκύπτουσαι ἐκ τῆς ἰσοσταθμήσεως».

Αἱ μετρήσεις εἶναι 10 καὶ αἱ ζητούμεναι τιμαὶ τῶν γωνιῶν εἶναι 4, ἑπομένως αἱ ἐξισώσεις τῶν συνθηκῶν εἶναι: 10—4=6. Ἤτοι αἱ:

$$(t_1+\upsilon_1)+(t_5+\upsilon_5)-(t_2+\upsilon_2)=0$$
$$(t_1+\upsilon_1)+(t_6+\upsilon_6)-(t_3+\upsilon_3)=0$$
$$(t_1+\upsilon_1)+(t_7+\upsilon_7)-(t_4+\upsilon_4)=0$$
$$(t_2+\upsilon_2)+(t_8+\upsilon_8)-(t_3+\upsilon_3)=0$$
$$(t_2+\upsilon_2)+(t_9+\upsilon_9)-(t_4+\upsilon_4)=0$$
$$(t_3+\upsilon_3)+(t_{10}+\upsilon_{10})-(t_4+\upsilon_4)=0$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς τῶν $t_1,\ldots t_{10}$, λαμβάνομεν τελικῶς:

$$\upsilon_1+\upsilon_5-\upsilon_2+4{,}3=0$$
$$\upsilon_1+\upsilon_6-\upsilon_3+2{,}4=0$$
$$\upsilon_1+\upsilon_7-\upsilon_4+3{,}7=0$$
$$\upsilon_2+\upsilon_8-\upsilon_3-2{,}5=0$$
$$\upsilon_2+\upsilon_9-\upsilon_4+1{,}2=0$$
$$\upsilon_3+\upsilon_{10}-\upsilon_4+6{,}9=0$$

Αἱ προσδιορισθησόμεναι τιμαὶ τῶν $\upsilon_1,\ldots\upsilon_{10}$ πρέπει νὰ ἐπαληθεύουν τὰς ὡς ἄνω σχέσεις καὶ νὰ ἔχωμεν:

$$[\upsilon\upsilon]=\text{ἐλάχιστον}.$$

Τὰς ἐξισώσεις τῶν συνθηκῶν καὶ τὰς κανονικὰς ἐξισώσεις τὰς γράφομεν ὑπὸ τὴν μορφὴν τῶν πινάκων I καὶ II ἀντιστοίχως. Εἰς τὸν πίνακα I αἱ ἐξισώσεις τῶν υ νοοῦνται ὅτι ἔχουν γραφῆ

ΠΙΝΑΞ Ι. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΥΝΘΗΚΩΝ

	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8	U_9	U_{10}	W	K	Σ	ΣK
α	+1	-1			+1						+4,3	-1,10	+1	-1,10
β	+1		-1			+1					+2,4	-1,72	+1	-1,72
γ	+1			-1			+1				+3,7	+0,74	+1	+0,74
δ		+1	-1					+1			-2,5	-0,02	+1	-0,02
ε		+1		-1					+1		+1,2	+0,04	+1	+0,00
ζ			+1	-1						+1	+6,9	-3,14	+1	+3,14
S	+3	+1	-1	-3	+1	+1	+1	+1	+1	+1				
U	-2,08	+1,12	-1,40	+2,36	-1,16	-1,72	+0,74	-0,02	+0,04	-3,14				
U^2	4,326	1,254	1,960	5,570	1,346	2,958	0,548	0,000	0,002	9,860	[υυ]=27,824	[υ]=	-5,262	-5,20

κατακορύφως κατὰ στήλην καὶ αἱ τιμαὶ των ὑπολογίζονται τῇ βοηθείᾳ τῶν (79′), ὅπου p=1. Ἀκόμη προστίθεται μία στήλη διὰ τὰ Σ—[t] καὶ ἑτέρα διὰ τὰ γινόμενα ΣK. Εἰς τὸν πίνακα II ἀναγράφονται καὶ αἱ τιμαὶ τῶν S,K καὶ WK.

Ἐκ τῶν τιμῶν τῶν υ_1, υ_2,... τοῦ πίνακος I διορθώνομεν τὰς μετρηθεῖσας γωνίας, αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν τάς ἀκολούθους τιμάς :

(2—1)=	36^0	19′	52″,92	(4—2)=	140^0	20′	44″,48
(3—1)=	123	30	13,62	(5—2)=	241	13	11,94
(4—1)=	150	40	37,40	(4—3)=	27	10	23,78
(5—1)=	277	33	04,86	(5—3)=	154	02	51,24
(3—2)=	87	10	20,70	(5—4)=	126	51	27,46

ΠΙΝΑΞ ΙΙ. ΚΑΝΟΝΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

		α	β	γ	δ	ε	ζ	w	s	K	wK
α	[αα]=+3000 [αα]/[αα]=+1,000	[αα] +3	[αβ] +1	[αγ] +1	[αδ] -1	[αε] -1	[αζ]	w1 +4,3	[αs] +73	K1 -110	+4,7300
β	[αβ]=+1,000 [αβ]/[αα]= 0,3333	[ββ1]=+2,6667 [ββ1]/[ββ1] +1,000	[ββ] +3	[βγ] +1	[βδ] +1	[βε]	[βζ] -1	w +2,4	[βs] 7,4	K2 -1,72	+4,1280
γ	[αγ]=+1,000 [αγ]/[αα]=+0,3333	[βγ1]=+0,6667 [βγ1]/[ββ1]=+0,2500	[γγ2]=+2,5000 [γγ2]/[γγ2]=+1,000	[γγ] +3	[γδ]	[γε] +1	[γζ] +1	w3 +3,7	[γs] +10,7	K3 +0,74	-2,7380
δ	[αδ]=-1,000 [αδ]/[αα]=-0,333	[βδ1]=+1,3333 [βδ1]/[ββ1]=+0,500	[γδ]=-0,00 [γδ2]/[γγ2]= 0,000	[δδ]=+2,000 [δδ3]/[δδ3]=+1,000	[δδ] +3	[δε] +1	[δζ] -1	w4 -2,5	[δs] +0,5	K4 -0,02	-0,0500
ε	[αε]=-1,000 [αε]/[αα]= 0,3333	[βε1] +0,333 [βε1]/[ββ1]=+0,250	[γε2]=+1,250 [γγ2]/[γγ2]=+0,5000	[δε3]=+0,5000 [δε3]/[δδ3]=+0,2500	[εε4]=+1,8750 [εε4]/[εε4]=+1,000	[εε] +3	[εζ] +1	w5 +1,2	[εs] +6,2	K5 +0,04	-0,0480
ζ	[αζ] [αζ]/[αα]	[βζ1]=-1,0000 [βζ1]/[ββ1]=-0,3750	[γζ2]=+2,500 [γζ2]/[γγ]=+0,5000	[δζ3]=-0,5000 [δζ3]/[δδ3]=-0,2500	[εζ4]=+0,6250 [εζ4]/[εε4]= 0,3333	[ζζ5]=+1,6667 [ζζ5]/[ζζ5]=+1,000	[ζζ] +3	w6 6,9	[ζs] 9,9	K6 -3,14	+21,6000
w	w =+4,3 w/[αα]=+1,4333	[βw1]=+0,9667 [βw]/[ββ1]=+0,3625	[γw]=+2,750 [γw2]/[γγ2]=+0,6100	[δw3]=-1,5500 [δw3]/[δδ3]=-0,7750	[εw4]=+1,8875 [εw4]/[εε4]=+1,0067	[ζw5]=+5,2335 [ζw5]/[ζζ5]=+3,1399				wK	+27,6880
s	[αs]=+7,3 [αs]/[αα]=+4,333	[βs1]=+4,9667 [βs1]/[ββ1]=+1,8625	[γs2]=+7,0250 [γs2]/[γγ2]=+8,00	[δs3]=+0,4500 [δs3]/[δδ3]=+0,2250	[εs4]=+4,3875 [εs4]/[εε4]=+2,3400	[ζs5]=+6,9000 [ζs5]/[ζζ5]= 4,1399					

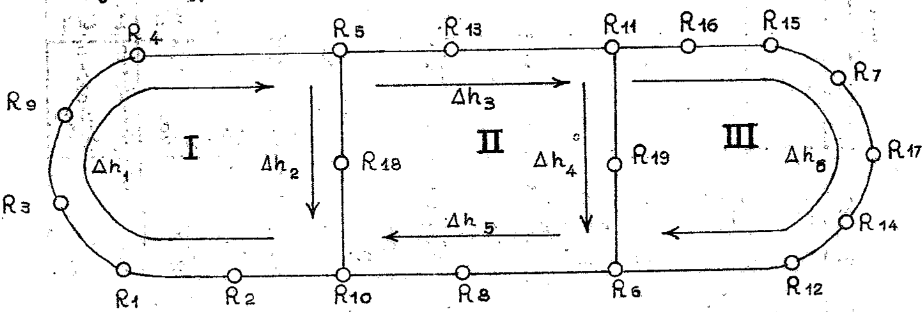
Τῇ βοηθείᾳ τῆς σχέσεως (82) δοκιμάζομεν τὴν ἀκρίβειαν τῶν μετρήσεων. Πρέπει νὰ ἔχωμεν:

$$[\upsilon\upsilon] = -WK.$$

Ἐκ τοῦ πίνακος I ἔχομεν $[\upsilon\upsilon]=27,824$ καὶ ἐκ τοῦ πίνακος II, $[WK]=-27,688$. Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν δύο τούτων ποσοτήτων θεωρεῖται μικρὰ καὶ ἑπομένως αἱ ἐκτελεσθεῖσαι μετρήσεις ἀρκετὰ ἀκριβεῖς. Τὸ μέσον σφάλμα μιᾶς μετρήσεως, συμφώνως πρὸς τὸν (81′) ἐν προκειμένῳ εἶναι:

$$m_x = \pm\sqrt{\frac{27,82}{6}} = \pm 2',2.$$

Παράδειγμα 2ον. ***Ἰσοστάθμησις δικτύου γεωμετρικῆς χωροσταθμήσεως.*** «Δίδονται τὰ κλειστὰ συνεχόμενα πολύγωνα I, II καὶ III (σχ. 23) μὲ τὰς χωροσταθμηκὰς ὁδεύσεις 1, 2, 3, 4, 5, 6 ἀπὸ $R_{10}-R_5$, R_5-R_{10}, R_5-R_{11}, $R_{11}-R_6$, R_6-R_{10}, $R_{11}-R_6$ καὶ τὰ μήκη $S_1, S_2, .. S_6$ τῶν ὁδεύσεων τούτων ἐκπεφρασμένα εἰς χιλιόμετρα (ἑπόμενοι πίνακες) καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἰσοσταθμημένα ὑψόμετρα τῶν σταθερῶν σημείων R_1, R_2, R_3, R_4, R_6, R_7, R_8, R_9, R_{10}, R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}, R_{15}, R_{16}, R_{18}, R_{19} ἐκ τῶν δεδομένων ὑψομέτρων R_5 καὶ R_{17}».



Σχ. 23

Λύσις: Παριστῶμεν διὰ τοῦ + τὰς κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ βέλους ὑψομετρικὰς διαφορὰς Δh_1, Δh_2,..., μεταξὺ τῶν ἀφετηριῶν $R_{10}-R_5$ R_5-R_{10},..., καὶ διὰ τοῦ — τὰς κατὰ τὴν ἀντίθετον φοράν. W_1, W_2, W_3 εἶναι τὰ σφάλματα τοῦ κλεισίματος ἑκάστου πολυγώ-

Ἐπανάληψις	Μετάβασις +	Μετάβασις −	’Επιστροφή +	’Επιστροφή −	Μέσος ὅρος +	Μέσος ὅρος −	’Αποστάσεις Μεταβ.	’Αποστάσεις Ἐπιστρ.	’Αποστάσεις Μ. Ορ.
Δh_1 R_{10} – R_2	2.347		2.348		2.347		952	950	951
R_2 – R_1		16.596		16.595		16.596	922	915	918,5
R_1 – R_3	1.375		1.369		1.372		930	950	940
R_3 – R_9		1.877		1.881		1.879	676,6	678	677,3
R_9 – R_4	3.663		3.666		3.665		740	740	740
R_4 – R_5	7.902		7.906		7.904		752	685	718,5
’Αθροισμ.	15.287	18.473	15.289	18.476	15.288	18.475 +15.288 − 3.187	4.972,6	4,918	4.945,3 4,9
Δh_2 R_5 – R_8	2.192		2.195		2.193		530	532	531
R_8 – R_{10}	0.996		1.000		0.998		590	596	593
’Αθροισμ.	3.188		3.195		3.191		1.120	1.128	1.124 1.1
Δh_3 R_5 – R_{13}	8.582		8.586		8.584		526	514	520
R_{13} – R_1	8.943		8.947		8.945		742	732	737
’Αθροισμ.	17.525		17.533		17.529		1.268	1.246	1,257 1.3
Δh_4 R_{11} – R_{19}	3.421		3.424		3.422		584	584	584
R_{19} – R_6		4.528		4.527		4.528	522	528	525
’Αθροισμ.	3.421	4.528	3.424	4.527	3.422	4.528 +3.422 −1.106	1.106	1.112	1.109 1.1

	Μετάβασις		›Επιστροφή		Μέσος όρος		›Αποστάσεις		
	+	−	+	−	+	−	Μεταβ.	Επιστρ.	Μ.Ορ.
R_6		7.224		7.228		7.226	660	660	660
Δh_5 R_8		6.020		6.023		6.021	724	737	730,5
R_{10}									
Ἀθροίσματα		13.244		13.251		13.247	1.384	1.397	1.390,5
									1·4
R_{11}	14.819		14.823		14.821		874	872	873
R_{16}	22.181		22.177		22.179		836	764	800
R_{15}		8.760		8.764		8.762	496	492	494
Δh_6 R_7		14.946		14.944		14.945	898	896	897
R_{17}	17.091		17.093		17.092		734	740	737
R_{14}		18.487		18.491		18.489	924	1 018	971
R_{12}		12.979		12.983		12.981	984	926	955
R_6									
Ἀθροίσματα	54.091	55.172	54.093	55.182	54.092	55.177 +54.092 −1.085	5.746	5.708	5.727 5.7

νου, $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots$ αἱ ἐπενεκτέαι διορθώσεις εἰς τὰς ὑψομετρικὰς διαφορὰς καὶ $p_1, p_2, \ldots p_6$ τὰ ἀντίστοιχα βάρη αὐτῶν. (Τὸ βάρος τοῦ ἐξαγομένου μιᾶς χωροσταθμήσεως προερχομένης ἀπὸ 6 μερικὰς χωροσταθμηκὰς διαφορὰς εἶναι $\frac{1}{6}$. Καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν παρατηρήσεων ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἀποστάσεως τῶν ὑπὸ χωροστάθμησιν σημείων-μήκους χωροσταθμηκῆς ὁδεύσεως καὶ οὐχὶ τῆς κατ' εὐθεῖαν ἀποστάσεως—ἕπεται ὅτι τὸ βάρος εἰς τὴν χωροστάθμησιν εἶναι ἀντιστρόφως ἀναλόγου τοῦ μήκους τῆς χωροσταθμηκῆς ὁδεύσεως: $P_1 = \frac{1}{S_1} = 4{,}9$.

$P_2 = \frac{1}{S_2} = 1{,}1$. $P_3 = \frac{1}{S_3} = 1{,}3$. $P_4 = \frac{1}{S_4} = 1{,}1$. $P_5 = \frac{1}{S_5} = 1{,}4$ καὶ

$P_6 = \frac{1}{S_6} = 5{,}7$).

Αἱ ἐξισώσεις συνθηκῶν καὶ σφαλμάτων θὰ εἶναι αἱ ἑπόμεναι :

Α'. Συνθῆκαι πολυγώνων

p=βάρος

	$\frac{1}{p}=s$	+	—
1) $\Delta h_1 = R_5 - R_{10} =$	4.9		3.187
$\Delta h_2 = R_{10} - R_5 =$	1.1	3.191	
		+3.191	3.187
		—3.187	
	$W_1 = -$	4	

2) $\Delta h_3 = R_{11} - R_5 =$	1.3	17.529	
$\Delta h_4 = R_6 - R_{11} =$	1.1		1.106
$\Delta h_5 = R_{10} - R_6 =$	1.4		13.247
$-\Delta h_2 = R_{10} - R_5 =$	1.1		3.191
		17.529	—17.544
			+17.529
		$W_2 =$	+ 15

3) $\Delta h_6 = R_6 - R_{11} =$	5.7		1.085
$-\Delta h_4 = R_{11} - R_6 =$	1.1	1.106	
		1.106	1.085
		1.085	
	$W_3 = -$	21	

Ἐξισώσεις συνθηκῶν

1) $v_1 + v_2 \qquad = -4$

2) $v_3 + v_4 + v_5 - v_2 \qquad = +15$

3) $v_6 - v_4 \qquad = -21$

Πίναξ ἐξισώσεων συνθηκῶν καὶ σφαλμάτων

	v_1	v_2	v_3	v_4	v'_5	v_6	W	K
$\frac{1}{p}=S$	4.9	1.1	1.3	1.1	1.4	5.7		
α	+1	+1					+ 4	$K_1=-0{,}226$
β		−1	+1	+1	+1		−15	$K_2=+2{,}405$
γ				−1		+1	+21	$K_3=-2{,}699$
υ	−1.1	−2.9	+3.1	+5.6	+3.4	−15.4		

ΚΑΝΟΝΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

		α	β	γ	W	Σ	K
α	$[\alpha\alpha]=+6{,}0000$ $\frac{[\alpha\alpha]}{[\alpha\alpha]}=+1{,}0000$	$[\alpha\alpha]$ +6,0000	$[\alpha\beta]$ −1,1	$[\alpha\gamma]$ 0	+4	+8,9	$K_1=-0{,}226$
β	$[\alpha\beta]=-1{,}1000$ $\frac{[\alpha\beta]}{[\alpha\alpha]}=-0{,}1833$	$[\beta\beta_1]=+4{,}698$ $\frac{[\beta\beta_1]}{[\beta\beta_1]}=+1{,}000$	$[\beta\beta]$ +4,9	$[\beta\gamma]$ −1,1	−15	−12,3	$K_2=+2{,}405$
γ	$[\alpha\gamma]=0$ $\frac{[\alpha\gamma]}{[\alpha\alpha]}=0$	$[\beta\gamma_1]=-1{,}100$ $\frac{[\beta\gamma_1]}{[\beta\beta_1]}=-0{,}234$	$[\gamma\gamma^2]=+6{,}543$ $\frac{[\gamma\gamma_2]}{[\gamma\gamma_2]}=+1{,}000$	$[\gamma\gamma]$ −6,8	+21	−15,3	$K_3=-2{,}699$
W	$[\alpha w]=+4{,}0000$ $\frac{[\alpha w]}{[\alpha\alpha]}=+0{,}6667$	$[\beta w_1]=-14{,}267$ $\frac{[\beta w_1]}{[\beta\beta_1]}=-3{,}037$	$[\gamma w_2]=+17{,}662$ $\frac{[\gamma w_2]}{[\gamma\gamma_2]}=+2{,}699$				
Σ	$[\alpha\Sigma]=+8{,}9000$ $\frac{[\alpha\Sigma]}{[\alpha\alpha]}=+1{,}4830$	$[\beta\Sigma_1]=-10{,}669$ $\frac{[\beta\Sigma_1]}{[\beta\beta_1]}=-2{,}271$	$[\gamma\Sigma_2]=+24{,}205$ $\frac{[\gamma\Sigma_2]}{[\gamma\gamma_2]}=+3{,}699$				

Λύοντες τὰς κανονικὰς ἐξισώσεις εὑρίσκομεν τὰ Δh, καθὼς ἐν συνεχείᾳ καὶ τὰ υ.

Ὑπολογισμὸς μέσου σφάλματος

		υ	υ^2	S	$\frac{\upsilon^2}{S}$	W	KW
1	υ_1	$-1,1$	1,21	4,9	0,2469	$+4$	$-0,904$
2	υ_2	$-2,9$	8,41	1,1	7,6465	-15	$-36,075$
3	υ_3	$+3,1$	9,61	1,3	7,3923	$+21$	$-56,679$
4	υ_4	$+5,6$	31,36	1,1	28,5091		
5	υ_5	$+3,4$	11,56	1,4	8,2571		
6	υ_6	$-15,4$	237,16	5,7	41,6070		
					93,6579		93,657

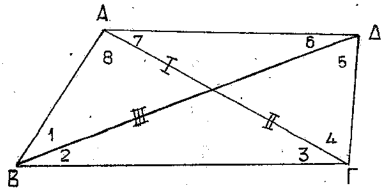
$$m=\pm\sqrt{\frac{\frac{\upsilon^2}{s}}{6}}=\pm\sqrt{\frac{93,658}{6}}=\sqrt{15,6097}=\pm 3,95 \text{ m/m ἀνὰ χιλιόμετρον}$$

Ἰσοστάθμησις τριγωνομετρικοῦ δικτύου.

Κατὰ τὴν ἰσοστάθμησιν τῶν παρατηρήσεων ἑνὸς τριγωνομετρικοῦ δικτύου τίθενται πρὸς λύσιν προβλήματα, περιέχοντα ἑκάστοτε διαφορετικὰ δεδομένα. Ταῦτα ἐξαρτῶνται ἀπὸ ποικίλους παράγοντας (διαμόρφωσις τοῦ ἐδάφους, δυνατότητες τῶν ἐκτελούντων τὰς μετρήσεις κ.λ.π.) καὶ ἑπομένως ἡ πορεία τῆς ἐργασίας λαμβάνει διαφορετικὴν ἑκάστοτε μορφήν. Θὰ παραθέσωμεν μερικὰ ἀναλυτικὰ παραδείγματα.

Παράδειγμα 1ον. ***Τετράπλευρον μὲ δύο γνωστὰ σημεῖα.*** «Δίδεται τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 24) τοῦ ὁποίου ἐμετρήθησαν αἱ γωνίαι 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 καὶ ἐλήφθησαν αἱ τιμαί των. Ζητεῖται νὰ γίνῃ ἰσοστάθμησις τῶν γωνιῶν του».

Λύσις : Ἡ πορεία ἐργασίας εἶναι ἡ ἀκόλουθος : Ὑπολογίζομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν συνθηκῶν τῶν ἐξισώσεων γωνιῶν τριγώνου (=3), ἐξισώσεων πλευρῶν (=1) καὶ ὁριζοντίας περιστροφῆς (=0). Εὑρίσκομεν τὰς ἐξισώσεις τριγώνων. Καὶ ἀκολούθως τὰς ἐξισώσεις



Σχ. 24

πλευρῶν, λαμβάνοντες ὡς ἐξωτερικὸν κέντρον γωνιῶν πολυγώνου τὴν κορυφὴν Γ, ὅτε θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\eta\mu(1+2)\,\eta\mu5\eta\mu7}{\eta\mu8\eta\mu2\eta\mu(5+6)}=1.$$

Ἡ ὅλη ἐργασία ἀκολουθεῖ τὴν ἑξῆς πορείαν :

Α'. ΤΡΙΓΩΝΑ

Τρίγωνα	Ἀριθ. Γων.	Μετρηθ. γωνίαι		Διόρθωσ.*	Διορθωμέναι γωνίαι
I	1	45⁰ 52′ 08″		0,56	45⁰ 52′ 08″,56
	6	51 40 36		+2,36	51 40 38,30
	7	47 40 20		+1,64	47 40 21,64
	8	34 46 50		+1,50	34 46 51,50
		179 59 54	$W_1=+6$		180 00 00,00
II	2	52 37 20		—2,70	52 37 17,3
	3	46 43 46		—3,36	46 43 42,64
	4	42 20 22		—1,50	42 20 20,50
	5	38 18 42		—2,44	38 18 39,56
		180 00 10	$W_2=-10$		180 00 00,00
III	1	45 52 08		+0,54	45 52 08,56
	2	52 37 20		—2,70	52 37 17,30
	3	46 43 46		—3,36	46 43 42,64
	8	34 46 50		+1,50	34 46 51,50
		180 00 04	$W_3=-4$		180 00 00,00

* Αἱ τιμαὶ αὐταὶ εὑρίσκονται μετὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων καὶ προστιθέμεναι εἰς τὰς μετρήσεις δίδουν τὰς διορθωμένας γωνίας·

Β'. ΣΥΝΘΗΚΑΙ ΠΛΕΥΡΩΝ

Ἀριθμητής			Παρονομαστής		
Ἀριθ. Γων.	διαφ. λογ. λογ. ημ.	Διαφ. δι' 1''	Ἀριθ. Γων.	διαφ. λογ. λογ. ημ.	Διαφ. δι' 1''
1+2	9,995214	—0,3	8	9,756206	+3,0
5	9,792348	+2,7	2	9,900176	+1,6
7	9,868823	+1,9	5+6	0,000000	+0,0

Σ λογ. ἀριθμητοῦ = 9,656385

Σ λογ. παρονομασ.= 9,656382

W=+3 (ἕκτης δεκαδικῆς τάξεως).

Γ'. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΚΑΙ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

	υ_1	υ_2	υ_3	υ_4	υ_5	υ_6	υ_7	υ_8	W	K	Σ	Σ K
α	+ 1	+ 1	+ 1					+ 1	+ 4	$\overset{\kappa_1}{-}$ 1,8506	+ 4	− 7,4024
β		+ 1	+ 1	+ 1	+ 1				+ 10	$\overset{\kappa_2}{-}$ 1,5054	+ 4	− 6,0216
γ	+ 1					+ 1	+ 1	+ 1	− 6	$\overset{\kappa_3}{+}$ 2,3038	+ 4	+ 9,2152
δ	− 0,3(*)	− 1,9(*)			+ 2,7		+ 1,9	− 3	+ 3	$\overset{\kappa_4}{-}$ 0,3472	− 6	+ 0,2083
Σ	+ 1,7	+ 0,1	+ 2,0	+ 1	+ 3,7	+ 1	+ 2,9	+ 1			− 11,4	
υ	+ 0,56	− 2,70	− 3,36	− 1,50	− 2,44	+ 2,36	+ 1,64	+ 1,50				− 4,005
υ^2	+ 0,3136	7,29	11,2896	2,25	5,9536	5,29	2,56	2,25		[υ υ]	= 37,1968	

*) Ἐκ τῆς γραμμικῆς μορφῆς τῶν ἐξισώσεων τῶν πλευρῶν, ἤτοι :

$$-0{,}3(\upsilon_1+\upsilon_2)+2{,}7\upsilon_5+1{,}9\upsilon_7-3{,}0\upsilon_8-1{,}6\upsilon_2+3=0,$$

καὶ $-0{,}3\upsilon_1-1{,}9\upsilon_2+2{,}7\upsilon_5+1{,}9\upsilon_7-3{,}0\upsilon_8+3{,}0.$

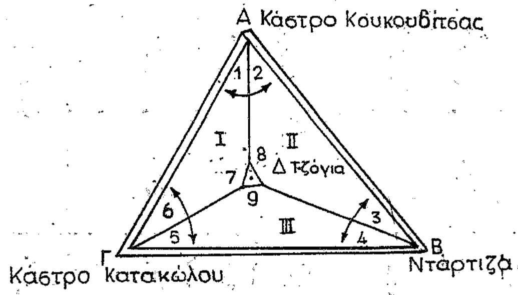
Δ΄ ΚΑΝΟΝΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΑΥΤΩΝ

		α	β	γ	δ	w	Σ	κ	κw
α	[αα] = +4 [αα]/[αα] = +1,00	[αα] +4	[αβ] +2	[αγ] +2	[αδ] −5,2	w_1 +4	[αΣ] +6,8	$κ_1$ −1,6500	−7,4024
β	[αβ] = +2 [αβ]/[αα] = +0,5000	[ββ₁] = +5,000 [ββ₁]/[ββ₁] = +1,000	[ββ] +4	[βγ]	[βδ] +0,8	w_2 +10	[βΣ] +16,8	$κ_2$ −1,5054	−15,0540
γ	[αγ] = +2 [αγ]/[αα] = +0,5000	[βγ₁] +1,000 [βγ₁]/[ββ₁] = +0,3333	[γγ₂] = +2,6667 [γγ₂]/[γγ₂] = +1,000	[γγ] +4	[γδ] −1,4	w_3 −6	[γΣ] −1,4	$κ_3$ +2,3036	−13,8206
δ	[αδ] = −5,2 [αδ]/[αα] = −1,300	[βδ₁] +3,4000 [βδ₁]/[ββ₁] +1,3333	[γδ₂] + 2,333 [γδ₂]/[γγ₂] = +1,0000	[δδ₃] = +10,9452 [δδ₃]/[δδ₃] = +1,000	[δδ] +23,6	w_4 +3	[δΣ] +20,8	$κ_4$ −0,3472	−1,0416
w	[αw] = +4 [αw]/[αα] = +1,000	[βw₁] = +8,000 [βw₁]/[ββ₁] = +2,6667	[γw₂] = −5,3333 [γw₂]/[γγ₂] = −2,000	[δw₃] = +3,8002 [δw₃]/[δδ₃] = +0,3472			[wκ]		= 37,32
Σ	[αΣ] = +6,8 [αΣ]/[αα] = +1,7000	[βΣ₁] = +13,4000 [βΣ₁]/[ββ₁] = +4,4667	[γΣ₂] = 0,333 [γΣ₂]/[γγ₂] = −0,1250	[δΣ₃] = +14,7464 [δΣ₃]/[δδ₃] = +1,3472					

Αἱ διορθωμέναι τιμαὶ τῶν γωνιῶν δίδονται εἰς τὸν Λ΄. πίνακα.
Τὸ μέσον σφάλμα μιᾶς γωνίας εἶναι :

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-v}} = \sqrt{\frac{37,26}{4}} = \pm 3''.$$

Παράδειγμα 2ον. *(Δη περίπτωσις)* «Δίδονται τὰ σημεῖα Α,Β,Γ καὶ ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ τὸ Δ (σχ. 25) δι' ἰσοσταθμήσεως



Σχ. 25

τῶν μετρηθεισῶν γωνιῶν 1,2,3,4,5,6,7,8,9».

Ἔστω αἱ τιμαί :

ΑΓΔ : (1)= 33$^{\beta}$ 58′ 73″
(7)=143 74 29
(6)= 22 67 05

200 00 07
$W_1 = -7''$

ΑΒΔ : (2) 32$^{\beta}$ 07′ 14″
(3) 21 91 69
(8) 146 01 14

199 99 97
$W_2 = +3''$

ΒΓΔ : (4) 45$^{\beta}$ 13′ 78″
(5) 44 61 72
(9) 110 24 57

200 00 07
$W_3 = -7''$

Ἡ πορεία τῆς ὅλης ἐργασίας παρουσιάζεται εἰς τοὺς ἀκολουθοῦντας πίνακας. Ἐνταῦθα αἱ συνθῆκαι εἶναι: ἡμιτονικὴ 1, αἱ συνθῆκαι γωνιῶν ἐν γένει εἶναι 6 καὶ σύνολον 7, αἱ συνθῆκαι τριγώνων 3 καὶ 3 ἀζιμουθιακαὶ (ἡ συνθήκη τοῦ κέντρου δὲν ὑφίσταται ἐν προκειμένῳ).

Α΄. ΤΡΙΓΩΝΑ

Αρ. Γων.	Όνομα Σημείου	Γων. Μετρηθείσαι	Διόρθ.	Γων. Διορθωμ.	Λογ. ημ.	Διαφ. λογ.	Διαφ. D	Λογ. πλευράς
I					4,362	8605		
						794		
1	Κάστρο Κουκουβίτσας	33ᵍ 58′ 73″	-5″,16	33ᵍ 58′ 67″,84	9,701	8716		4.054 8115
						401		
7	Τζόγια	143 74 29	-0,67	143 74 28,33	9,888	1854	559	4241 0860
						70		
6	Κάστρο Κατακώλου	22 67 05	-1,7	22 67 03,83	9552	3537		3.895 2212
		200 00 07	W_1=-7″-7,00	200 00 00,00				
II					4366	9307		
						146		
2	Κάστρο Κουκουβίτσας	32 07 14	-2,24	32 07 1,76	9.683	6925		4.050 6378
						360		
3	Ντάρτιζα	21 91 69	+2,49	21 91 71,49	9,528	1547		3.895 2214
						500		
8	Τζόγια	146 01 14	+2,75	146 01 16,75	9,875	0053	601	4241 9860
		199 99 97	W_2=+3″+3,00	200 00 00,00				
III					42 41	1711		
						598		
4	Ντάρτιζα	45 13 78	-2,89	45 13 75,11	9.813	5806		4054 8,115
						566		
5	Κάστρο Κατακώλου	44 61 72	-2,03	44 61 69,97	9.809	4099		4050 6376
						50		
9	Τζόγια	110 24 57	-2,08	110 24 54,92	9.994	3464	110	4235 5225
		200 00 07	W_3=-7″-7,00	200 00 00,00				

Β'. ΣΥΝΘΗΚΑΙ ΠΛΕΥΡΩΝ (ΗΜΙΤΟΝΙΚΑΙ)

Ἀριθ. Γων.	λογ. ημ.	διαφ. λογ.	Διαφ. D	Ἀριθ. Γων.	λογ. ημ.	διαφ. λογ.	Διαφ. D
		855				173	
1	9,701	8716	1171	2	9,683	6925	1238
		1312				621	
3	9,528	1547	1902	4	9,813	5806	796
		582				92	
5	9,809	4099	809	6	9,542	3537	1834

9,0397111 9,039 7154
—9,0397154
—43

1= 33 58 73
2= 32 07 14
1+2= 65 65 87
α= 65 65 79.6
$W_4=-7.4$

3= 21 91 69
4= 45 13 78
3+4= 67 05 47
β= 67 05 46.6
$W_5=-0.4$

5= 44 61 72
6= 22 67 05
5+6= 67 28 77
γ= 67 28 73.8
$W_6=-3.2$

Γ'. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΚΑΙ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	W	K
α	+ 1					+ 1	+ 1			+ 7	- 0,666
β		+ 1	+ 1					+ 1		- 3	+ 2,748
γ				+ 1	+ 1				+ 1	+ 7	- 2,076
δ	+ 1	+ 1								+ 7,4	- 4,735
ε			+ 1	+ 1						+ 0,4	- 0,653
ζ					+ 1	+ 1				+ 3,2	- 0,124
η	+ 11,71	- 12,38	+ 19,02	- 7,96	+ 8,09	- 18,34				- 43,0	+ 0,0209
Σ	+ 13,71	- 10,38	+ 21,02	- 5,96	+ 10,09	- 16,34	+ 1	+ 1	+ 1		
υ	- 5,156	- 2,246	+ 2,493	- 2,895	- 2,031	- 1,173	- 0,666	+ 2,748	- 2,076	[υ]	- 11,0
$υ^2$	26,5843	5,0445	6,2150	8,3810	4,1250	1,3759	0,4436	7,5515	4,3056	[υυ]	= 64,0264

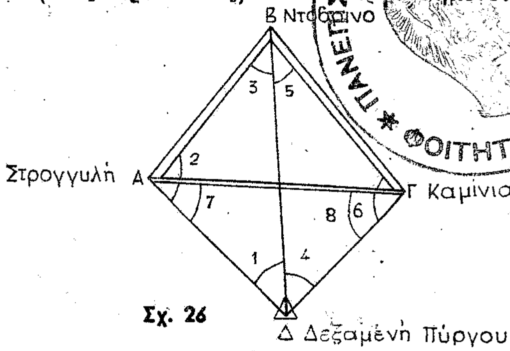
Δ.' ΚΑΝΟΝΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΑΥΤΩΝ

		α	β	γ	δ	ε	ζ	η	W	Σ	K	ΣK
α	$[\alpha\ \alpha]$ +3 $\frac{[\alpha\ \alpha]}{[\alpha\ \alpha]}$ +1	$[\delta\ \alpha]$ +3	$[\alpha\ \beta]$ //	$[\alpha\ \gamma]$ //	$[\alpha\ \delta]$ +1	$[\alpha\ \varepsilon]$	$[\alpha\ \zeta]$ +1	$[\alpha\ \eta]$ −6,63	+7	+5,37	K_1 = −0,666	−4,662
β	$[\alpha\ \beta]$ 0 $\frac{[\alpha\ \beta]}{[\alpha\ \alpha]}$ 0	$[\beta\ \beta_1]$ +3 $\frac{[\beta\ \beta_1]}{[\beta\ \beta_1]}$ +1	$[\beta\ \beta]$ 3	$[\beta\ \gamma]$ //	$[\beta\ \delta]$ +1	$[\beta\ \varepsilon]$ +1	$[\beta\ \zeta]$ //	$[\beta\ \eta]$ +6,64	−3	+8,64	K_2 = +2,748	−8,244
γ	$[\alpha\ \gamma]$ 0 $\frac{[\alpha\ \gamma]}{[\alpha\ \alpha]}$ 0	$[\beta\ \gamma_1]$ 0 $\frac{[\beta\ \gamma_1]}{[\beta\ \gamma_1]}$ 0	$[\gamma\ \gamma_2]$ +3 $\frac{[\gamma\ \gamma_2]}{[\gamma\ \gamma_2]}$ +1	$[\gamma\ \gamma]$ +3	$[\gamma\ \delta]$	$[\gamma\ \varepsilon]$ +1	$[\gamma\ \zeta]$ +1	$[\gamma\ \eta]$ +0,13	+7	+12,13	K_3 = −2,076	−14,532
δ	$[\alpha\ \delta]$ +1 $\frac{[\alpha\ \delta]}{[\alpha\ \alpha]}$ +0,333	$[\beta\ \delta_1]$ +1 $\frac{[\beta\ \delta_1]}{[\beta\ \beta_1]}$ +0,333	$[\gamma\ \delta_2]$ 0 $\frac{[\gamma\ \delta_2]}{[\gamma\ \gamma_2]}$ 0	$[\delta\ \delta_3]$ +1,333 $\frac{[\delta\ \delta_3]}{[\delta\ \delta_3]}$ +1	$[\delta\ \delta]$ +2	$[\delta\ \varepsilon]$	$[\delta\ \zeta]$ //	$[\delta\ \eta]$ −0,67	+7,4	+10,73	K_4 = −4,735	−35,039
ε	$[\alpha\ \varepsilon]$ 0 $\frac{[\alpha\ \varepsilon]}{[\alpha\ \alpha]}$ 0	$[\beta\ \varepsilon_1]$ +1 $\frac{[\beta\ \varepsilon_1]}{[\beta\ \beta_1]}$ +0,333	$[\gamma\ \varepsilon_2]$ +1 $\frac{[\gamma\ \varepsilon_2]}{[\gamma\ \gamma_2]}$ +0,333	$[\delta\ \varepsilon_3]$ −0,333 $\frac{[\delta\ \varepsilon_3]}{[\delta\ \delta_3]}$ −0,250	$[\varepsilon\ \varepsilon_4]$ +1,251 $\frac{[\varepsilon\ \varepsilon_4]}{[\varepsilon\ \varepsilon_4]}$ +1	$[\varepsilon\ \varepsilon]$ +2	$[\varepsilon\ \zeta]$ //	$[\varepsilon\ \eta]$ +11,06	+0,4	+15,46	K_5 = −0,653	−0,2612
ζ	$[\alpha\ \zeta]$ +1 $\frac{[\alpha\ \zeta]}{[\alpha\ \alpha]}$ +0,333	$[\beta\ \zeta_1]$ 0 $\frac{[\beta\ \zeta_1]}{[\beta\ \beta_1]}$ 0	$[\gamma\ \zeta_2]$ +1 $\frac{[\gamma\ \zeta_2]}{[\gamma\ \gamma_2]}$ +0,333	$[\delta\ \zeta_3]$ −0,333 $\frac{[\delta\ \zeta_3]}{[\delta\ \delta_3]}$ −0,250	$[\varepsilon\ \eta_4]$ −0,416 $\frac{[\varepsilon\ \eta_4]}{[\varepsilon\ \varepsilon_4]}$ −0,333	$[\zeta\ \zeta_5]$ +1,112 $\frac{[\zeta\ \zeta_5]}{[\zeta\ \zeta_5]}$ +1	$[\zeta\ \zeta]$ +2	$[\zeta\ \eta]$ −10,25	+3,2	−3,05	K_6 = −0,124	−0,3968
η	$[\alpha\ \eta]$ −6,630 $\frac{[\alpha\ \eta]}{[\alpha\ \alpha]}$ −2,210	$[\beta\ \eta_1]$ +6,640 $\frac{[\beta\ \eta_1]}{[\beta\ \beta_1]}$ +2,213	$[\gamma\ \eta_2]$ +0,130 $\frac{[\gamma\ \eta_2]}{[\gamma\ \gamma_2]}$ +0,043	$[\delta\ \eta_3]$ −0,673 $\frac{[\delta\ \eta_3]}{[\delta\ \delta_3]}$ −0,505	$[\varepsilon\ \zeta_4]$ +8,638 $\frac{[\varepsilon\ \zeta_4]}{[\varepsilon\ \varepsilon_4]}$ +6,904	$[\zeta\ \eta_5]$ −5,377 $\frac{[\zeta\ \eta_5]}{[\zeta\ \zeta_5]}$ −4,836	$[\zeta\ \zeta_6]$ 1000,983 $\frac{[\zeta\ \zeta_6]}{[\zeta\ \zeta_6]}$ 1	$[\eta\ \eta]$ +1116,31	−4,3	1073,59	K_7 = +0,0209	−0,8987
W	$[\alpha\ W]$ +7 $\frac{[\alpha\ W]}{[\alpha\ \alpha]}$ +2,33	$[\beta\ W_1]$ −3 $\frac{[\beta\ W_1]}{[\beta\ \beta_1]}$ −1	$[\gamma\ W_2]$ +7 $\frac{[\gamma\ W_2]}{[\gamma\ \gamma_2]}$ +2,333	$[\delta\ W_3]$ +6,068 $\frac{[\delta\ W_3]}{[\delta\ \delta_3]}$ +4,552	$[\varepsilon\ W_4]$ +0,585 $\frac{[\varepsilon\ W_4]}{[\varepsilon\ \varepsilon_4]}$ +0,468	$[\zeta\ W_5]$ +0,250 $\frac{[\zeta\ W_5]}{[\zeta\ \zeta_5]}$ +0,225	$[\eta\ W_6]$ −20,958 $\frac{[\eta\ W_6]}{[\eta\ \eta_6]}$ +0,018				[WK] = −64,0337	
Σ	$[\alpha\ \Sigma]$ +5 37 $\frac{[\alpha\ \Sigma]}{[\alpha\ \alpha]}$ +1,79	$[\beta\ \Sigma_1]$ +8,64 $\frac{[\beta\ \Sigma_1]}{[\beta\ \beta_1]}$ +2,88	$[\gamma\ \Sigma_2]$ +12,13 $\frac{[\gamma\ \Sigma_2]}{[\gamma\ \gamma_2]}$ +4,043	$[\delta\ \Sigma_3]$ +6,065 $\frac{[\delta\ \Sigma_3]}{[\delta\ \delta_3]}$ +4,549	$[\varepsilon\ \Sigma_4]$ +10,060 $\frac{[\varepsilon\ \Sigma_4]}{[\varepsilon\ \varepsilon_4]}$ +8,041	$[\zeta\ \Sigma_5]$ −4,011 $\frac{[\zeta\ \Sigma_5]}{[\zeta\ \zeta_5]}$ −3,607	$[\eta\ \Sigma_6]$ +1018,732 $\frac{[\eta\ \Sigma_6]}{[\eta\ \eta_6]}$ +1,018					

Αἱ διορθωμέναι γωνίαι δίδονται εἰς τὸν Α'. πίνακα. Τὸ μέσον σφάλμα μιᾶς γωνίας εἶναι :

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{7}} = \sqrt{\frac{64{,}02}{7}} = \pm 3'',02$$

«Παράδειγμα 3ον.» (*Βα περίπτωσις*) «Τοῦ παρατεθημένου τετραπλεύρου (σχ. 26) δίδονται τρία στοιχεῖα (αἱ τρεῖς πλευραί), μετρῶνται αἱ γωνίαι 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, καὶ δι' ἰσοσταθμήσεως αὐτῶν ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ τὸ σημεῖον Δ».



Σχ. 26

Λύσις: Ἡ ἐργασία τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος δίδεται διὰ τῶν ἀκολουθούντων πινάκων :

Α'. ΤΡΙΓΩΝΑ

Αρ.Γων.	Όνομα σημείου	Γων. Μετρηθεῖσαι	Διόρθωσις	Γων. Διορθωμέναι	λογ. ημ.	διαφ. λογ.		
I					3,6139	138		
						458		
1	Δεξαμενή Πύργου	$\overset{6}{47}$ 78 54	0 + 8,6	$\overset{6}{47}$ 78 62,6	9,8337	996	731	3,4477592.
						49		
2	Στρογγυλή	85 06 44	0 − 14,2	85 06 29,8	9,9879	296		3,6018483
						29		
3	Ντόβρινο	67 15 01	0 + 6,6	67 15 07,6	9,9394	177		3,5533344
		199 99 99	W_1 + 1	200 00 00,0				
II					3,6137	849		
						160		
4	Δεξαμενή Πύργου	70 23 35	0 + 11,5	70 23 46,5	9,9506	768	344	3,5644777
						212		
5	Ντόβρινο	44 62 16	0 + 10,2	44 62 26,2	9,8094	908		3,4232969
						44		
6	Καμίνια	85 14 32	0 − 4,7	85 14 27,3	9,9880	597		3,6018490
		199 99 83	W = + 17	200 00 00,0				
III					3,7174	897		
						180		
1+4	Δεξαμενη Πύργου	118 01 89	0 + 20,1	118 02 09,1	9,9823	446	198	3,6998523
						941		
7	Στρογγυλή	33 91 59	0 + 22,3	33 91 81,3	9,7057	133		3,4232971
						70		
8	Καμίνια	48 05 93	0 + 16,6	48 06 09,6	9,8358	388	725	3,5533355
		199 99 41	W = + 59	200 00 00				
3		6715.01						
5		4462.16						
	Εἶναι	111.77 .17						
	Πρέπει	111,77 .33,8	W = + 16,8					
2		85 06 44						
−7		33 91 59						
2 − 7	Εἶναι	51 14 85						
	Πρέπει	51 14 48,5	W 36,5					

Β'. ΣΥΝΘΗΚΑΙ ΠΛΕΥΡΩΝ

Ἀριθ. Γων.	διαφ. λογ. λογ. ἡμ.	Διαφ. D	Ἀριθ. Γων.	διαφ. λογ. λογ. ἡμ.	Διαφ. D
	72			683	
2	9.9879296	163	7	9.7057133	1157
	129			4	
5	9.8094908	808	3	9.9394177	386
	674			52	
8	9.8357663	725	6	9.9880597	162
	9.6332742			9.6332646	
	—9.6332646				
	W=+96				

Στρογγυλὴ x=—5.511.82 y=—8.041.97
Καμίνια x=— 827.31 y=—6.265.13
+4.684.51 +1.776.84

$$\frac{\eta\mu 2\ \eta\mu 5\ \eta\mu 8}{\eta\mu 7\ \eta\mu 3\ \eta\mu 6}$$

λογ Δx= 3. 670 6641 λογ (Δy+Δx) =3.8103233
γογ Δy= 3. 249 6483 λογ (Δy—Δx) =0.3467782
λογ εφ.α_{AB} 0. 421 0158 λογ εφ(50+α_{AB})=3.4635451

116,92

Στρογ—Καμ.=α_{AB}=76.9202,3
Στρογ—Ντοβρ. =25.7753,8
51.1448,5

3.6706641 3.2496483
9.2708118 9.5497960
S=3.6998523 = 3.6998523

Γ'. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΥΝΘΗΚΩΝ

	υ_1	υ_2	υ_3	υ_4	υ_5	υ_6	υ_7	υ_8	W	K
α	+ 1	+ 1	+ 1						- 1	- 7,495
β				+ 1	+ 1	+ 1			- 17,0	- 4,613
γ				+ 1			+ 1	+ 1	- 59,0	+ 16,142
δ			+ 1		+ 1				- 16,8	+ 14,341
ε		+ 1					- 1		+ 36,5	- 6,820
ζ		+ 1,63	- 3,86		+ 8,08	- 1,62	- 11,57	+ 7,25	+ 96	+ 0,060
υ	+8,647	- 14,217	+ 6,614	+ 11,529	+ 10,213	- 4,710	+ 22,268	+ 16,577		

Δ! ΚΑΝΟΝΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ϗ ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΑΥΤΩΝ

		α	β	γ	δ	ε	ζ	W	Σ	K
α	$[\alpha\alpha]$ +3 $\frac{[\alpha\alpha]}{[\alpha\alpha]}$ +1000	$[-\alpha\alpha]$ + 3	$[\alpha\beta]$	$[\alpha\gamma]$ + 1	$[\alpha\delta]$ + 1	$[\alpha\varepsilon]$ + 1	$[\alpha\zeta]$ − 2,23	− 1	+ 2,77	K_1 =−7,495
β		$[\beta\beta_1]$ +3,000 $\frac{[\beta\beta_1]}{[\beta\beta_1]}$ +1,000	$[\beta\beta]$ + 3	$[\beta\gamma]$ + 1	$[\beta\delta]$ + 1	$[\beta\varepsilon]$	$[\beta\zeta]$ + 6,46	− 17,0	− 5,54	K_2=−4,613
γ	$[\alpha\gamma]$ + 1 $\frac{[\alpha\gamma]}{[\alpha\alpha]}$ +0,333	$[\beta\gamma_1]$ +1,000 $\frac{[\beta\gamma_1]}{[\beta\beta_1]}$ +0,333	$[\gamma\gamma_2]$ +3,334 $\frac{[\gamma\gamma_2]}{[\gamma\gamma_2]}$ +1,000	$[\gamma\gamma]$ + 4	$[\gamma\delta]$	$[\gamma\varepsilon]$ − 1	$[\gamma\zeta]$ − 4,32	− 59,0	− 58,32	K_3 =+16,142
δ	$[\alpha\delta]$ + 1 $\frac{[\alpha\delta]}{[\alpha\alpha]}$ +0,333	$[\beta\delta_1]$ +1,000 $\frac{[\beta\delta_1]}{[\beta\beta_1]}$ + 0,333	$[\gamma\delta_2]$ − 6,667 $\frac{[\gamma\delta_2]}{[\gamma\gamma_2]}$ − 0200	$[\delta\delta_3]$ +1,200 $\frac{[\delta\delta_3]}{[\delta\delta_3]}$ +1,000	$[\delta\delta]$ + 2	$[\delta\varepsilon]$	$[\delta\zeta]$ + 4,22	− 16,8	− 8,58	K_4=+14,341
ε	$[\alpha\varepsilon]$ + 1 $\frac{[\alpha\varepsilon]}{[\alpha\alpha]}$ + 0,334	$[\beta\varepsilon_1]$ $\frac{[\beta\varepsilon_1]}{[\beta\beta_1]}$	$[\gamma\varepsilon_2]$ −1,333 $\frac{[\gamma\varepsilon_2]}{[\gamma\gamma_2]}$ −0,400	$[\delta\varepsilon_3]$ −0,600 $\frac{[\delta\varepsilon_3]}{[\delta\delta_3]}$ −0,500	$[\varepsilon\varepsilon_4]$ + 9 833 $\frac{[\varepsilon\varepsilon_4]}{[\varepsilon\varepsilon_4]}$ + 1,000	$[\varepsilon\varepsilon]$ + 2	$[\varepsilon\zeta]$ + 13,20	+ 36,5	+ 51,7	K_5=−6,820
ζ	$[\alpha\zeta]$ − 2,230 $\frac{[\alpha\zeta]}{[\alpha\alpha]}$ − 0,743	$[\beta\zeta_1]$ +6,460 $\frac{[\beta\zeta_1]}{[\beta\beta_1]}$ + 2,153	$[\gamma\zeta_2]$ −5,729 $\frac{[\gamma\zeta_2]}{[\gamma\gamma_2]}$ −1,718	$[\delta\zeta_3]$ + 1,666 $\frac{[\delta\zeta_3]}{[\delta\delta_3]}$ + 1,388	$[\varepsilon\zeta_4]$ +12,486 $\frac{[\varepsilon\zeta_4]}{[\varepsilon\varepsilon_4]}$ + 14,989	$[\zeta\zeta_5]$ + 57,022 $\frac{[\zeta\zeta_5]}{[\zeta\zeta_5]}$ +1000	$[\zeta\zeta]$ + 271,894	+ 96	+385,224	K_6=+ 0 060
W	$[\alpha w]$ − 1,000 $\frac{[\alpha w]}{[\alpha\alpha]}$ − 0,33	$[\beta w_1]$ − 17,000 $\frac{[\beta w_1]}{[\beta\beta_1]}$ − 5,667	$[\gamma w_2]$ −53,006 $\frac{[\gamma w_2]}{[\gamma\gamma_2]}$ −15,899	$[\delta w_3]$ − 21,401 $\frac{[\delta w_3]}{[\delta\delta_3]}$ − 17,834	$[\varepsilon w_4]$ + 4,932 $\frac{[\varepsilon w_4]}{[\varepsilon\varepsilon_4]}$ + 5,921	$[\zeta w_5]$ −3427 $\frac{[\zeta w_5]}{[\zeta\zeta_5]}$ −0060				
Σ	$[\alpha\Sigma]$ + 2,770 $\frac{[\alpha\Sigma]}{[\alpha\alpha]}$ + 0,922	$[\beta\Sigma_1]$ − 5,540 $\frac{[\beta\Sigma_1]}{[\beta\beta_1]}$ − 1,847	$[\gamma\Sigma_2]$ − 57,397 $\frac{[\gamma\Sigma_2]}{[\gamma\Sigma_2]}$ − 17,216	$[\delta\Sigma_3]$ − 19,134 $\frac{[\delta\Sigma_3]}{[\delta\delta_3]}$ − 15,945	$[\varepsilon\Sigma_4]$ + 18,252 $\frac{[\varepsilon\Sigma_4]}{[\varepsilon\varepsilon_4]}$ + 21,911	$[\zeta\Sigma_5]$ +53,581 $\frac{[\zeta\Sigma_5]}{[\zeta\zeta_5]}$ +0,940			$[w\,k]$	

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι'.

ΣΥΣΧΕΤΙΣΙΣ ΤΩΝ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ

Σύνοψις.

Ἐξ ὅλων ὅσα ἀνεπτύχθησαν μέχρι τοῦδε, φαίνεται σαφῶς ὅτι τὸ θέμα τῆς θεωρίας τῶν σφαλμάτων καὶ τῆς ἰσοσταθμίσεως αὐτῶν διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, σχετίζεται πρωτίστως μὲ τὴν ἐκτέλεσιν σειρᾶς παρατηρήσεων ἢ πειραματικῶν ἐρευνῶν, αἵτινες δίδουν ὡρισμένα ἀριθμητικὰ ἐξαγόμενα καὶ τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀνάγκην περαιτέρω ἐπεξεργασίας καὶ συστηματικῆς μελέτης.

Ἔρχεται λοιπὸν ὁ ἐρευνητὴς νὰ μελετήσῃ τὰ ἐξαγόμεα ταῦτα, αὐτὰ καθ' ἑαυτά, ἀλλὰ κυρίως νὰ τὰ συσχετίσῃ πρὸς ἄλληλα. Γενικώτερον ζητεῖ νὰ συσχετίσῃ μεταξὺ των δύο ἢ περισσοτέρας σειρὰς μετρήσεων ἢ παρατηρήσεων καὶ νὰ τὰς κρίνῃ κατ' ἀξίαν. Ἔχει π.χ. πρὸ ὀφθαλμῶν τὰ ἐξαγόμενα $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ καὶ ἀντιστοίχως: $y_1, y_2, \ldots y_\varkappa$ (ἐν γένει $n \neq \varkappa$) καὶ θέλει νὰ τὰ συσχετίσῃ πρὸς ἄλληλα, ἀφοῦ προηγουμένως τὰ κρίνει αὐτὰ καθ' ἑαυτά. Ἀλλὰ δὲν ἀρκεῖται μόνον εἰς αὐτὸ ὁ ἐρευνητής. Συχνὰ εἶναι εἰς θέσιν νὰ ἐμβαθύνῃ περισσότερον εἰς τὴν σπουδὴν αὐτῶν τῶν ἐξαγομένων, διὰ νὰ εὕρῃ τὰ αἴτια τὰ ὁποῖα, ἀμέσως ἢ ἐμμέσως, συνδέονται μὲ τὰ μελετώμενα φαινόμενα καὶ νὰ καταλήξῃ εἰς τὴν διατύπωσιν νόμων οἱ ὁποῖοι νὰ ἀναφέρωνται εἰς μεγαλυτέρας ὁμάδας φυσικῶν γεγονότων.

Τὸ πρόβλημα ὅμως αὐτό, παρὰ τὴν ἐκ πρώτης ὄψεως ἁπλότητα καὶ εὐκολίαν τὴν ὁποίαν παρέχει συχνὰ ἡ γραφικὴ παράστασις ἢ καὶ ἡ μαθηματικὴ ἔκφρασις —ὁσάκις τοῦτο εἶναι δυνατὸν— τῶν ἐρευνωμένων φαινόμενων, παρουσιάζει πλείστας ὅσας πολυπλόκους πλευρὰς καὶ ποικίλας δυσκολίας. Δὲν ἀποκλείεται δὲ ὁ ἐρευνητὴς ἐνίοτε νὰ καταλήξῃ εἰς ἐσφαλμένα συμπεράσματα, τὰ ὁποῖα, παρὰ τὸ μαθηματικὸν ἔνδυμα τὸ ὁποῖον δύνανται νὰ ἔχουν, δὲν εἶναι καὶ τόσον εὔκολον νὰ διακρίνῃ, ἐὰν δὲν ἔχῃ ἀρκετὴν γνῶσιν τῶν μαθηματικῶν, πολλὴν ἐπιστημονικὴν κατάρτισιν, προσοχὴν καὶ ἀρκετὴν ἐπαφὴν μὲ τὴν ἐμπειρίαν.

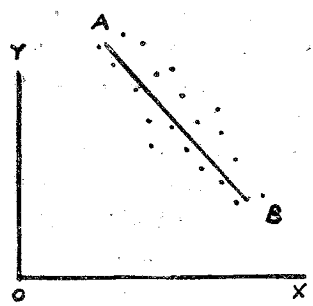
Ἂς θεωρήσωμεν δύο διακεκριμένα ἀλλήλων χαρακτηριστικά, ὅπως εἶναι π.χ. ἡ ἡλικία καὶ τὸ ὕψος τοῦ ἀνθρώπου. Ἐὰν συγκρίνωμεν τὸ μέσον ὕψος ἑνὸς μεγάλου ἀριθμοῦ ἀτόμων ἡλικίας 60 ἐτῶν μὲ τὸ μέσον ὕψος τῆς ἡλικίας τῶν 8 ἐτῶν, θὰ εὕρωμεν, ὅτι τὸ πρῶτον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ δευτέρου. Ἐπίσης τὸ μέσον ὕψος τῶν 8 ἐτῶν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τῶν 4 ἐτῶν. Ἐν προκειμένῳ ὅμως δὲν δύναται νὰ διατυπωθῇ *ἀκριβὴς σχέσις* μεταξὺ τῶν χαρακτηριστικῶν τούτων, ἐκφραζομένη διὰ μιᾶς συναρτήσεως τῆς μορφῆς: $V = \sigma(H)$. Ἐὰν ὅμως λάβωμεν τὴν γνωστὴν εἰς τὴν Φυσικὴν σχέσιν τοῦ Boyle: $pV=RT$, ἥτις συνδέει μεταξύ των, τὴν πίεσιν p ἑνὸς ἀερίου, τὸν ὄγκον του V καὶ τὴν ἀπόλυτον αὐτοῦ θερμοκρασίαν T (R εἶναι μία σταθερά), τὸ ζήτημα διαφέρει. Διότι αὐτὴ γράφεται:

$$x+y=z+c,$$

ὅπου $x=\log p$, $\psi=\log V$ καὶ $z=\log T$. Ἀπεικονίζεται δὲ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἂν ὑποτεθῇ, ὅτι αἱ παρατηρήσεις ἐγένοντο ὑπὸ μίαν ὡρισμένην θερμοκρασίαν, ὅτε μετατρέπεται εἰς τήν:

$$x+y=C \qquad (83)$$

Ἡ σχέσις αὐτὴ δὲν ἀποτελεῖ ἕναν *ἀκριβῆ τύπον* συνδέοντα πίεσιν καὶ ὄγκον. Ὑπάρχει μία διασπορὰ τῶν σημείων (x,y). Ὅμως τὸ σύνολον τῶν σημείων αὐτῶν ἢ τῶν στιγμάτων θὰ εὑρίσκεται ἑκατέρωθεν καὶ πολὺ ἐγγὺς τῆς εὐθείας AB, ἡ ὁποία δύναται νὰ εὑρεθῇ κατὰ προσέγγισιν. Τὸ διάγραμμα τοῦτο (σχ. 27), ὀνομάζεται *στικτὸν*



Σχ. 27

διάγραμμα (Scatter diagram). Μεταγενέστεραι ἀκριβέστεραι παρατηρήσεις ἔδειξαν, ὅτι ὑπάρχει μία στενὴ σχέσις μεταξὺ τῶν δύο τούτων χαρακτηριστικῶν. Τοιαύτη σχέσις δὲν ὑπάρχει μεταξὺ ἡλικίας καὶ ὕψους πλήθους ἀνθρώπων.

Ἐξ αὐτῶν γίνεται φανερόν, ὅτι ἡ συσχέτισις ἔχει σκοπὸν νὰ διερευνήσῃ τὸν βαθμὸν ἐξαρτήσεως τῆς μιᾶς μεταβλητῆς ὡς πρὸς τὴν ἄλλην καὶ ἀκόμη νὰ ὑποβοηθήσῃ τὸν ἐρευνητὴν εἰς τὸ νὰ ἐπεκτείνῃ τὴν ἔρευνάν του καὶ πρὸς ἄλλας κατευθύνσεις, τελικὸν ἀποτέλεσμα τῆς ὁποίας θὰ εἶναι ἡ συστηματικωτέρα μελέτη καὶ παρουσίασις τῶν ποικίλων φυσικῶν φαινομένων.

Πρέπει δὲ τέλος νὰ τονισθῇ ὅτι ὁ ἀσχολούμενος μὲ τοιαῦτα ζητήματα πρέπει νὰ ἔχῃ μεγάλην δόσιν διαισθήσεως ἥτις, ἐν πολλοῖς, συνδυαζομένη μὲ τὴν αὐστηρὰν λογικὴν θὰ τοῦ δίδῃ νύξεις ἢ καὶ ἀσφαλεῖς ἐνδείξεις περὶ τοῦ ποίαν ὁδὸν πρέπει ἑκάστοτε νὰ ἀκολουθῇ, διὰ νὰ εἶναι βέβαιος περί τοῦ ἀποτελέσματος εἰς τὸ ὁποῖον θὰ καταλήξῃ. Συμβαίνει δέ, πολὺ συχνά, κατὰ τὴν ἔρευναν διαφόρων προβλημάτων, σπουδαιότερον ρόλον νὰ παίζῃ ἡ ὀρθὴ καὶ ἐπιτυχὴς τοποθέτησις καὶ διατύπωσις, καὶ οὐχὶ ἡ λύσις αὐτῶν. Καὶ εἰς τὸ ζήτημα αὐτὸ ἀκριβῶς, ἄν δὲν δοθῇ ἡ δέουσα προσοχή, δὲν ἀποκλείεται νὰ παρεισφρήσουν πλεῖστα ὅσα σφάλματα, τὰ ὁποῖα καὶ νὰ μεταβάλουν τὴν ἀληθῆ εἰκόνα τῆς ἐξελίξεως τῶν διαφόρων φαινομένων.

Γραφικὴ ἀπεικόνισις τῶν φαινομένων.

Βοήθειαν μεγάλην εἰς τὴν μελέτην ἑνὸς ζητήματος δίδει ἀναμφιβόλως ἡ γραφικὴ ἀπεικόνισις αὐτοῦ. Διότι, διὰ νὰ ἐρευνήσωμεν π.χ. ἂν δύο μεγέθη ἐξαρτῶνται ἢ μὴ ἀπ᾽ ἀλλήλων καὶ ποία εἶναι ἡ πιθανὴ σχέσις ἡ ὁποία συνδέει ταῦτα, εἶναι ἀνάγκη ὅπως *μετὰ τὴν συγκέντρωσιν, ἐπεξεργασίαν καὶ κατάταξιν τοῦ ὑλικοῦ τῶν μετρήσεων ἢ παρατηρήσεων, γίνῃ γραφικὴ ἀπεικόνισις ἢ παράστασις αὐτῶν*. Ἡ τοιαύτη παράστασις ἑνὸς ἑκάστου ἐκ τῶν φαινομένων δίδει ἀσφαλῶς μίαν σαφῆ εἰκόνα τῆς ἐξελίξεώς των καὶ τῆς πιθανῆς μεταξύ των συσχετίσεως, βοηθεῖ δὲ τὰ μέγιστα εἰς τὴν βαθυτέραν μελέτην ἑκατέρου τούτων.

Συνδέομεν, συνήθως, τὰ ἀπεικονιζόμενα σημεῖα διὰ μιᾶς συνεχοῦς γραμμῆς, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν «συναρτησιακὴν καμπύλην». Αὕτη εἶναι μία καμπύλη αὐθαίρετος ἡ ὁποία παρεμβάλλεται μεταξὺ τῶν σημείων, δεχόμεθα δὲ ὅτι ἐπ᾽ αὐτῆς, ἂν δὲν κεῖνται ὅλα τὰ σημεῖα, πάντως εἶναι τοιαύτη ὥστε νὰ διέρχεται, ἐγγύτερον πάσης ἄλλης, ἐξ ὅλων τῶν διδομένων σημείων. Ἐὰν ἡ γραμμὴ αὕτη εἶναι πολὺ ἀνώμαλος τοῦτο δεικνύει ὅτι δὲν ὑπάρχει ἐν γένει σχέσις μεταξὺ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν δύο ἀξόνων, δηλαδὴ αἱ σειραὶ τῶν δύο μεγεθῶν εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀλλήλων. Δύναται ὅμως τοῦτο νὰ μαρτυρῇ τὴν ἐπίδρασιν καὶ ἄλλων αἰτίων, ἐκτὸς ἐκείνων τὰ ὁποῖα ἡμεῖς ἐδέχθημεν ὡς ὑφιστάμενα. Ὅταν ἴδωμεν ὅτι συμβαίνει τοιοῦτόν τι, τότε προσπαθῶμεν νὰ ἐκτελέσωμεν τὰς παρατηρήσεις μας, οὕτως ὥστε, κατὰ τὸ δυνατόν, νὰ μὴ μεταβάλλωνται τὰ ἄλλα στοιχεῖα διὰ νὰ μὴν ἔχωμεν καὶ τὴν παρεμβολὴν καὶ ἄλλων παραγόντων.

Κατόπιν τῆς ἐργασίας ταύτης, δὲν ἀπομένει παρὰ νὰ εὑρεθῆ *ἡ ἀναλυτικὴ ἔκφρασις τῆς καμπύλης αὐτῆς*. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ προσδιορισθοῦν, κατὰ προσέγγισιν, ὡρισμένα στοιχεῖα αὐτῆς — ὅπως π.χ. σημεῖον εἰς ὃν τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y, συντελεσταὶ κατευθύνσεως εἰς ὡρισμένα σημεῖα αὐτῆς, παράμετροι κλπ. Ἐὰν ἡ εὕρεσις, *διὰ συνήθους παρεμβολῆς*, τῆς ἐξισώσεως τῆς καμπύλης εἶναι δύσκολος, τότε καταφεύγομεν εἰς τὴν ἀναγωγὴν τῆς γραφικῆς ἀπεικονίσεως *εἰς μίαν κατάλληλον καμπύλην τοῦ Pearson* ὁπότε καὶ ὑπολογίζομεν τὰ σχετικὰ στοιχεῖα ἢ χρησιμοποιοῦμεν *τὴν ἀλλομετρικὴν μέθοδον* ἥτις βασίζεται εἰς τὰς ἰδιότητας τῆς γνωστῆς συναρτήσεως $y=ax^p$ καὶ εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς συσχετίσεως δύο σειρῶν φαινομένων, ἢ τέλος μεταχειριζόμεθα καὶ ἄλλους ἐμπειρικοὺς τρόπους οἵτινες δίδουν ἐν πολλοῖς καλὰ ἀποτελέσματα. Ἕνα ἄλλο ζήτημα τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ προσέξωμεν εἶναι τὸ τῆς ἐκλογῆς τῆς κλίματος ὑπὸ τὴν ὁποίαν θὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις. Κατ' ἀρχὴν, δὲν παίζει ρόλον ἐὰν τοὺς ἄξονας τῶν τετμημένων καὶ τεταγμένων τοὺς ἐκλέξωμεν ὑπὸ διάφορον κλίμακα. Ἡ πορεία τῆς ἐξελίξεως τοῦ μελετωμένου φαινομένου δὲν μεταβάλλεται οὐσιωδῶς. Δι' αὐτὸ καὶ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν πεπειραμένον ἐρευνητὴν νὰ χρησιμοποιήσῃ μικρὰν ἢ μεγάλην κλίμακα, εἰς τὸν ἕνα ἢ τὸν ἄλλον ἄξονα, εἰς τρόπον ὥστε ἡ ἀπεικόνισις νὰ δείξῃ παραστατικῶς τὴν εἰκόνα τοῦ ὅλου φαινομένου. Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἰδιαιτέρως ὁ ἐρευνητὴς πρέπει νὰ προσέξῃ εἶναι, νὰ ἀποφύγῃ τὴν ἐξαφάνισιν, διὰ τῆς μὴ καταλλήλου ἐκλογῆς, ἐξελίξεων τοῦ φαινομένου αἱ ὁποῖαι, χρήζουν ἰδιαιτέρας μελέτης, εἴτε ἁπλῶς διὰ τὴν συσχέτισιν δύο φαινομένων εἴτε καὶ διὰ τὴν βαθυτέραν ἔρευναν αὐτῶν πρὸς εὕρεσιν τῆς αἰτίας ἡ ὁποία τὰ προκαλεῖ. Διότι πρέπει νὰ τονισθῇ ἐνταῦθα, ὅτι συχνὰ συμβαίνει νὰ ἐξαφανίζωνται μεταβολαὶ καὶ ἄλλαι διαφοραὶ αἵτινες σημειοῦνται κατὰ τὴν ἐξέλιξιν ἑνὸς μελετωμένου γεγονότος ἕνεκα τῆς μὴ ἐπιτυχοῦς ἐκλογῆς τῆς κλίμακος ἀπεικονίσεως.

Τὸ ἴδιον ἰσχύει καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν δὲν γίνεται κατάλληλος ἐνσωμάτωσις τῶν ἐπὶ μέρους παρατηρήσεων κατὰ τὴν κατασκευὴν καὶ διάταξιν τοῦ πίνακος τῶν τιμῶν αὐτοῦ. Συμβαίνει, δηλαδή, συχνὰ νὰ ἐξαφανίζωνται ποιοτικαὶ διαφοραὶ καὶ χαρακτηριστικαὶ ἰδιότητες ἑνὸς φυσικοῦ φαινομένου, ἐξ ἀφορμῆς τῆς ἀνεπιτυχοῦς ποσοτικῆς ἐκφράσεως καὶ θεωρήσεως αὐτοῦ. Ὅπως, φυσικὰ καὶ ἀντιστρόφως, πρέπει νὰ καταβάλλεται προσοχὴ—διότι καὶ τοῦτο δύναται νὰ συμβῇ—διὰ νὰ μὴ δημιουργῆται πλασματικῶς ποιοτικὴ ἐκδήλωσις ἰδιοτήτων, μὴ ὑπαρχουσῶν εἰς τὴν πραγματικότητα.

Ἴσως εἶναι περιττὸν νὰ τονισθῇ, ὅτι εἰς πολλὰς περιπτώσεις, ἐὰν αἱ παρατηρήσεις ἢ αἱ μετρήσεις ἦσαν ἐλεύθεραι σφαλμάτων, ἀσφαλῶς δὲν θὰ παρουσιάζοντο ἀνωμαλίαι καὶ ἡ καμπύλη θὰ διήρχετο δι' ὅλων τῶν διδομένων σημείων. Ἐπειδὴ ὅμως τοῦτο δὲν συμβαίνει, τὰ σημεῖα δὲν δύνανται νὰ *κεῖνται* ἐπὶ τῆς ἰδίας καμπύλης, ἀκριβῶς δὲ ἡ ζητουμένη ἀναλυτικὴ ἔκφρασις τῆς γραφικῆς παραστάσεως πρέπει νὰ εἶναι τοιαύτη, ὥστε τὰ σφάλματα υ, νὰ πληροῦν τὴν συνθήκην:

$$[υυ] = ἐλάχιστον,$$

ὁπότε ἔχομεν τὴν πλέον πιθανὴν *συναρτησιακὴν καμπύλην*. Ἰδιαιτέρα προσοχὴ πρέπει νὰ καταβληθῇ, ὥστε νὰ διαγραφοῦν τὰ σημεῖα ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα φέρουν μεθ' ἑαυτῶν «χονδροειδῆ» σφάλματα, ὅπως ἐπίσης νὰ συγκεντρωθοῦν περισσότεραι παρατηρήσεις ἐκεῖ ὅπου παρουσιάζονται σημεῖα καμπῆς, διὰ νὰ εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ μελετήσωμεν ἀκριβέστερον τὴν πορείαν τοῦ ἐξελισσομένου φαινομένου. Ἀλλ' εἰς τὸ τελευταῖον αὐτὸ σημεῖον πρέπει νὰ ἐπιμείνωμεν κάπως περισσότερον.

Ἐξομάλυνσις τῆς καμπύλης.

Ἐφ' ὅσον προϋπόθεσις τῆς κατὰ τὸ δυνατὸν ἀκριβοῦς ἀναπαραστάσεως ἑνὸς φαινομένου, βάσει τῶν διδομένων τιμῶν, εἶναι ἡ ἐμπειρικῶς σχηματισθεῖσα συνάρτησι· νὰ προσεγγίζῃ μέχρις ἑνὸς βαθμοῦ τὴν πραγματικήν, πρέπει νὰ καταβληθῇ ἰδιαιτέρα προσοχὴ διὰ τὰ διαστήματα ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ παρατηρήσεις δὲν εἶναι πυκναί. Ἡ πυκνότης τῶν τιμῶν εἶναι ἀπαραίτητος προϋπόθεσις διὰ νὰ πλησιάζῃ ἡ ἐμπειρικὴ καμπύλη, τὴν πραγματικήν.

Τοῦτο φυσικὰ ἰσχύει περισσότερον εἰς τὰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας τὰ φαινόμενα εἶναι περιοδικά, ὅπως π.χ. συμβαίνει, κατὰ κανόνα, μὲ τὰ μετεωρολογικά, μὲ πολλὰ ἠλεκτρικά, μαγνητικά, ἀστρονομικά, βιολογικὰ φαινόμενα ἢ καὶ ἄλλα, σχέσιν ἔχοντα μὲ τὴν γεωργίαν καὶ τὴν ἀπόδοσιν τῶν φυτῶν ἢ μὲ τὸν ὀργανισμὸν τοῦ ἀνθρώπου ἢ ἀκόμη καὶ δημογραφικὰ φαινόμενα. Εἰς τὴν πραγματικότητα, αἱ δυναταὶ καὶ πιθαναὶ κυμάνσεις τοῦ εὔρους τῆς περιόδου καὶ τοῦ μήκους αὐτῆς πρέπει νὰ μελετηθοῦν ἐκ προτέρου. Ὁ ἐρευνητὴς δηλαδὴ πρέπει νὰ γνωρίζῃ ἐκ προτέρου, ἀναλόγως τῆς φύσεως τοῦ προβλήματος, π. χ. ποία περίοδος δύναται νὰ ἐμφανισθῇ ἢ ποῖαι ἄλλαι ἰδιότητες εἶναι φυσικὸν νὰ ἐκδηλωθοῦν, ὥστε νὰ μὴ παρασύρεται ἀπὸ τὴν τοιαύτην ἢ τοιαύτην μορφὴν τῆς γραφικῆς παραστάσεως εἰς τὴν διατύπωσιν χαρακτηριστικῶν, τὰ ὁποῖα, ἐκ λόγων οὐσιαστικῶν, εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀνταποκρίνωνται εἰς τὴν πραγματικότητα.

Εἶναι καλὸν νὰ γίνῃ ἐγκαίρως μία διάκρισις μεταξὺ τῶν σφαλμάτων, τὰ ὁποῖα ὀφείλονται εἰς τυχαῖα καὶ συστηματικῶς ἐπιδρῶντα αἴτια. Ἡ ἀπαλλαγὴ τῶν παρατηρήσεων ἀπὸ τὰ τυχαῖα σφάλματα, ἐξομαλύνει, ἔν τινι μέτρῳ, τὴν μελετωμένην καμπύλην, ἀπὸ ἐμφανιζομένας μικροκυμάνσεις αὐτῆς. Ἐπιτυγχάνεται δὲ αὕτη, ὡς εἶναι ἤδη γνωστόν, διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως σειρᾶς τιμῶν ὑπὸ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου αὐτῶν, τὸ ὁποῖον καὶ ἐξαλείφει αὐτά, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν λαμβανομένων παρατηρήσεων αὐξάνῃ. Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ ὅμως πρέπει νὰ καταβληθῇ ἰδιαιτέρα προσοχὴ ὥστε τὸ ἀριθμητικὸν μέσον νὰ μὴ συνάγεται ἐκ τιμῶν μακροῦ διαστήματος, διότι ὑπάρχει φόβος νὰ καλυφθῇ καὶ νὰ μείνῃ ἄγνωστος τυχοῦσα ὑφισταμένη κύμανσις τῆς πορείας τοῦ φαινομένου. Δι᾿ αὐτὸ πρέπει νὰ ἀποφεύγεται, κατὰ τὴν ἐξαγωγὴν τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου, ἡ χρησιμοποίησις πολλῶν τιμῶν ἐκεῖ ὅπου ἡ γραμμὴ παρουσιάζει *καμπυλότητα ἢ ἅλμα*. Εἰς τὰ τμήματα δηλαδὴ αὐτά, τὸ ἀριθμητικὸν μέσον δὲν πρέπει νὰ ἀντιστοιχῇ εἰς μέγα διάστημα —συνήθως χρόνου— οὔτε φυσικὰ νὰ γίνεται ἐκεῖ ἰσοστάθμισις τῶν παρατηρήσεων, χωρὶς ἰδιαιτέραν μελέτην τοῦ ὅλου ζητήματος.

Ἡ καμπύλη, ἑπομένως, *ἀφομοιοῦται ἢ ὑφίσταται ἐξομάλυνσιν*, ὅταν λαμβάνωμεν ὀλιγωτέρας τιμὰς καὶ ἀκολουθῶμεν ὡρισμένους κανόνας κατὰ τὴν εὕρεσιν τῶν μέσων τιμῶν, δι᾿ ὧν αὕτη διέρχεται. Καὶ τοιοῦτοι ἐμπειρικοὶ κανόνες ὑπάρχουν πολλοί. Ἰδοὺ μερικοί: Ὅταν ἔχωμεν δύο τιμάς, λαμβάνομεν τὸ ἀριθμητικὸν μέσον. Ὅταν ἔχωμεν τρεῖς, ἡ μεσαία τιμὴ θὰ ἔχῃ μεγαλύτερον βάρος ἀπὸ τὰς ἄλλας· ἐν ἀναλογίᾳ θὰ εἶναι : 1, 2, 1. Ἤτοι· ἐὰν ἔχωμεν τὰς τιμὰς t_1, t_2, t_3, τότε ἡ μέση ἐξωμαλυμένη τιμὴ θὰ εἶναι :

$$E_2 = \frac{1}{4}(t_1 + 2t_2 + t_3)$$

Διὰ τιμὰς περισσοτέρας, ἔχομεν διαφόρους τύπους, μὲ διαφορετικὸν βάρος. Π. χ. ἐὰν ἔχωμεν κανονικὴν μείωσιν τῶν τιμῶν ἀπὸ τὸ μέσον πρὸς τὰ ἄκρα, χρησιμοποιοῦμεν διὰ 4 τιμάς, τὸν τύπον :

$$E_{2,5} = \frac{1}{6}(t_1 + 2t_2 + 2t_3 + t_4)$$

καὶ διὰ 5, τόν :

$$E_3 = \frac{1}{9}(t_1+2t_2+3t_3+2t_4+t_5).$$

Ἐὰν αἱ τιμαὶ δὲν παρουσιάζουν κανονικὴν μείωσιν, τότε ὡς βάση χρησιμοποιοῦμεν τοὺς συντελεστὰς τοῦ διωνύμου :

$$E_{2,5} = \frac{1}{8}(t_1+3t_2+3t_3+t_4) \text{ καὶ } E_3 = \frac{1}{16}(t_1+4t_2+6t_3+4t_4+t_5).$$

Ἡ ἐργασία αὐτὴ πρέπει νὰ γίνεται οὕτως, ὥστε νὰ ἐξαφανίζωνται αἱ μικροκυμάνσεις καὶ νὰ μένουν αἱ μεγάλαι πρὸς ἔρευναν. Συνιστᾶται ὅπως ἡ ἀφομοίωσις τῶν παρατηρήσεων νὰ μὴ ἐπεκτείνεται εἰς διάστημα μεγαλύτερον τοῦ $^1/_4$ τῆς περιόδου. Ἐκλέγομεν δηλαδὴ τὴν ἐλαχίστην —ὅταν μία καμπύλη παρουσιάζῃ πολλὰς περιόδους— περίοδον Π καὶ κάμνομεν τὴν ἐξομάλυνσιν ἢ ἀφομοίωσιν τῆς καμπύλης εἰς τὸ διάστημα $\Delta x \leqslant \frac{\Pi}{4}$ καὶ τοῦτο διότι εἰς αὐτό, δὲν ἐμφανίζεται πάντοτε τὸ εὖρος τῆς κυμάνσεως καί, ἑπομένως, δὲν ὑπάρχει φόβος ἐξαφανίσεως χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων αὐτῆς. Ἐὰν ὅμως $\Delta x = \frac{\Pi}{2}$, καὶ μάλιστα, ἐὰν τοῦτο, εὑρίσκεται μεταξὺ μεγίστου καὶ ἐλαχίστου, τότε εἰς αὐτὸ περιλαμβάνεται τὸ εὖρος καὶ ἡ περίοδος.

Κατὰ τὴν ἐργασίαν αὐτὴν πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει, ὅτι ἡ ἐξομάλυνσις τότε καὶ μόνον δύναται νὰ γίνῃ, ὅταν ὑπάρχουν *σοβαροὶ λόγοι*, ὅτι ἡ μεταβολὴ τῶν τεταγμένων τῶν σημείων μιᾶς ἐμπειρικῆς καμπύλης εἶναι συνεχής, ὅσον καὶ ἐὰν αὐξηθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν παρατηρήσεων. Εἰς κάθε ἄλλην περίπτωσιν, ἡ τοιαύτη ἐργασία ἀπαγορεύεται, καθ' ὅσον ὑπάρχει φόβος νὰ ἐξαφανισθοῦν οὐσιώδεις ἰδιότητες τῆς μελετωμένης καμπύλης. Ἡ τοιαύτη ἐξομάλυνσις τῆς καμπύλης γίνεται, ὑπὸ πεπειραμένου πάντοτε ἐρευνητοῦ, διὰ τῆς χειρός, ἀλλὰ καὶ ἡ πεῖρα πρέπει νὰ σχηματίζεται καὶ βάσει θεωρητικῆς μελέτης τοῦ προβλήματος τούτου.

Γραμμικὴ συσχέτισις καὶ μέσαι εὐθεῖαι.

Συχνὰ εἰς πολλὰ ζητήματα τῆς Φυσικῆς, τῆς Ἀστρονομίας, τῆς Μετεωρολογίας καὶ ἄλλων ἐπιστημῶν ζητεῖται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς συνάρτησις μιᾶς ἢ περισσοτέρων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν ἕνα φαινόμενον, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ παρατηρηθῇ ἐν τῇ ἐξελίξει του. Συμβαίνει δὲ πολλάκις ἡ συνάρτησις νὰ εἶναι γνωστὴ κατὰ προσέγγισιν, ὁπότε μὲ τὰ σφάλματα τῶν παρατηρήσεων ἀναμιγνύονται καὶ τὰ σφάλματα τῆς θεωρίας, τὰ ὁποῖα προέρχονται ἐκ τοῦ ὅτι δὲν γνωρίζομεν ἐπακριβῶς τὴν συνάρτησιν. Τὰ σφάλματα ταῦτα δύνανται νὰ μειωθοῦν εἰς τὸ ἐλάχιστον, ἐὰν χρησιμοποιηθῇ ἡ μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων ἐπὶ διαφόρων συναρτήσεων, αἱ ὁποῖαι κατὰ προσέγγισιν ἀπεικονίζουν τὸ ἐρευνώμενον φαινόμενον. Παρουσιάζονται δηλαδὴ προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα π.χ. ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ καταλληλοτέρα εὐθεῖα ἢ καμπύλη, ὁπότε δέον νὰ ἐφαρμοσθῇ ἡ μέθοδος τοῦ Gauss.

Ὅταν εἰς τὴν ἀπεικόνισιν τῶν δεδομένων τῶν παρατηρήσεων παρουσιάζωνται εὐθύγραμμοι γενικαὶ τάσεις τοῦτο σημαίνει, ὅτι ὁ νόμος τῆς μεταβολῆς τῶν μέσων τιμῶν τῆς μιᾶς μεταβλητῆς ὡς πρὸς τὰς τιμὰς τῆς ἄλλης εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκφρασθῇ διὰ μιᾶς γραμμικῆς σχέσεως. Τότε λέγομεν ὅτι ἔχομεν *γραμμικὴν συσχέτισιν* (Correlation). Τοιαύτας περιπτώσεις ἐξητάσαμεν ἤδη, ὅταν ἀνεπτύσσαμεν τὴν σχέσιν (83), τὸ 2ον παράδειγμα τοῦ κεφαλαίου ΣΤ' καὶ τὴν συσχέτισιν μήκους φυσαλίδος ἀεροστάθμης καὶ θερμοκρασίας, τὴν ἐκφραζομένην διὰ τῆς (11'), ἤτοι: $y=\alpha+\beta x$. Αἱ εὑρεθεῖσαι εὐθεῖαι ὀνομάζονται *μέσαι εὐθεῖαι* (lignes de regression, lines of regression, Regressionslinien) ἢ καὶ *γραμμαὶ ἐκτιμήσεως* (lignes d' estimation, lines of estimation). Αἱ γραμμαὶ ἐκτιμήσεως καλοῦνται καὶ *γραμμαὶ παλινδρομήσεως* (*).

Ἂς ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν τῆς γραμμικῆς συσχετίσεως, ὅπως τὴν ἀναφέρει ὁ P. van der Waerden μετὰ τοῦ σχετικοῦ ἀναλυτικοῦ παραδείγματος.

Ἔστω x ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ καὶ y τυχαῖον μέγεθος ἐξαρτώμενον ἐκ τοῦ x καὶ ἐκ τῆς τύχης. Ἔχομεν τὰς παρατηρηθείσας τιμὰς $x_1, x_2, \ldots x_n$ καὶ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς $y_1, y_2, \ldots y_n$, συνδεομένας διὰ τῆς:

$$y=\vartheta_0+\vartheta_1 x+u \qquad (84)$$

ὅπου ἡ μέση εὐθεῖα $y=\vartheta_0+\vartheta_1 x$ εἶναι κατὰ τὸ δυνατὸν ἐγγὺς τῆς πραγματικῆς πορείας τῶν τιμῶν y, ὥστε αἱ «τυχαῖαι ἀποκλίσεις» ὡς μικραὶ νὰ παραλείπωνται.

(*) Τὴν ὀνομασίαν γραμμαὶ παλινδρομήσεως ἔδωσεν ὁ Galton τὸν παρελθόντα αἰῶνα (1877—1889) ὅταν ἐμελέτα τὰ ἀναστήματα τῶν υἱῶν ἐν σχέσει μὲ τὰ τῶν πατέρων, ὅτε παρατηρεῖται μία τάσις παλινδρομήσεως πρὸς τὸ ἀνάστημα τῆς φυλῆς. Ἡ ὀνομασία αὕτη τείνει νὰ καταργηθῇ.

Δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ συνδέουσα τὰ x καὶ y σχέσις εἶναι τῆς μορφῆς :

$$y=\vartheta_0+\vartheta_1 x+\ldots+\vartheta_r x^r+u \qquad (84')$$

δηλαδὴ *συσχέτισις ἀνωτέρας τάξεως*, ἢ ὅτι ἔχομεν μίαν περιοδικὴν κύμανσιν — ὅπως συμβαίνει εἰς πολλὰ περιοδικὰ φυσικὰ φαινόμενα - ἐκφραζομένην διά τῆς *τριγωνομετρικῆς σειρᾶς* :

$$y=\vartheta_0+\vartheta_1 \text{συνω}x+\vartheta_2 \text{ημω}x+u. \qquad (84'')$$

Εἰς ὅλας αὐτὰς τὰς σχέσεις, ὅταν τὸ ὑπόλοιπον u δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ παραλειφθῇ λόγῳ τῆς μικρᾶς του τιμῆς, δύναται ἀκριβῶς νὰ ἐξακριβωθῇ διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, ἤτοι :

$$\Sigma u_i^2=\text{ἐλάχιστον},$$

ὁπότε προσδιορίζονται αἱ σταθεραὶ ϑ_0, ϑ_1,...

Ἂς λάβωμεν τὴν γραμμικὴν συσχέτισιν (84').

Πρέπει νὰ ἔχωμεν :

$$\Sigma u_i^2=\Sigma(y_i-\vartheta_0-\vartheta_i x_i)^2=\text{ἐλάχιστον}.$$

Διαφορίζοντες λαμβάνομεν τὰς (ν+1) ἐξισώσεις τῶν συνθηκῶν :

$$\begin{array}{l}
\vartheta_0 n+\vartheta_1[x]+\ldots+\vartheta_r[x^r]=[y] \\
\vartheta_0[n]+\vartheta_1[x^2]+\ldots+\vartheta_r[x^{r+1}]=[xy] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\vartheta_0[x^r]+\vartheta_1[x^{r+1}]+\ldots+\vartheta_r[x^{2r}]=[x^r y].
\end{array} \qquad (85)$$

Ἐπειδὴ ἡ λύσις τοῦ συστήματος (85) εἶναι κοπιώδης, καθιστῶμεν τοῦτο ὀρθογώνιον*. Αἱ ἀρχικαὶ συναρτήσεις εἰς τὴν (84) εἶναι αἱ 1 καὶ x. Αἱ ὀρθογώνιοι αὐτῶν συναρτήσεις εἶναι :

$$\psi_0=1 \text{ καὶ } \psi_1=x-\bar{x},$$

ὅπου $\bar{x}$ εἶναι ἡ μέση τιμὴ τῶν x_i.

Ἡ (84) ἀντικαθίσταται ὑπὸ τῆς :

$$y-\mu_0\psi_0-\mu_1\psi_1$$

*) Δύο συναρτήσεις φ(x) καὶ ψ(x), ἀμφότεραι ὡρισμέναι διὰ τὰς τιμὰς x_1, x_2,...,x_n, καλοῦνται ὀρθογώνιοι, ὅταν ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$\Sigma\varphi(x_i)\psi(x_i)=0.$$

διὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἰσχύῃ :

$$\Sigma(y-\mu_0\psi_0-\mu_1\psi_1)^2 = \text{ἐλάχιστον}.$$

Ἤτοι :

$$\left.\begin{array}{l} \mu_0 n = \Sigma y \\ \mu_1 \Sigma(x-\bar{x})^2 = \Sigma y(x-\bar{x}) \end{array}\right\} \qquad (86)$$

Ἐξ αὐτῶν προσδιορίζονται τὰ μ_0 καὶ μ_1, τὰ ὁποῖα δυνάμεθα χάριν ἁπλότητος, νὰ γράψωμεν ὡς m_0 καὶ m_1. Καὶ ἔχομεν :

$$m_0 = \frac{1}{n}\Sigma y = \bar{y} \qquad (87)$$

$$m_1 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})y}{\Sigma(x-\bar{x})^2} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2} \qquad (88)$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας :

$$y-\bar{y} = m_1(x-\bar{x}) \qquad (89)$$

καλεῖται *ἐμπειρικὴ γραμμὴ ἐκτιμήσεως.*

Ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς εὐθείας ταύτης καλεῖται *ἐμπειρικὸς συντελεστὴς παλινδρομήσεως* καὶ ἡ τιμή του ἐξαρτᾶται φυσικὰ ἐκ τῆς τύχης. Ἐὰν αἱ τιμαὶ x εἶναι ἀνεξάρτητοι τῆς τύχης, ὅπως συμβαίνει εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν αἱ τιμαὶ τῶν x παριστοῦν χρόνον, τότε ἀντιστρόφως αἱ τιμαὶ τοῦ y εἶναι τυχαῖα μεγέθη, ὁπότε δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν μέσην τιμὴν καὶ τὸ μέσον σφάλμα m_1. Ὅταν τὸ x παριστᾷ τὸν χρόνον ἡ συσχέτισις ὀνομάζεται καὶ *τάσις* (Trend).

Παράδειγμα : Δίδεται ἡ παραγωγὴ τοῦ ἀκατεργάστου σιδήρου εἰς τὸν κόσμον ἀπὸ τοῦ 1865—1910 εἰς τοὺς ἀκολουθοῦντας πίνακας καὶ ζητεῖται ἡ μελέτη τοῦ φαινομένου, ἤτοι ὁ χωρισμὸς τῶν μεταβολῶν—τάσεως καὶ πιθανῆς διακυμάνσεως.

Ἐὰν ἀπεικονίσωμεν τὴν καμπύλην βάσει τῶν διδομένων ἀριθμῶν καὶ τὴν ἐξομαλύνωμεν ἐντελῶς χονδρικῶς, παρατηροῦμεν μίαν ἰσχυρὰν ἄνοδον καὶ δὴ περισσότερον ἀπὸ γραμμικήν. Ἡ καμπύλη δὲν δύναται νὰ παρασταθῇ καλῶς διὰ μιᾶς εὐθείας ἢ μιᾶς παραβολῆς. Μᾶλλον ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν ἐκθετικὴν καμπύλην. Ἐπίσης αἱ κυμάνσεις μετὰ τοῦ χρόνου γίνονται ἰσχυρότεραι. Καλλίτερον εἶναι νὰ λάβωμεν, ἀντὶ τῶν ἀπολύτων ἀριθμῶν, τοὺς λογαρίθμους των καὶ τότε νὰ προσαρμόσωμεν εἰς τὴν καμπύλην μίαν εὐθεῖαν.

t	x	y	$t-a$	$y-b$	$(t-a)^2$	$(t-a)(y-b)$
1865	9,10	959	−25	−441	625	+11025
1866	9,66	985	−24	−415	576	+ 9960
1867	10,06	1003	−23	−397	529	+ 9131
1868	10,71	1030	−22	−370	484	+ 8140
1869	11,95	1077	−21	−323	441	+ 6783
1870	12,26	1088	−20	−312	400	+ 6240
1871	12,85	1109	−19	−291	361	+ 5529
1872	14,84	1172	−18	−228	324	+ 4104
1873	15,12	1180	−17	−220	289	+ 3740
1874	13,92	1144	−16	−256	256	+ 4096
1875	14,12	1150	−15	−250	225	+ 3750
1876	13,96	1145	−14	−255	196	+ 3570
1877	14,19	1152	−13	−248	169	+ 3224
1878	14,54	1162	−12	−238	144	+ 2856
1879	14,41	1159	−11	−241	121	+ 2651
1880	18,58	1269	−10	−131	100	+ 1310
1881	19,82	1297	− 9	−103	81	+ 927
1882	21,56	1334	− 8	− 66	64	+ 528
1883	21,76	1338	− 7	− 62	49	+ 434
1884	20,46	1311	− 6	− 89	36	+ 534
1885	19,84	1298	− 5	−102	25	+ 510
1886	20,81	1318	− 4	− 82	16	+ 328
1887	22,82	1358	− 3	− 42	9	+ 126
1888	24,03	1381	− 2	− 19	4	+ 38
1889	25,88	1413	− 1	+ 13	1	− 13
1890	27,87	1445	0	45	0	0
1891	26,17	1418	1	18	1	18
1892	26,92	1430	2	30	4	60
1893	25,26	1402	3	2	9	6
1894	26,03	1416	4	16	16	64
1895	29,37	1468	5	68	25	340
1896	31,29	1495	6	95	36	570
1897	33,46	1525	7	125	49	875
1898	36,46	1562	8	162	64	1296
1899	40,87	1611	9	211	81	1899
1900	41,35	1616	10	216	100	2160
1901	41,14	1614	11	214	121	2354
1902	44,73	1651	12	251	144	3012
1903	46,82	1670	13	270	169	3510
1904	46,22	1665	14	265	196	3710
1905	54,79	1739	15	339	225	5085
1906	59,66	1776	16	376	256	6016
1907	61,30	1787	17	387	289	6579
1908	48,80	1688	18	288	324	5184
1909	60,60	1782	19	382	361	7258
1910	66,20	1821	20	421	400	8420
		63413	−115	−987	8395	147937

Εἰς τὸν ἀνωτέρω πίνακα: t=ἔτη, x=παραγωγὴ εἰς ἑκατομμύρια τόννους, y ὁ λογάριθμος αὐτῆς πολλαπλασιασμένος ἐπὶ 1000. Ἀπὸ τὰς τιμὰς τοῦ t ἀφαιρεῖται τὸ a=1890 καὶ τὰς τιμὰς τοῦ y τὸ b=1400 διὰ νὰ ἔχωμεν μικροτέρους ἀριθμούς.

Εὑρίσκομεν :

$$\bar{t}=1890-\frac{115}{46}=1890-2,5=1887,5$$

$$m_0=\bar{y}=1400-\frac{987}{46}=1400-21=1379.$$

Ἡ μέση εὐθεῖα διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τούτου. Ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως εἶναι :

$$m_1=\frac{\Sigma(t-\bar{t})(y-\bar{y})}{\Sigma(t-\bar{t})^2}=\frac{147937-2,5.987}{8395-46.2,5^2}=\frac{145470}{8107,5}=17,94.$$

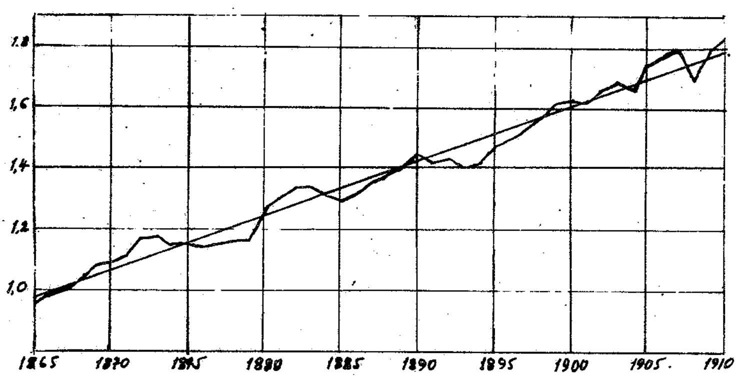
Ἡ ἐξίσωσις τῆς μέσης εὐθείας :

$$y=m_0+m_1(t-\bar{t})=\bar{y}+m_1(t-\bar{t})$$

ἐνταῦθα γίνεται :

$$y=1379+17,94(t-1887,5).$$

Αὕτη συμφωνεῖ εἰς μεγάλον βαθμὸν μὲ τὴν πορείαν τοῦ πραγματικοῦ φαινομένου (σχ. 28). Δυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν μεγαλυτέραν



Σχ. 28

προσέγγισιν, ἐὰν προσθέσωμεν ἕνα τετραγωνικὸν ὅρον $m_2\psi_2$, ὅτε κάμνομεν τὴν ἀντικατάστασιν :

$$\psi_2=(t-\bar{t})^2-\gamma$$

Ἡ σταθερὰ γ προσδιορίζεται οὕτως ὥστε ἡ ψ_2 νὰ γίνεται ὀρθογώνιος τῆς $\psi_0=1$:

$$\sum_i \psi_0(t)\psi_2(t)=0.$$

Τότε ἔχομεν τὴν συνθήκην :

$$\sum_i (t-\overline{t})^2-46\gamma=0,$$

ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν τὸ γ, γνωστοῦ ὄντως ὅτι :

$$\Sigma(t-\overline{t})^2=8107.5.$$

Ἡ ἔννοια τῆς παρεμβολῆς.

Παρεμφερὴς πρὸς τὴν ἐξομάλυνσιν εἶναι καὶ ἡ ἔννοια τῆς *παρεμβολῆς* (*Interpolation*), τὴν ὁποίαν σιωπηρῶς ἐχρησιμοποιήσαμεν ἀνωτέρω, ὅταν ἐδέχθημεν ὅτι τὰ σημεῖα τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς τιμὰς τῆς ἐξελίξεως ἑνὸς φαινομένου, δύνανται νὰ θεωρηθοῦν, ὑπὸ ὡρισμένους περιορισμούς, ὡς κείμενα ἐπὶ μιᾶς καμπύλης. Παρουσιάζονται, δηλαδή, συχνὰ περιπτώσεις, καθ' ἃς δίδονται ἐκ τῶν παρατηρήσεων αἱ τιμαὶ τῆς ἐξελίξεως ἑνὸς οἱουδήποτε φαινομένου καὶ ζητεῖται νὰ παρεμβληθοῦν μεταξὺ τούτων καὶ ἄλλαι, αἱ ὁποῖαι ὅμως δὲν παρέχονται ὑπὸ τῆς παρατηρήσεως. Ζητεῖται, εἰδικώτερον, ἡ ἀναλυτικὴ ἔκφρασις τῶν ἐξαγομένων σειρᾶς μετρήσεων, ἡ ὁποία νὰ εἶναι τοιαύτη ὥστε νὰ παριστᾷ, κατὰ προσέγγισιν, ὄχι μόνον τὰς δοθείσας τιμάς, ἀλλὰ καὶ ἄλλας, αἱ ὁποῖαι εἶναι δυνατὸν νὰ ζητηθοῦν ἐξ ὑστέρου νὰ εὑρεθοῦν.

Ἀλλ' ἡ τοιαύτη ἀπαίτησις, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ πληροῖ ἡ ἀναλυτικὴ ἔκφρασις, δηλαδὴ ἡ εὕρεσις καὶ χάραξις τῆς καμπύλης, δὲν παύει νὰ εἶναι κατ' οὐσίαν αὐθαίρετος. Διότι, κατὰ τὴν παρεμβολὴν τιμῶν ἐντὸς ἑνὸς κενοῦ διαστήματος, δεχόμεθα, προσωρινῶς, ὅτι τὸ μεταξὺ δύο τιμῶν παρεμβαλλόμενον διάστημα, δύναται νὰ παρασταθῇ, κατὰ προσέγγισιν, μὲ δοθεῖσαν καμπύλην. Δυνάμεθα βεβαίως πολλάκις —ὅταν ἡ μεταβολὴ τῶν τιμῶν δὲν εἶναι ταχεῖα, ὅπως συμβαίνει π.χ. εἰς τὰς ἀστρονομικὰς ποσότητας, αἵτινες ἐκφράζονται ὡς συναρτήσεις τοῦ χρόνου— νὰ συνδέσωμεν τὰ σημεῖα (τιμὰς) δι' εὐθειῶν καὶ νὰ ἔχωμεν μίαν ἁπλῆν γραφικὴν παράστασιν. Ἀλλὰ καὶ αὐτὴ ἡ πρᾶξις εἶναι αὐθαίρετος, διότι δὲν δυνάμεθα νὰ βεβαιώσωμεν, ἂν ἡ ἐξέλιξις ἑνὸς φαινομένου δύναται νὰ παρασταθῇ ἀκριβῶς διὰ τῆς τεθλασμένης. Ὀρθότερον εἶναι νὰ μένουν τὰ σημεῖα ἀσύνδετα, διότι δὲν γνωρίζομεν κατὰ κανόνα τὴν ἀκριβῆ μορφὴν τῆς καμπύλης ἐπὶ τῆς ὁποίας ταῦτα κεῖνται.

Συμβαίνει πολλάκις ἡ παρεμβαλλομένη καμπύλη νὰ συμφωνῇ εἰς τὰς δοθείσας τιμὰς ἀρκετὰ μὲ τὴν σειρὰν τῶν παρατηρήσεων, καὶ ὅμως αἱ ἐν τῷ μεταξὺ τιμαὶ νὰ διαφέρουν αἰσθητῶς ἀπὸ τὴν ὑποτιθεμένην πραγματικὴν καμπύλην. Δυνάμεθα π.χ. διὰ τῆς παρεμβολῆς k ἀριθμῶν, νὰ ἔχωμεν ἀκριβῆ ἔκφρασιν τῆς γραφικῆς παραστάσεως, δι' ἐκθετικῆς σειρᾶς καὶ διὰ τριγωνομετρικῆς, καὶ ὅμως εἰς τὰς ἐν τῷ μεταξὺ τιμὰς νὰ ἔχωμεν αἰσθητὴν ἀπόκλισιν εἰς τὰ ἐξαγόμενα τῶν δύο τούτων ἀναλυτικῶν ἐκφράσεων.

Ἀλλὰ τὸ ζήτημα τῆς ἐπεξεργασίας καὶ σπουδῆς μιᾶς σειρᾶς τιμῶν ἐκ παρατηρήσεων ἢ μετρήσεων ἐνδείκνυται, εἰς πολλὰς περιπτώσεις, νὰ ἐξετάζεται καὶ ἀπὸ μιᾶς ἄλλης πλευρᾶς, ἥτις σχετίζεται μὲ τὸ θέμα τὸ ὁποῖον μᾶς ἀπασχολεῖ ἐνταῦθα. Δέον, δηλαδή, μία σειρὰ μετρήσεων νὰ ἐρευνᾶται καὶ ἀπὸ τῆς ἀπόψεως τῶν διαφορῶν αἱ ὁποῖαι ἐκ ταύτης σχηματίζονται καὶ αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν μίαν νέαν σειρὰν ἢ γενικώτερον μίαν ἀκολουθίαν τιμῶν. Καὶ διακρίνομεν ἐνταῦθα ***ἀκολουθίας πρώτων, δευτέρων, τρίτων κ.λ.π. διαφορῶν***, ὅπως ἐξ ἄλλου ἔχομεν καὶ ***διαφορὰς συναρτήσεων***, ὅταν ὑπάρχῃ σχέσις μεταξὺ δύο σειρῶν τιμῶν ἐκ παρατηρήσεων ἢ μετρήσεων.

Ἡ θεώρησις τῶν διαφορῶν, διαφόρου τάξεως, μάλιστα δὲ τῶν ἀνωτέρας τάξεως, μᾶς δίδει τὴν δυνατότητα νὰ διαπιστώσωμεν τὴν ὕπαρξιν σφαλμάτων εἰς τὴν ἀρχικὴν ἀκολουθίαν καὶ νὰ διατυπώσωμεν κανόνας οἵτινες μᾶς βοηθοῦν εἰς τὴν εὕρεσιν διαφόρων τύπων παρεμβολῆς. Ἐὰν π.χ. μᾶς δίδεται ἡ συνάρτησις: $y=f(x)$ καὶ αἱ τιμαὶ x_1, $x_2, \ldots x_n$ αἵτινες σχηματίζουν μεταξύ των ἴσας διαφοράς, καὶ λάβωμεν καὶ τὰς ἀντιστοίχους διαφορὰς τῆς $f(x)$, ἤτοι: $y_1, y_2, \ldots y_n$, λαμβάνομεν:

$$y=y_0+\frac{x-x_0}{1}\cdot\frac{\Delta y_0}{\Delta x}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{1\,.\,2}\cdot\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2}+\ldots+$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}\cdot\frac{\Delta^n y_0}{\Delta x^n} \qquad (83)$$

Οὗτος, ὡς γνωστόν, εἶναι ὁ ***τύπος παρεμβολῆς τοῦ Νεύτωνος.***

Ἐὰν εἰς τὸν (83), $n=1$, ἡ συνάρτησις εἶναι γραμμικὴ καὶ ὁρίζεται διὰ δύο τιμῶν —εἰς τὴν περίπτωσιν τὴν γενικωτέραν δυνάμεθα νὰ ἰσοσταθμίσωμεν περισσοτέρας τιμὰς— ἤτοι :

$$y=y_0+(x-x_0)\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \qquad (84)$$

Δεχόμεθα δηλαδὴ ἐνταῦθα ὅτι εἰς τὰ πολὺ μικρὰ διαστήματα, ἡ συνάρτησις συμπεριφέρεται γραμμικῶς, ὁπότε ὑποθέτομεν ὅτι αἱ πρῶται διαφοραὶ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Γεωμετρικῶς δὲ ἐκφραζόμενοι ***λέγομεν ὅτι διὰ τῆς γραμμικῆς παρεμβολῆς ἀντικαθιστῶμεν τὴν καμπύλην διὰ τῆς χορδῆς.***

Εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν αἱ δεύτεραι διαφοραὶ καὶ οὐχὶ αἱ πρῶται εἶναι ἴσαι μεταξύ των, —εἶναι δηλαδὴ σταθεραὶ— ὁ ὡς ἄνω τύπος παρεμβολῆς (83) λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$y=y_0+(x-x_0)\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2}\cdot\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \qquad (84)$$

δηλαδὴ τότε ἡ συνάρτησις ἀντικαθίσταται διὰ μιᾶς ***τετραγωνικῆς συναρτήσεως.*** Τοῦτο σημαίνει, γεωμετρικῶς, ὅτι ***ἡ καμπύλη διὰ τῆς ὁποίας παρίσταται ἡ συνάρτησις, ἐντὸς τῆς ἀντιστοίχου περιοχῆς, δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ διὰ μιᾶς παραβολῆς.***

Ὁ ὡς ἄνω τύπος (84), τῆς παραβολικῆς παρεμβολῆς, δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\eta=\xi\frac{\Delta y}{10}-\frac{\xi(10-\xi)}{2}\cdot\frac{\Delta^2 y}{100} \qquad (84')$$

ὅπου ξ καὶ η εἶναι ἀντιστοίχως αἱ αὐξήσεις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς καὶ τῆς συναρτήσεως, τὸ δὲ διάστημα ξ τὸ ἐκφράζομεν εἰς δέκατα τοῦ σταθεροῦ διαστήματος Δx, ἤτοι :

$$\xi\ \frac{\Delta x}{10},\ \text{ὁπότε ἔχομεν καὶ}\ \eta=\xi\frac{\Delta y}{10}.$$

Ὁ τύπος οὗτος (84'), χρησιμοποιεῖται συνήθως ἐν τῇ πράξει, διότι παρέχει πολλὰς εὐκολίας.

Περαίνοντες ἐνταῦθα τὴν σύντομον ταύτην διαπραγμάτευσιν τῆς θεωρίας τῶν σφαλμάτων καὶ τὴν ἰσοστάθμισιν αὐτῶν διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, θὰ ἔπρεπε, διὰ μίαν ἀκόμη φοράν, νὰ ὑπογραμμίσωμεν τὴν ἀκόλουθον ἀλήθειαν : Ὁ ἐρευνητὴς τοιούτων θεμάτων πρέπει νὰ ἔχῃ πάντοτε βαθεῖαν γνῶσιν τοῦ θέματος τὸ ὁποῖον ἐξετάζει καὶ ὅλα τὰ συναφῆ πρὸς αὐτὸ ζητήματα καὶ ἐπὶ πλέον νὰ χρησιμοποιῇ μετὰ τῆς δεούσης προσοχῆς τὰς μαθηματικὰς ἐννοίας καὶ μεθόδους, ἐν γνώσει τῶν δυνατοτήτων τὰς ὁποίας ἠμποροῦν αὗται νὰ τοῦ παράσχουν. Καὶ ἐπὶ πλέον, νὰ ἔχῃ πάντοτε ὑπ' ὄψει του, ὅτι ἡ μέθοδος αὕτη δύναται νὰ τοῦ δώσῃ πλεῖστα ὅσα ἀσφαλῆ ἐξαγόμενα, ἀλλὰ συγχρόνως νὰ γνωρίζῃ ὅτι εἶναι ἐξ ἴσου ἀληθὲς ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον γράφει ὁ Ἄγγλος ἀστρονόμος W. K. Green: Ὅτι δηλαδὴ «δὲν πρέπει νὰ ὑποτεθῇ ὅτι ἡ μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων εἶναι κάποια μαγικὴ λειτουργία ἡ ὁποία δύναται ἀδιακρίτως νὰ χρησιμοποιῆται εἰς ὅλους τοὺς τύπους τῶν παρατηρήσεων ἢ τῶν στατιστικῶν δεδομένων». Διότι ὑπάρχει ὁ κίνδυνος τὰ ἐξαγόμενά του νὰ μὴν ἔχουν καμμίαν σχέσιν, οὔτε μὲ τὴν ἀλήθειαν, οὔτε μὲ τὴν πραγματικότητα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Τὸ θέμα τοῦτο δὲν ἀναπτύσσεται συνήθως εἰς αὐτοτελῆ ἔργα, ἀλλ' εὑρίσκεται ὡς ἰδιαίτερον κεφάλαιον ἢ τμῆμα ἢ παράρτημα εἰς ἔργα ἀναφερόμενα εἰς ἄλλας ἐπιστήμας, ὅπως εἶναι π.χ. ἡ Ἀστρονομία καὶ ἡ Γεωδαισία. Καταχωροῦμεν κατωτέρω τὰ κυριώτερα ἐκ τῶν δημοσιευμάτων τὰ ὁποῖα εἴχομεν ὑπ' ὄψει κατὰ τὴν σύνταξιν τοῦ παρόντος.

Beers, Y.: Introduction to the Theory of Error, Reading, Mass. 1956.

Becker, Fr.: Grundriss der Sphärischen und Praktischen Astronomie, Berlin und Bonn 1934.

Borel, E.: Deltheil, R. Probabilités, Erreurs, Paris, 1942.

Chauvenet, W.: A Manual of Spherical and Practical Astronomy, Vol. II, London 1868.

Faye, H. - Bourgeois, R.: Cours d' Astronomie et de Géodésie, I[re] part. I[er] fasc. Paris 1926.

Grossmann, W. : Grundzüge der Ausgleichungsrechnung, 2. Auf. Berlin 1961.

Jordan, Ph. - Eggert, O. Handbuch der Vermessungskunde, Bd. I. 8. Auf., Stuttgart 1935.

Lezinas, G.: La compensation des erreurs des levés topographiques par la méthode des moindres carrés, Paris 1926.

Mireur, H.: Technique de la méthode des moindres carrés, Paris 1938.

Μπάδα, Γ.: Στοιχεῖα θεωρίας ἐλαχίστων τετραγώνων (λιθόγρ.) Ἀθῆναι 1945.

Μπρίκα, Μ.: Μαθήματα Στατιστικῆς, τεύχη I—II, Ἀθῆναι 1950, 1953.

Näbauer, M.: Vermessungskunde, 2. Auf., Berlin 1932.

Ξανθάκη, Ι.: Μαθήματα Λογισμοῦ Πιθανοτήτων καὶ Θεωρίας τῶν Σφαλμάτων (Λιθογρ.), Θεσσαλονίκη 1948.

Παππά, Α.: Μαθήματα Θεωρίας Σφαλμάτων, (Λιθόγρ.), Ἀθῆναι 1948.

Πιερρακέα, Ν.: Σημειώσεις μεθόδου ἐλαχίστων τετραγώνων. (Λιθογρ.), Ἀθῆναι 1954.

Prey, A.: Einführung in die Sphärischen Astronomie, Wien 1949.

Ρεμούνδου, Γ.: Μαθήματα Λογισμοῦ τῶν Πιθανοτήτων, (Λιθόγρ.) Ἀθῆναι 1919.

Smart, W.: Combinations of Observations, Cambridge 1958.

Strömgren, E. u. B.: Lehrbuch der Astronomie, Berlin 1933.

Tardi, P.: Traité de Géodésie, 2ème éd. Paris 1951.

Tracy, J.: Surveying—Theory and Practice, New York 1948.

Waerden B. C. van de: Mathematische Statistik, Berlin 1957.

Weitbrecht, W.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, I - II Teile, Sammlung Göschen.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ