ΘΕΟΦΙΛΟΥ Ν. ΚΑΚΟΥΛΛΟΥ
Τακτικοῦ Καθηγητοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν

ΜΑΘΗΜΑΤΑ
ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ 1969

PRINTED IN ATHENS GREECE 1969

FOTO OFFSET Μ. ΠΕΤΡΗΣ - Σ. ΛΕΟΥΣΗΣ

ΧΑΡ. ΤΡΙΚΟΥΠΗ 79 - ΤΗΛ. 628-917

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἡ ἔκδοσις τοῦ παρόντος κύριον σκοπὸν ἔχει τὴν παροχὴν καταλλήλου βοηθήματος εἰς τοὺς φοιτητὰς τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν, εἰς τοὺς ὁποίους διδάσκονται τὰ μαθήματα τῆς Θεωρίας Πιθανοτήτων καὶ Στατιστικῆς. Ἀρχικὴ πρόθεσις τοῦ συγγραφέως, ἅμα τῇ προσεχῶ ἀναλήψει τῶν καθηκόντων του ὡς Καθηγητοῦ εἰς τὴν νεοσύστατον ἕδραν τοῦ Λογισμοῦ τῶν Πιθανοτήτων καὶ Στατιστικῆς παρὰ τῇ Φυσικομαθηματικῇ Σχολῇ τοῦ Πανεπιστημίου, ἦτο ἡ συγγραφὴ διτόμου ἐγχειριδίου, εἰς τὸν πρῶτον τόμον τοῦ ὁποίου ἤθελεν περιληφθῆ ἡ θεωρία Πιθανοτήτων, εἰς δὲ τὸν δεύτερον ἡ θεωρία τῆς Στατιστικῆς Συμπερασματολογίας μετὰ διαφόρων ἐφαρμογῶν.

Τὸ ἔργον τοῦτο λόγῳ φόρτου ἐργασίας κατὰ τὸ τρέχον ἀκαδημαϊκὸν ἔτος, ἠναγκάσθην νὰ ἀναβάλω ἐλπίζων ὅτι θέλω φέρει τοῦτο εἰς πέρας εἰς τὸ ἐγγὺς μέλλον. Κατόπιν τούτου, ἡ ἔκδοσις αὕτη ἐκρίθη ἀναγκαία διὰ τὴν κατὰ τὸ δυνατὸν, ἐπὶ τοῦ παρόντος, ταχυτέραν καὶ καλυτέραν ἐξυπηρέτησιν ὄχι μόνον τῶν σπουδαστῶν τῆς Φυσικομαθηματικῆς Σχολῆς τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν ἀλλὰ καὶ ὅλων ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἐπιθυμοῦν μίαν σύντομον, περιεκτικὴν καὶ μοντέρναν εἰσαγωγὴν εἰς τὴν θεωρίαν Πιθανοτήτων.

Τὰ μαθήματα τὰ ὁποῖα περιέχει τὸ παρὸν ἀποτελοῦν μετάφρασιν, κατόπιν μερικῶν προσθέσεων (κυρίως τοῦ Εἰσαγωγικοῦ Κεφαλαίου, τῶν Ἀσκήσεων εἰς τὸ τέλος ἑκάστου Κεφαλαίου καὶ τοῦ Συμπληρώματος) καὶ ἀλλαγῶν, τῶν σημειώσεων ἐκ τῶν παραδόσεών μου τοῦ εἰσαγωγικοῦ μαθήματος (Basic Course) εἰς τὴν θεωρίαν Πιθανοτήτων, ὡς ἐδιδάχθη τοῦτο κατὰ τὸ α΄ ἑξάμηνον τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ ἔτους 1965 - 1966 εἰς φοιτητὰς εἰδικευομένους εἰς τὸν μεταπτυχιακὸν κλάδον τῶν Ἐπιχειρησιακῶν Ἐρευνῶν τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Νέας Ὑόρκης (New York University). Ἡ παρακολούθησις ἦτο δύο ὧραι (πλήρεις) ἑβδομαδιαίως, οἱ δὲ φοιτηταὶ εἶχον διάφορον προπτυχιακὸν καταρτισμὸν καὶ μαθηματικὴν ὡριμότητα, προερχόμενοι ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἀπὸ Μαθηματικάς, Φυσικάς, Μηχανολογικάς (Engineering) καὶ Οἰκονομοτεχνικὰς ἐπιστήμας. Ὡς ἐκ τούτου, διὰ τὴν μελέτην τοῦ παρόντος (ἐξαιρέσει μερικῶν παραγράφων) ἐπαρκοῦν τά στοιχεῖα διαφορικοῦ καί ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ, τά ὁποῖα ἤθελέ τις διδαχθῆ κατά τήν διάρκειαν ἑνός ἔτους. Τοῦτο εἶναι ἐνδεικτικόν καί τοῦ ἐπιπέδου τοῦ παρόντος ἐγχειριδίου, ἀποσκοποῦντος μᾶλλον εἰς τήν ἀνάπτυξιν, ἐν ἁδραῖς γραμμαῖς, τῶν βασικῶν ἐννοιῶν καί προτάσεων (θεωρημάτων) τοῦ Λογισμοῦ τῶν Πιθανοτήτων, παρά εἰς τήν πληρότητα καί μαθηματικήν αὐστηρότητα τῶν περιεχομένων.

Εἰς μερικά σημεῖα (ἐλάχιστα) αἱ ἀποδείξεις παραλείπονται λόγῳ τοῦ πολυπλόκου αὐτῶν καί τῶν προκεχωρημένων μαθηματικῶν γνώσεων τάς ὁποίας ἀπαιτοῦν. Εἰς ἄλλα σημεῖα, ἀντί ἀποδείξεως, δίδεται λογικόν ἐπιχείρημα δικαιολογοῦν τήν ἰσχύν τοῦ ἐξαγομένου, καί τοῦτο ἄλλοτε μέν χάριν οἰκονομίας, ἄλλοτε δέ χάριν ἀπαλλαγῆς τοῦ ἀναγνώστου (εἰς τήν ἡμετέραν περίπτωσιν μᾶλλον τοῦ ἀκροατοῦ τῶν διαλέξεων) ἀπό λεπτομερείας περισσότερον τυπικάς παρά οὐσιαστικάς.

Τά εἰς τό τέλος ἑκάστου Κεφαλαίου προβλήματα ἀποτελοῦν σημαντικόν μέρος τοῦ ἀνά χεῖρας βοηθήματος. Πλεῖστα εἶναι ἀσκήσεις πρός ἐμπέδωσιν τῆς θεωρίας, ἀλλά καί ἱκανός ἀριθμός τούτων ἀποτελεῖ συμπλήρωμα τῆς θεωρίας. Ταῦτα σημειοῦνται δι' *. Περί τάς 200 ἀσκήσεις ἔχομεν συμπεριλάβει πλήν τῶν λελυμένων παραδειγμάτων εἰς τό κύριον μέρος τοῦ κειμένου.
Μέρος τοῦ παρόντος ἀπετέλεσεν τήν βάσιν τῶν διαλέξεων τοῦ γράφοντος εἰς τό τρέχον Σεμινάριον Στατιστικῶν Μεθόδων τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας.

Αἰσθάνομαι τήν ὑποχρέωσιν ὅπως εὐχαριστήσω τούς παρά τῇ "Ἕδρᾳ βοηθούς δ. Ἀ. Βεϊνῆ καί κ.κ. Γ. Γκιρτῆν καί Α. Σκιαδᾶν διά τήν βοήθειαν εἰς τήν διόρθωσιν τῶν πρός ἐκτύπωσιν τελικῶν δοκιμίων. Ὁ κ. Γκιρτῆς μετέφρασεν ἐκ τοῦ Ἀγγλικοῦ τάς σημειώσεις ἐκ τῶν παραδόσεών μου, ὡς αὗται κατεγράφησαν ὑπό τοῦ φοιτητοῦ R. Navarre, ὁ ὁποῖος εὐγενῶς παρεχώρησεν εἰς ἐμέ δακτυλογραφημένον ἀντίγραφον τούτων, ἄνευ τοῦ ὁποίου αἱ ἄγραφοι διαλέξεις ἤθελον παραμείνει "ἔπεα πτερόεντα".

Θεόφιλος Κάκουλλος

Ἀθῆναι Φεβρουάριος 1969

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II
ΑΙ ΚΥΡΙΩΤΕΡΑΙ ΚΑΤΑΝΟΜΑΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III
ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV
ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΟΙ (ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΑΙ) ΚΑΤΑΝΟΜΑΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V
ΓΕΝΝΗΤΡΙΑΙ - ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI
ΚΑΤΑΝΟΜΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΟΡΙΑΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ. ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΓΑΛΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΚΕΝΤΡΙΚΟΝ ΟΡΙΑΚΟΝ ΘΕΩΡΗΜΑ

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ο

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΦΥΣΙΣ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

"Πιθανότης - ἕκαστος δύναται νά τήν χρησιμοποιήση, οὐδείς νά τήν ἀγνοήση."
Pascal (Pensées)

0.1 Τυχαιότης καί πιθανότης

Ἀντικείμενον τοῦ λογισμοῦ ἤ τῆς θεωρίας τῶν πιθανοτήτων ἤ, χάριν συντομίας, τῆς πιθανοθεωρίας, εἶναι ἡ μαθηματική ἔρευνα τῶν νόμων οἱ ὁποῖοι διέπουν τά καλούμενα **τυχαῖα** φαινόμενα, ἐξεταζόμενα - ἀνεξαρτήτως τοῦ πεδίου εἰς τό ὁποῖον ἐμφανίζονται - μόνον ὑπό τήν ἔποψιν τῆς κοινῆς ἰδιότητος τοῦ τυχαίου καί οὐχί ὑπό οἱανδήποτε ἄλλην ἔποψιν ὡς π.χ. φυσικήν, χημικήν, βιολογικήν, οἰκονομικήν κ.τ.λ. Οὕτω ἡ κατ' ἐπανάληψιν ρῖψις νομίσματος καί ἡ παρατήρησις τοῦ ἀποτελέσματος "κορώνα" ἤ "γράμματα" μεθ' ἑκάστην ρῖψιν, ἡ παρατήρησις τοῦ φύλου νεογεννήτου εἰς μίαν σειράν γεννήσεων, ἡ παρατήρησις κατά πόσον τό εἰσόδημα μιᾶς οἰκογενείας ὑπερβαίνει δεδομένην τιμήν (π.χ. τήν μεσαίαν ἤ μέσην τιμήν) ἀποτελοῦν, ἀπό ἀπόψεως πιθανοθεωρητικῆς, τυχαῖα φαινόμενα τοῦ αὐτοῦ τύπου ἀπαιτοῦντα τό αὐτό μαθηματικόν μοντέλον ἤ πρότυπον (model) διά τήν περιγραφήν των, παρά τό ὅτι προφανῶς τά φαινόμενα καθ' ἑαυτά δύνανται νά ταξινομηθοῦν ἀντιστοίχως ὡς φυσικά, βιολογικά καί οἰκονομικά.

Τό στοιχεῖον τῆς τύχης ἤ τοῦ τυχαίου (ἡ τυχαιότης) ἑνός φαινομένου ἔγκειται εἰς τήν ἀδυναμίαν μας νά προβλέψωμεν μετά βεβαιότητος τό ἀποτέλεσμα (ἐξαγόμενον) ἑκάστης παρατηρήσεως κεχωρισμένως (π.χ. "κορώνα" ἤ "γράμματα" κατά τήν ρῖψιν νομίσματος), κατ' ἀντιδιαστολήν πρός τά καλούμενα **αἰτιοκρατικά** (deterministic) φαινόμενα, τά ὁποῖα ὑπόκεινται εἰς νόμους ἐκφραζομένους ὡς ἑξῆς : Ἐάν ἱκανοποιοῦνται ὡρισμέναι συνθῆκαι, τότε τό ἐνδεχόμενον ἤ γεγονός E πραγματοποιεῖται, π.χ. τό ὕδωρ, ὑπό ἀτμοσφαιρικήν πίεσιν 76 cm Hg θερμαινόμενον ἄνω τῶν 100° C, μετατρέπεται εἰς ἀτμούς (γεγονός E). Ὑπό τάς παρούσας συνθήκας τοῦ σύμπαντος, ὁ ἀριθμός τῶν ἐκλείψεων τοῦ ἡλίου, αἱ ὁποῖαι εἶναι ὁραταί εἰς τό Ἀστεροσκοπεῖον Ἀθηνῶν διά δεδομένον χρονικόν διάστημα εἶναι πλήρως καθωρισμένος. Τοιαῦτα γεγονότα πραγματοποιούμενα μετά βεβαιότητος ὑπό ὡρισμένας συνθήκας καλοῦνται **βέβαια**.

Ἐν ἀντιθέσει, γεγονότα (events) ὡς "κορώνα" ἤ "γράμματα" κατά τήν ρῖψιν νομίσματος, ἄρρεν ἤ θῆλυ κατά τήν γέννησιν, ἐπιτυχία ἤ ἀποτυχία κατά τήν ρῖψιν βλήματος ἐπί στόχου κ.τ.λ. καλοῦνται **τυχαῖα** γεγονότα ἤ ἁπλῶς **ἐνδεχόμενα**, διότι ἐνδέχεται νά ἐμφανισθοῦν ἤ ὄχι καθ' ἑκάστην παρατήρησιν τοῦ ἀντιστοίχου τυχαίου φαινομένου ὑπό τάς αὐτάς ἤ παρομοίας συνθήκας. Εἰς τάς περιπτώσεις ταύτας ὁμιλοῦμεν περί **πειραμάτων τύχης**, ἤτοι πειραμάτων εἰς ἑκάστην δοκιμήν (ἐπανάληψιν) τῶν ὁποίων διάφορα ἐνδεχόμενα ἤ ἀποτελέσματα εἶναι δυνατά χωρίς ὅμως νά εἶναι ἐκ τῶν προτέρων γνωστόν ποῖον συγκεκριμένον ἀποτέλεσμα θά ἐμφανισθῇ (ἴδε καί § 1 1). Ἐν τούτοις, ἄν στρέψωμεν τήν προσοχήν μας εἰς ἀρκούντως μακράν ἀκολουθίαν τοιούτων τυχαίων πειραμάτων, παρατηροῦμεν ὅτι, παρά τήν ἀνώμαλον συμπεριφοράν τῶν ἐπί μέρους δοκιμῶν, τό ποσοστόν ἐμφανίσεως δεδομένου ἀποτελέσματος (ἐνδεχομένου) τοῦ πειράματος προσεγγίζει θετικόν ἀριθμόν (μικρότερον τῆς μονάδος). Οὕτω εἰς τήν περίπτωσιν πειράματος τύχης, ἐνῶ δέν ἰσχύει ὁ νόμος τοῦ αἰτίου - ἀποτελέσματος τῶν βεβαίων γεγονότων, ἰσχύει ὁ νόμος τῆς λεγομένης **στατιστικῆς τάξεως**, ἀφορώσης τήν κατά μέσον ὅρον συμπεριφοράν τοῦ φαινομένου εἰς μακράν σειράν ἐπαναλήψεων τοῦ πειράματος ἀναφορικῶς πρός τό ἐνδεχόμενον.

Ἐν γένει δεχόμεθα ὅτι ἡ σχετική συχνότης ἑνός ἐνδεχομένου εἰς ἄπειρον ἀκολουθίαν ἐπαναλήψεων τοῦ πειράματος προσεγγίζει ὡρισμένην ἰδανικήν τιμήν p τήν ὁποίαν καλοῦμεν **πιθανότητα** τοῦ ἐνδεχομένου. (Θεωρητικήν βάσιν τούτου ἀποτελεῖ ὁ καλούμενος Νόμος τῶν Μεγάλων Ἀριθμῶν, Κεφ. VII). Τοῦτο σημαίνει ὅτι εἰς ἀρκούντως μακράν σειράν ἐπαναλήψεων τοῦ πειράματος ἡ σχετική συχνότης τοῦ ἐνδεχομένου εἶναι κατά προσέγγισιν ἴση πρός p. Ἀντιστρόφως, ἡ ἑρμηνεία αὕτη τῆς πιθανότητος ὡς ὁριακῆς σχετικῆς συχνότητος ἐπιτρέπει τήν **ἐκτίμησιν** τῆς πιθανότητος ἐνδεχομένου τινός εἰς φαινόμενον ἀγνώστου φύσεως διά τό ὁποῖον π.χ. ὁ ἐκ τῶν προτέρων (a priori) καθορισμός ἤ ἔστω εἰκασία τῆς πιθανότητος δέν δικαιολογεῖται ἐπί τῇ βάσει τῆς συμμετρίας. Οὕτω δυνάμεθα νά ἐκτιμήσωμεν τήν πιθανότητα "ἄσσου" εἰς μή ὁμογενῆ κύβον ρίπτοντες τοῦτον κατ' ἐπανάληψιν ἐπί μακρόν καί λαμβάνοντες ὡς τιμήν (ἐκτίμησιν) τῆς πιθανότητος "ἄσσου" τήν παρατηρηθεῖσαν σχετικήν συχνότητα. Ὁμοίως εὑρίσκεται ἐκ πειραματικῶν δεδομένων ὅτι ἄτομον ραδίου διασπᾶται ἐντός χρονικοῦ διαστήματος t ἐτῶν μετά πιθανότητος:

$$p = 1 - e^{-0,000436t}$$

0.2 Ἔννοιαι τῆς πιθανότητος

Ὁ ὅρος "πιθανότης" (chance) χρησιμοποιεῖται διαφοροτρόπως. Ὅλοι γνωρίζομεν τήν χρῆσιν τῆς λέξεως εἰς περιπτώσεις ὡς "ἦτο πιθανῶς εὐχαριστημένος", "πολύ πιθανόν ὁ Α ἔχει δίκαιον", "ἄν ὁ Galois δέν ἀπέθνησκεν τόσον νέος πιθανώτατα θά εἶχεν ἀποδειχθῆ παραγωγικώτερος τοῦ Gauss", "πιθανόν νά ἐκδράμω εἰς Πεντέλην αὔριον", "πιθανόν νά βρέξῃ τήν 28 Ὀκτωβρίου" κ.τ.λ. Προτάσεις καί κρίσεις τοιαῦται παρουσιάζουν φιλοσοφικόν ἐνδιαφέρον καί δέν ἀποκλείονται κατ' ἀνάγκην ἀπό τό ἀντικείμενον μαθηματικῆς θεωρίας. Πλήν ὅμως, τοιαῦται κρίσεις δύνανται μᾶλλον νά θεωρηθοῦν ὡς ἐκφράζουσαι τήν προσωπικήν κατάστασιν καί τρόπον τοῦ σκέπτεσθαι τοῦ ὁμιλοῦντος, καί ἐάν ἤθελέ τις ἐκφράσει ἀριθμητικῶς τοιαύτας πιθανότητας αὗται θά ἐξέφραζον τόν **βαθμόν πίστεως** τοῦ προσώπου μᾶλλον, παρά ποσότητά τινα ὑπολογιζομένην δι' ἀντικειμενικῶν μεθόδων. Εἰς τοιαύτας περιπτώσεις ὁμιλοῦμεν περί "**ὑποκειμενικῆς ἤ προσωπικῆς πιθανότητος**".

Εἰς ἄλλας περιπτώσεις ἡ ἔννοια τῆς πιθανότητος εἶναι διάφορος τῆς ἀνωτέρω. Πρόκειται περί τῆς καλουμένης "**στατιστικῆς ἤ φυσικῆς πιθανότητος**". Οὕτω λέγομεν: "Ρίπτοντες κύβον κατ' ἐπανάληψιν κάποτε θά λάβωμεν ἄσσον", "ἡ πιθανότης θεραπείας καρκίνου τῆς μήτρας εἶναι σήμερον σημαντικώς μεγαλυτέρα παρ' ό,τι ήτο πρό εικοσαετίας", "εάν αναχωρήσω μετά τάς 10 π.μ. πιθανόν νά μή φθάσω εγκαίρως διά τό μάθημά μου είς τάς **10.15**". Η έννοια αύτη της πιθανότητος δέν αναφέρεται είς προσωπικάς κρίσεις άλλά είς τά δυνατά αποτελέσματα (εξαγόμενα) ενός πραγματικού ή υποθετικού πειράματος τύχης, ώς ανεφέρθη είς την § 0.1.

Αί προτάσεις της ανωτέρω παραγράφου επιδέχονται πειραματικήν επαλήθευσιν, ενώ της πρώτης παραγράφου είναι απλαί κρίσεις. Ούτω αί προτάσεις της δευτέρας παραγράφου συνδέονται μέ τά εξής πειράματα: επανειλημμένη ρίψις κύβου, εξέτασις στοιχείων θνησιμότητος εκ καρκίνου της μήτρας, αναχωρήσεις μετά τάς 10. Φυσικά, εάν πράγματι θέλωμεν νά περιγράψωμεν διαδικασίας επαληθεύσεως τοιούτων προτάσεων πρέπει νά είμεθα ακριβέστεροι είς την διατύπωσιν τών έν λόγω προτάσεων. Αυτό όμως τό οποίον μάς ενδιαφέρει επί τού παρόντος είναι ή δυνατότης μιάς τοιαύτης πειραματικής διαδικασίας. Σημειωτέον ότι τούτο δέν είναι δυνατόν διά τάς προτάσεις της πρώτης παραγράφου.

Θά ασχοληθώμεν μέ προτάσεις αναφερομένας είς την έννοιαν της στατιστικής πιθανότητος. Πρίν ομιλήσωμεν διά πιθανότητας πρέπει νά συμφωνήσωμεν επί ενός πειράματος καί τών δυνατών αποτελεσμάτων (εξαγομένων) αυτού, τού καλουμένου χώρου δειγμάτων (ίδε § 1.2, κατωτέρω).

0.3 Ορισμοί της πιθανότητος

Δυνάμεθα νά διακρίνωμεν τέσσαρας τρόπους ορισμού της πιθανότητος.

α) Κλασσική ή **a priori** πιθανότης, ώς ό λόγος τού αριθμού τών ευνοϊκών περιπτώσεων διά τού συνολικού αριθμού τών περιπτώσεων (Laplace).

β) Πιθανότης ώς **οριακή σχετική συχνότης** (Von Mises).

γ) Αξιωματική (μετροθεωρητική) πιθανότης (Kolmogorov).

δ) Πιθανότης ώς **μέτρον τού βαθμού πίστεως** (υποκειμενική πιθανότης).

α. Κλασσικός ορισμός

Ο κλασσικός ορισμός πιθανότητος τού Laplace (1812), επί τού οποίου εβασίζετο μέχρι τών αρχών τού εικοστού αιώνος ή θεωρία τών πιθανοτήτων, ὁρίζει ὡς πιθανότητα, $P(A)$, ἑνός ἐνδεχομένου (ἤ συμβάντος ἤ γεγονότος) A τόν λόγον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων (ἀποτελεσμάτων) N_A διά τό ἐνδεχόμενον A διά τοῦ συνολικοῦ ἀριθμοῦ N τῶν δυνατῶν περιπτώσεων τοῦ πειράματος, ἤτοι

$$P(A) = \frac{N_A}{N} \qquad (1)$$

Οἱ ἀριθμοί N_A καί N καθορίζονται ἐκ τῶν προτέρων (a priori) (ἄνευ πειραματισμοῦ) ἐκ τῆς φύσεως τοῦ πειράματος, ἐπί πλέον δέ αἱ περιπτώσεις (ἀποτελέσματα) θεωροῦνται ἰσοδύναμοι ἤ "ἰσοπίθανοι". Τοῦτο δικαιολογεῖται εἰς πλείστας περιπτώσεις παιγνιδίων τύχης, ὡς ἡ ῥίψις νομίσματος ἤ κύβου, ἡ ἐκλογή ἑνός ἀριθμοῦ παιγνιοχάρτων κ.τ.λ. Οὕτω κατά τήν ῥίψιν κύβου μίαν φοράν, τό ἐνδεχόμενον "ἄρτιος" ἀποτελεῖται ἐκ τῶν ἀποτελεσμάτων 2, 4, 6 καί ἐπομένως P(ἀρτίου) = 3/6.

Εἰς περιπτώσεις ὅμως εἰς τάς ὁποίας τό πείραμα δέν ἔχει πλήρως καθορισθῆ ὁ προσδιορισμός τῶν N_A καί N δέν εἶναι μονοσήμαντος (πρβλ. καί παράδοξον τοῦ Bertrand, Κεφ. VI). Οὕτω, ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν τήν πιθανότητα τοῦ νά ἐμφανισθῆ "κορώνα" (τοὐλάχιστον μία φορά, ἐνδεχόμενον A) ὅταν ῥίψωμεν δύο νομίσματα. Θά ἠδυνάμεθα νά θεωρήσωμεν ὡς δυνατά ἐξαγόμενα (περιπτώσεις) τοῦ πειράματος τά ἑξῆς 3: 2 φοράς "κορώνα", 2 φοράς "γράμματα", μίαν φοράν "κορώνα" καί μίαν "γράμματα". Ἐκ τούτων δύο περιπτώσεις δίδουν τό A. Ἄρα ἡ ζητουμένη πιθανότης εἶναι 2/3. Τοῦτο εἶναι ἐσφαλμένον, διότι μή διακρίνοντες μεταξύ τοῦ 1ου καί 2ου νομίσματος, ὑπεθέσαμεν ὅτι τά ἀνωτέρω 3 ἐξαγόμενα εἶναι ἰσοπίθανα, ἐνῷ πρέπει νά λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅλα τά ζεύγη $(Κ,Κ)$, $(Κ,Γ)$, $(Γ,Κ)$, $(Γ,Γ)$ ὅπου π.χ. $(Κ,Γ)$ παριστᾶ τό ἀποτέλεσμα: "κορώνα" τό 1ον νόμισμα καί "γράμματα" τό 2ον. Οὕτω ἔχομεν 4 ἐξαγόμενα, ἐκ τῶν ὁποίων 3 εἶναι εὐνοϊκά διά τό ἐνδεχόμενον A, καί ἐπομένως $P(A) = 3/4$.

β. Κριτική τοῦ κλασσικοῦ ὁρισμοῦ

Ἡ ἐφαρμογή τοῦ κλασσικοῦ ὁρισμοῦ τῆς πιθανότητος παρουσιάζει τάς ἑξῆς δυσκολίας.

1. Δύναται νά χρησιμοποιηθῆ μόνον διά περιωρισμένον πλῆθος προβλημάτων εἰς τά ὁποῖα ὑποτίθεται τό ἰσοπίθανον. Ἐάν π.χ. ἔχωμεν τήν περίπτωσιν μή ὁμογενοῦς ἤ μή συμμετρικοῦ κύβου, ὅπου λ.χ. ἡ πιθανότης "ἄσσου"

εἶναι 1/4, τοῦτο δέν δυνάμεθα νά λάβωμεν ἐκ τοῦ τύπου (1).

2. Δέν δύναται νά χρησιμοποιηθῆ ὅταν τό πλῆθος τῶν ἐξαγομένων (περιπτώσεων) εἶναι ἄπειρον, ἀπαιτεῖται δέ τροποποίησις εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν. Οὕτω ἄν θέλωμεν τήν πιθανότητα ἵνα τυχών ἀκέραιος εἶναι ἄρτιος, ἡ ἀναμενομένη ἐκ "διαισθήσεως" ἀπάντησις εἶναι 1/2. Πρός δικαιολόγησιν βάσει τοῦ ὁρισμοῦ θά ἠδυνάμεθα νά χρησιμοποιήσωμεν τόν ἑξῆς συλλογισμόν. Μεταξύ τῶν πρώτων 10, 100, 200, ..., ἐν γένει, 2N ἀκεραίων οἱ μισοί εἶναι ἄρτιοι, καί ἐπομένως ὁ λόγος τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων πρός τόν συνολικόν ἀριθμόν τῶν περιπτώσεων εἶναι 1/2. Οὕτω τοῦ N τείνοντος εἰς τό ἄπειρον, ὁπότε καλύπτομεν τό σύνολον τῶν ἀκεραίων, ὁ λόγος παραμένει 1/2. Τό ἐπιχείρημα ὅμως δέν εὐσταθεῖ ἐάν ἀντί τῆς φυσικῆς διατάξεως τῶν ἀκεραίων θεωρήσωμεν μίαν ἄλλην διάταξιν ὡς 2, 4, 1, 6, 8, 3, 10, 12, 5, ..., λαμβάνοντες τό πρῶτον ζεῦγος τῶν ἀρτίων καί μετά τόν πρῶτον περιττόν, μετά τό δεύτερον ζεῦγος τῶν ἀρτίων καί τόν δεύτερον περιττόν, κ.ο.κ. Εἰς τοιαύτην διάταξιν θά ἐφθάναμεν εἰς πιθανότητα ἀρτίου ἴσην πρός 2/3. Ἐπί πλέον, εἶναι δυνατόν νά διατάξωμεν τούς ἀκεραίους οὕτως ὥστε ὁ λόγος νά μή τείνη εἰς καθωρισμένον ὅριον.

γ. Ἡ πιθανότης ὡς σχετική συχνότης

Μία δυσχέρεια τήν ὁποίαν παρουσιάζει ἡ κλασσική θεωρία, ὡς ἀνεφέρθη προηγουμένως, εἶναι προκειμένου νά ἀπαντήσωμεν εἰς ἐρωτήματα, ὡς ἐπί παραδείγματι, ποία ἡ πιθανότης ἄρρενος εἰς τινα πληθυσμόν, ἤ ποία ἡ πιθανότης ἐπιβιώσεως βρέφους πέραν τοῦ ἑνός ἔτους, ποία ἡ πιθανότης ἵνα ἠλεκτρική λυχνία λειτουργήσῃ πέραν ὡρισμένου ἀριθμοῦ ὡρῶν; Εἰς τοιαύτας περιπτώσεις δέν δυνάμεθα νά καθορίσωμεν τάς ἀντιστοίχους πιθανότητας χρησιμοποιοῦντες τήν ἀρχήν τῆς συμμετρίας.

Τήν δυσχέρειαν αἴρει ἡ ὑπό τοῦ Von Mises* διερμήνευσις τῆς πιθανότητος ὡς ὁριακῆς σχετικῆς συχνότητος εἰς ἄπειρον ἀκολουθίαν ἐπαναλήψεων πειράματος τύχης, ὡς ἤδη ἀνεφέρθη εἰς τήν § 0.1. Οὕτω ἀποφεύγεται τό πρόβλημα τοῦ κα-

---

* Richard von Mises, Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit, Springer Verlag, 1936

θορισμοῦ τῆς a priori πιθανότητος, καί ἐπί πλέον καθίσταται δυνατή ἡ ἐκτίμησις τῆς πιθανότητος ἐνδεχομένου διά τῆς παρατηρηθείσης σχετικῆς συχνότητος αὐτοῦ εἰς ἀρκούντως μεγάλον ἀριθμόν ἐπαναλήψεων τοῦ πειράματος τύχης. Οὕτω ἐάν περίπου 51% τῶν γεννήσεων εἰς μίαν πόλιν εἶναι ἄρρενες, τότε δυνάμεθα νά λάβωμεν τήν πιθανότητα ἄρρενος εἰς τήν πόλιν ταύτην κατά προσέγγισιν ἴσην πρός 0,51. Αἱ οὕτω ὁριζόμεναι πιθανότητες καλοῦνται **στατιστικαί πιθανότητες** ἤ **ἐκ τῶν ὑστέρων πιθανότητες** (a posteriori) ἤ καί **φυσικαί πιθανότητες**.

Ἡ ἔννοια τῆς στατιστικῆς πιθανότητος εἶναι σύμφωνος πρός τόν ἐμπειρικόν νόμον τῆς στατιστικῆς τάξεως ὡς ἀνεπτύχθη εἰς τήν § 0.1, καθώς καί πρός τόν μαθηματικόν Νόμον (θεώρημα) τῶν Μεγάλων ἀριθμῶν.

Ἀξίζει νά ἀναφέρωμεν τό ἑξῆς, τό ὁποῖον διηγεῖται ὁ Laplace ἐν σχέσει μέ τήν διαπίστωσιν τῆς **σταθερότητος τῶν σχετικῶν συχνοτήτων** εἰς μεγάλον ἀριθμόν παρατηρήσεων. Ὁ Laplace ἐξετάζων τάς στατιστικάς γεννήσεων, διεπίστωσεν ὅτι τό ποσοστόν ἀρρένων ἦτο τό αὐτό διά τάς πόλεις τοῦ Λονδίνου, τῆς Πετρουπόλεως, τοῦ Βερολίνου καί ὅλης τῆς Γαλλίας, κυμαινόμενον ἐπί δεκαετίαν περί τό 22/43. Τά ἀντίστοιχα στατιστικά στοιχεῖα διά τούς Παρισίους διά τά ἔτη 1745-1748 ἐδίδον ποσοστόν 25/49. Ὁ Laplace ζητῶν ἐξήγησιν τῆς αἰσθητῆς αὐτῆς διαφορᾶς μεταξύ τῶν δύο ποσοστῶν, ἀνεκάλυψεν κατόπιν ἐνδελεχοῦς ἐρεύνης ὅτι εἰς τόν ἀριθμόν τῶν γεννήσεων τῆς πόλεως περιελαμβάνοντο καί ὅλα τά ἐγκαταλελειμμένα βρέφη, προέκυψε δέ περαιτέρω ὅτι ἐγκατελείποντο περισσότερα βρέφη τοῦ ἑνός φύλου (θήλεα!). Μετά τήν διόρθωσιν τῶν στατιστικῶν δεδομένων, μή συμπεριλαβών τά ἐγκαταλελειμμένα βρέφη, κατέληξεν εἰς τό αὐτό ποσοστόν ὡς καί δι' ὅλην τήν Γαλλίαν, ἤτοι 22/43.

Πάντως παρά τά πλεονεκτήματα τοῦ ἐμπειρικοῦ ὁρισμοῦ τῆς πιθανότητος ἔναντι τοῦ κλασσικοῦ ὁρισμοῦ τῶν (a priori) πιθανοτήτων, δέον νά σημειωθῆ ὅτι οὗτος ὑπῆρξεν ἀντικείμενον κριτικῆς διά τό ὅτι κυρίως ἀποπειρᾶται νά **θεμελιώσῃ** **μίαν θεωρίαν ἀπαγωγικῆς μορφῆς ἐπί ἐμπειρικῶν βάσεων**. Ἐν ἄλλοις λόγοις, εἶναι ἀμφισβητήσιμον τό κατά πόσον δύναται οὗτος νά ἀποτελέση τήν βάσιν μιᾶς ἀξιωματικῆς (μαθηματικῆς) θεωρίας τῶν πιθανοτήτων. Ἡ ἐπικρατοῦσα ἀξιωματική θεμελίωσις τοῦ λογισμοῦ τῶν πιθανοτήτων ὀφείλεται εἰς τόν Kolmogorov, θά ἐκθέσωμεν δέ ταύτην κατωτέρω (ἴδε § 1.4 καί Συμπλήρωμα).

δ. Ὑποκειμενική πιθανότης

Ἡ οὕτω καλουμένη ὑποκειμενική πιθανότης, κατ' ἀντιδιαστολήν πρός τήν στατιστικήν ἤ φυσικήν πιθανότητα, ἐκφράζει, ὡς ἀνεφέρθη εἰς τήν § 0.2 ὑποκειμενικήν σκέψιν ἤ πίστιν ὡς πρός τήν ἀλήθειαν μεμονωμένης κρίσεως ἤ τήν δυνατότητα πραγματοποιήσεως ἑνός ἀτομικοῦ ἐνδεχομένου οὐχί κατ' ἀνάγκην ἐν ἀναφορᾷ πρός πείραμα τύχης δυνάμενον νά ἐπαναληφθῇ ὑπό τάς αὐτάς ἤ παρομοίας κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον συνθήκας. Οὕτω ὅταν λέγῃ τις ὅτι "πιθανώτατα τό τελευταῖον θεώρημα τοῦ Fermat εἶναι ἀληθές" ἤ ὅτι "θά βρέξῃ εἰς Ἀθήνας τά Χριστούγεννα τοῦ 2.000 μ.Χ.", αἱ προτάσεις καί κρίσεις αὗται ἀντανακλοῦν τόν τρόπον τοῦ σκέπτεσθαι τοῦ ὁμιλοῦντος. Τό μέν θεώρημα τοῦ Fermat εἶναι ἀληθές ἤ ψευδές (ἐφαρμοζομένης τῆς ἀρχῆς τῆς τοῦ τρίτου ἀποκλίσεως), ἡ δέ δευτέρα κρίσις, ὑπονοοῦσα τό ἀπίθανον καλῆς ἡμέρας Χριστουγέννων, καθίσταται κενή ἐννοίας ἐάν πράγματι δέν βρέξῃ τήν ἡμέραν ἐκείνην. Ἡ ἐν λόγῳ κρίσις θά εἶχε σημασίαν ἀπό ἀπόψεως στατιστικῆς πιθανότητος ἐάν ἀνεφέρετο ὄχι εἰς συγκεκριμένα Χριστούγεννα (τοῦ 2.000), ἀλλά γενικῶς εἰς τήν ἡμέραν τῶν Χριστουγέννων.

0.4 Ἐφαρμογαί τῆς θεωρίας πιθανοτήτων

Τά πεδία ἐφαρμογῶν τοῦ λογισμοῦ τῶν πιθανοτήτων ὁλονέν εὐρύνονται. Αἱ ἰδέαι τῆς πιθανοθεωρίας παρουσιάζονται εἰς καταπληκτικήν ποικιλίαν ἐπιστημονικῶν καί πρακτικῶν δραστηριοτήτων.

Εἰς τήν φυσικήν καί χημείαν ἡ χρῆσις τῆς θεωρίας πιθανοτήτων κατέστη ἀναπόφευκτος μετά τήν ἀποδοχήν τῆς μοριακῆς θεωρίας τῆς δομῆς τῆς ὕλης. Ἕκαστον σῶμα ἀποτελεῖται ἀπό τεράστιον ἀριθμόν σωματίων, περί τῆς φύσεως καί τῆς ἀμοιβαίας ἀλληλεπιδράσεως τῶν ὁποίων πολύ ὀλίγα γνωρίζομεν. Εἰς τοιαύτας περιπτώσεις αἱ συνήθεις μαθηματικαί μέθοδοι ἐρεύνης, ὡς αἱ διά τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων, καθίστανται ἀνίκανοι νά ὁδηγήσουν εἰς ἀξιοσημείωτα συμπεράσματα, ἐπί πλέον δέ τοιαῦται μέθοδοι ὁρμώμεναι ἀπό τήν ἀτομικήν συμπεριφοράν τῶν σωματίων εἶναι ἀνεδαφικαί, ἐφ' ὅσον τό ἐνδιαφέρον τοῦ προβλήματος ἔγκειται εἰς τήν μελέτην τῶν νόμων **συλλογικῆς συμπεριφορᾶς** τῶν σωματίων. Ἐπί πλέον οἱ νόμοι οὗτοι ἀφ' ἑνός μέν ὀλίγον ἐξαρτῶνται ἐκ τῶν ἀτομικῶν ἰδιοτήτων τῶν σωματίων καί ἀφ' ἑτέρου δέν ἀνάγονται εἰς ἁπλῆν ἄθροισιν τῶν ἐπί μέρους κινήσεων καί ἐπιδράσεων τῶν σωματίων. Διά ταῦτα αἱ πιθανοθεωρητικαί μέθοδοι, ἀφορῶσαι τήν μέσην (μακροσκοπικήν) συμπεριφοράν τῶν φαινομένων εἰς τά ὁποῖα ὑπεισέρχονται πολλαί συνιστῶσαι καί παράγοντες, καθίστανται λίαν κατάλληλοι καί ἀποτελεσματικαί εἰς τήν μελέτην τῶν μοριακῶν φαινομένων καί γενικώτερον τῶν προβλημάτων τῆς νεωτέρας φυσικῆς.

Οἱ γενετισταί διά τῶν νόμων τῶν πιθανοτήτων προβλέπουν τάς ἀναλογίας ὑπό τάς ὁποίας ἐμφανίζονται διάφορα χαρακτηριστικά καί τύποι ἀτόμων. Εἰς τήν τηλεπικοινωνίαν, μελετᾶται ἡ συχνότης τῶν τηλεφωνικῶν συνδέσεων καί καθορίζεται ὁ ἀριθμός τῶν ἀπαιτουμένων γραμμῶν, εἰς τήν βιομηχανίαν αἱ στατιστικαί μέθοδοι ἑδραζόμεναι ἐπί τῆς θεωρίας πιθανοτήτων χρησιμοποιοῦνται διά τόν ἔλεγχον καί διατήρησιν τῆς ποιότητος τῶν προϊόντων εἰς ὡρισμένον ἐπίπεδον. Ἡ πιθανοθεωρητική ἄποψις ὑπεισέρχεται τόσον εἰς τά προβλήματα τῆς γαλαξιακῆς δομῆς ὅσον καί εἰς τά τῆς φύσεως τῶν θεμελιακῶν οἰκοδομικῶν στοιχείων τῆς ὕλης. Ἐμφανίζεται εἰς τήν πρόγνωσιν τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν ἐκλογῶν καί εἰς τήν προετοιμασίαν μιᾶς διαφημιστικῆς ἐκστρατείας. Εἶναι ἐργαλεῖον εἰς τόν καθορισμόν τῆς ἀποτελεσματικότητος ἑνός φαρμάκου καί τήν εὕρεσιν τῆς ἡλικίας τοῦ πλανήτου μας. Αἱ μέθοδοι τῆς θεωρίας πιθανοτήτων ἔχουν χρησιμοποιηθῆ εἰς τήν "ἀνίχνευσιν" τοῦ θορύβου κατά τήν ἐκπομπήν σήματος καί τήν σχεδίασιν συστημάτων τηλεπικοινωνιῶν καί αὐτομάτου ἐλέγχου.

Τά ἀνωτέρω παραδείγματα ἐφαρμογῶν δεικνύουν τήν εὐρύτητα τῶν ἐφαρμογῶν τῆς θεωρίας πιθανοτήτων, καί συνεπῶς τήν χρησιμότητα ταύτης, ἀνεξαρτήτως τοῦ ἐνδιαφέροντος καί τῆς ὡραιότητος τήν ὁποίαν παρουσιάζει αὕτη ὡς κλάδος τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης μέ ἰδίας μεθόδους καί προβλήματα.

0.5 Σύνοψις τῆς ἱστορικῆς ἐξελίξεως τῆς θεωρίας τῶν πιθανοτήτων

Αἱ ἀρχαὶ τοῦ λογισμοῦ τῶν πιθανοτήτων εἶναι συνυφασμέναι μὲ τὴν παμπάλαιαν καὶ ἐπιζήσασαν μέχρι σήμερον, παρὰ τοὺς ἑκάστοτε ἀπαγορευτικοὺς κυβερνητικοὺς νόμους καὶ ἐκκλησιαστικοὺς κανόνας, ἀπασχόλησιν τοῦ ἀνθρώπου εἰς τὰ τυχηρὰ παιγνίδια. Ἰδιαιτέρως ἡ ρῖψις δύο ἢ καὶ τριῶν κύβων (ζαριῶν, τῆς λέξεως πιθανώτατα προερχομένης ἐκ τῆς Ἀραβικῆς al zhar ἐξ ἧς καὶ ἡ Ἀγγλικὴ λέξις hazard = κίνδυνος, τύχη, καὶ ἡ Γαλλικὴ hasard) κατὰ τὴν ὁποίαν οἱ παῖκται ἐστοιχημάτιζον ἐπὶ ὡρισμένου ποσοῦ χρημάτων, ὑπῆρξε ἀντικείμενον μελέτης πολλῶν Ἰταλῶν μαθηματικῶν πρὸ τοῦ 16ου αἰῶνος, οἱ ὁποῖοι προσεπάθουν νὰ ἀπαριθμήσουν τὸ πλῆθος τῶν δυνατῶν ἀποτελεσμάτων καὶ ἐξ αὐτοῦ κάπως ἀορίστως καὶ τὴν "πιθανότητα" ἐμφανίσεως ἀποτελέσματός τινος, ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων δύο κύβων κ.τ.λ. Ἀναφέρομεν ἁπλῶς τὰ ὀνόματα τῶν μαθηματικῶν Faccioli (1494), Tartaglia (1556), Peverone (1558). Παρὰ τὰς προσπαθείας ταύτας, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς πρῶτον ἄξιον λόγου ἐγχειρίδιον ἐπὶ τοῦ λογισμοῦ τῶν Πιθανοτήτων τὴν πραγματείαν τοῦ Ὁλλανδοῦ μαθηματικοῦ καὶ φυσικοῦ Huyghens ὑπὸ τὸν λατινικὸν τίτλον De Ratiociniis in Ludo Aleae δημοσιευθεῖσαν τὸ 1657. Τοῦτο ἐξήσκησε θεμελιώδη ἐπίδρασιν ἐπὶ δύο ἐκ τῶν κυριωτέρων θεμελιωτῶν τοῦ λογισμοῦ τῶν πιθανοτήτων, τοῦ James Bernoulli (1654-1705), συγγραφέως τοῦ Ars Conjectandi (1713), καὶ τοῦ Abraham de Moivre (1667-1754).

Γενικαὶ μέθοδοι χειρισμοῦ προβλημάτων σχετιζομένων μὲ τυχηρὰ παιγνίδια ἀνεπτύχθησαν τὸ πρῶτον κατὰ πᾶσαν πιθανότητα ὑπὸ τῶν διασήμων μαθηματικῶν Pascal (1623-1662) καὶ Fermat (1608*-1665), οἱ ὁποῖοι ἀντήλλαξον ἀπόψεις δι' ἀλληλογραφίας ἐπὶ διαφόρων προβλημάτων λαβόντες ἀφορμὴν ἀπὸ δύο περίφημα προβλήματα προταθέντα πρὸς λύσιν εἰς τὸν Pascal ὑπὸ τοῦ ἐξ ἐπαγγέλματος παίκτου Chevalier de Méré.

α) Ποῖον εἶναι συμφερώτερον, νὰ στοιχηματίσῃ ὁ παίκτης ὅτι θὰ φέρῃ του-

---

* Ὄχι ἐξηκριβωμένον.

λάχιστον ένα 6 ρίπτων τετράκις ένα κύβον ή ότι θά φέρη τουλάχιστον άπαξ διπλούν 6 ρίπτων 24 φοράς δύο κύβους;

'Ο de Meré ύπελόγιζεν ότι τά δύο αύτά ένδεχόμενα έχουν τήν αύτήν πιθανότητα δεδομένου ότι είς τό παιγνίδιον τών δύο κύβων ή πιθανότης διπλού 6 είναι 1/36, ήτοι τό 1/6 τής πιθανότητος έμφανίσεως ένός 6 κατά τήν ρίψιν ένός κύβου. Πλήν όμως παρατηρήσας έξ έμπειρίας διαφοράν είς τάς παρατηρηθείσας συχνότητας τών δύο ένδεχομένων "διεμαρτυρήθη" τό 1654 είς τόν Pascal ότι "τά μαθηματικά όδηγούν είς έσφαλμένα άποτελέσματα". Πράγματι ό Pascal άπέδειξεν ότι είς μέν τήν περίπτωσιν τού ένός κύβου ή πιθανότης είναι 0,518 είς δέ τήν τών δύο κύβων μικροτέρα, ίση πρός 0,491.

β) Τό **πρόβλημα τών μεριδίων** ("πόντων"). Είς εκάστην έπανάληψιν παιγνιδίου έκαστος τών δύο παικτών έχει τήν αύτήν πιθανότητα νά κερδίση τό παιγνίδιον. "Οποιος κερδίση πρώτος 3 παιγνίδια λαμβάνει τό κατατεθέν παρ' έκάστου ποσόν α. Έάν οί παίκται άναγκασθούν νά διακόψουν τό παιγνίδιον όταν ό ένας έχη 2 "πόντους" καί ό άλλος 1 "πόντον", πώς πρέπει νά μοιρασθούν τό στοίχημα; 'Ο Pascal άπήντησεν ότι τό ποσόν πρέπει νά διαιρεθή κατά τήν άναλογίαν 3 πρός 1 ύπέρ τού έχοντος 2 "πόντους". (Διατί;).

Τά μέγιστα συνέβαλεν είς τήν άνάπτυξιν τού Λογισμού τών Πιθανοτήτων ό Laplace (1749-1827) διά τών έργων του Theorie Analytique de Probabilités, δημοσιευθέντος τό 1812, καί τού πλέον έκλαϊκευμένου Essai Philosophique sur les Probabilités.

'Η νεωτέρα άνάπτυξις τής θεωρίας τών Πιθανοτήτων χαρακτηρίζεται τόσον άπό ένδιαφέρον πρός αύτήν ταύτην τήν θεωρίαν όσον καί πρός τήν κατεύθυνσιν διευρύνσεως τών έφαρμογών αύτής. Σημαντική είναι ή συμβολή τών Ρώσσων Μαθηματικών Chebyshev, Markov, Λιαpounov κατά τόν 19ον αίώνα ώς θά διαπιστωθή είς τάς κατωτέρω παραγράφους. 'Επίσης σημαντικαί είναι αί συμβολαί τού 20ού αίώνος ύπό τών Lindeberg, S. Bernstein, A. Kolmogorov, Khintchin καί τών έκπροσώπων τής Γαλλικής Σχολής Emile Borel καί Paul Lévy. 'Η μετροθεωρητική θεμελίωσις τών πιθανοτήτων όφείλεται κυρίως εἰς τόν Kolmogorov*. Ἡ ἐμπειρική ἤ Στατιστική ἑρμηνεία τῆς πιθανότητος ὀφείλεται εἰς τόν R. Von Mises, εἰς τόν ὁποῖον ὀφείλεται καί ἡ ἔννοια τοῦ δειγματοχώρου. (Merkalraum) καθώς καί εἰς τόν Πατέρα τῆς Στατιστικῆς ἐπιστήμης R. A. Fisher. Ἡ φιλοσοφική θεώρησις τῆς πιθανότητος καί ἡ ἑρμηνεία ταύτης ὡς "βαθμοῦ πίστεως" ἀνεπτύχθη κυρίως ὑπό τοῦ Sir Harold Jeffreys εἰς τό σύγγραμμά του Scientific Inference, Oxford, 1939. Πλήρης ἱστορία τῆς ἀναπτύξεως τῆς θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων τῆς περιόδου 1575 - 1825 δίδεται ὑπό τοῦ I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to Laplace, ἀρχικῶς δημοσιευθέντος τό 1865.

---

* Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1933.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I

ΒΑΣΙΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

1.1. Πειράματα τύχης

Είς πολλάς περιπτώσεις επιστημονικών καί πρακτικών δραστηριοτήτων, ώρισμένα πειράματα (παρατηρήσεις) δύνανται νά επαναληφθοῦν ἕνα μεγάλον ἀριθμόν φορῶν ὑπό τάς αὐτάς ἤ παρομοίας κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον συνθήκας. Είς τινας περιπτώσεις τά ἀποτελέσματα ἑκάστου ἀτομικοῦ πειράματος δύνανται νά προβλεφθοῦν μετ' ἀκριβείας, ὡς π.χ. ὁ χρόνος τῶν ἐκλείψεων τοῦ Ἡλίου, τό διάστημα τό ὁποῖον διανύει σῶμα πῖπτον ὑπό τήν ἐπίδρασιν τῆς βαρύτητος εἰς χρόνον t. κ.ο.κ. Τοιούτου εἴδους πειράματα καλοῦνται "προσδιορίσιμα", τά δέ ἀντίστοιχα γεγονότα (ἀποτελέσματα) "βέβαια".

Εἰς ἄλλας ὅμως περιπτώσεις ἡ γνῶσις μας δέν εἶναι ἀρκετά ἀκριβής οὕτως, ὥστε νά ἐπιτρέπεται ἡ ἀκριβής πρόβλεψις τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν ἀτομικῶν πειραμάτων. Εἰς τοιαύτας περιπτώσεις ὁμιλοῦμεν περί ***πειραμάτων τύχης*** (non-deterministic), εἰς τά ὁποῖα δέν ἰσχύει ὁ νόμος τοῦ αἰτίου - αἰτιατοῦ, ἤτοι ὑπό τάς αὐτάς κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον συνθήκας δέν ἕπεται τό αὐτό ἀποτέλεσμα (γεγονός).

Παραδείγματα: (Τυχαίων πειραμάτων).

1. Ἡ ρῖψις ἑνός νομίσματος ἅπαξ. Δυνατά ἀποτελέσματα: ΚΟΡΩΝΑ (Κ), ΓΡΑΜΜΑΤΑ (Γ).
2. Ἡ ρῖψις ἑνός κύβου ἅπαξ. Δυνατά ἀποτελέσματα: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
3. Ἡ τιμή ἑνός ἀγαθοῦ κατά μίαν ὡρισμένην ἡμερομηνίαν. Δυνατά ἀ-

ποτελέσματα : Οἱοσδήποτε θετικός ἀριθμός (θεωρητικῶς).

4. Τό φῦλον νεογεννήτου. Δυνατά ἀποτελέσματα : Ἄρρεν (Α), Θῆλυ (Θ).

Σημείωσις: Εἰς τά ὡς ἄνω παραδείγματα 1 καί 4 τά ἀποτελέσματα εἶναι ποιοτικά, δυνάμεθα ὅμως νά μετατρέψωμεν ταῦτα εἰς ποσοτικά (π.χ. δι' ἀντιστοιχίσεως ἑνός ἀριθμοῦ εἰς ἕκαστον ἀποτέλεσμα, π.χ. ἀντιστοιχοῦντες 1 διά τά Κ καί Α καί 0 διά τά Γ, Θ).

1.2. Ὁρισμοί δειγματοχώρου καί πιθανότητος

1. Τό σύνολον τῶν δυνατῶν ἀποτελεσμάτων ἑνός πειράματος τύχης καλεῖται ***χῶρος δειγμάτων*** ἤ ***γεγονότων*** ἤ ***δειγματικός χῶρος*** ἤ ***δειγματοχῶρος*** ἐνῶ τά ἀτομικά (ἀδιαίρετα) ἀποτελέσματα καλοῦνται ***στοιχειώδη*** ἤ ***ἁπλᾶ*** ἐνδεχόμενα.

Θά παριστῶμεν τόν δειγματοχῶρον διά Ω.

Μία ἕνωσις (ἄθροισμα) στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων καλεῖται (σύνθετον) ***τυχαῖον γεγονός*** ἤ ***ἐνδεχόμενον***. Ἤτοι, ἐνδεχόμενον καλεῖται οἱονδήποτε ὑποσύνολον τοῦ δειγματικοῦ χώρου.

Παράδειγμα: Εἰς τό παράδειγμα 2 τά στοιχειώδη γεγονότα εἶναι 1, 2, 3, 4, 5, 6 ἐνῶ ἕνα σύνθετον ἐνδεχόμενον εἶναι "ἄρτιον ἀποτέλεσμα", ἤτοι 2 ἤ 4 ἤ 6.

Σημείωσις: Ὁ δειγματικός χῶρος, δηλ. ὅλα τά στοιχειώδη ἐνδεχόμενα, θεωρούμενος ὡς σύνθετον γεγονός ἀποτελεῖ τό καλούμενον "βέβαιον γεγονός".

2. ***Πιθανότης ἑνός ἐνδεχομένου.*** Ἔστω ὅτι Ε δηλοῖ ἕν ἐνδεχόμενον (συμφώνως πρός τόν ὁρισμόν μας, Ε εἶναι ἕν ὑποσύνολον τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω, δηλ. $E \subset \Omega$). Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τό ἐνδεχόμενον Ε ἐνεφανίσθη ν φοράς εἰς η ἐπαναλήψεις τοῦ πειράματος τύχης. Ὁ λόγος $\frac{\nu}{\eta}$ καλεῖται "***σχετική συχνότης***" τοῦ Ε εἰς τάς η δοκιμάς καί ὅταν τό η τείνῃ εἰς τό ἄπειρον, τό $\frac{\nu}{\eta}$ τείνει εἰς μίαν σταθεράν $P(E)$, τήν ὁποίαν καλοῦμεν "***πιθανότητα τοῦ ἐνδεχομένου Ε***" ἤτοι

$$P(E) = \lim_{\eta \to \infty} \frac{\nu}{\eta}$$

Ἡ ἑρμηνεία αὐτή τῆς πιθανότητος ὡς ὁριακῆς σχετικῆς συχνότητος ὀφείλεται εἰς τόν Von Mises καί βασίζεται ἐπί τοῦ νόμου τῆς στατιστικῆς τάξεως ἤ ἄλλως τῆς σταθερότητος τῶν σχετικῶν συχνοτήτων εἰς μεγάλον ἀριθμόν ἐπαναλήψεων τοῦ πειράματος τύχης.

Ὁ κλασσικός ὁρισμός τῆς πιθανότητος ἑνός ἐνδεχομένου E (κατά Laplace) εἶναι:

$$P(E) = \frac{\text{Ἀριθμός τῶν εὐνοϊκῶν ἀποτελεσμάτων διά τό E}}{\text{Ἀριθμός ὁλικῶν (δυνατῶν) ἀποτελεσμάτων}}$$

Εἰς τόν ὁρισμόν τοῦτον ὑπονοεῖται ἡ ***ὑπόθεσις τοῦ ἰσοπιθάνου*** τῶν ἀποτελεσμάτων (περιπτώσεων) ἤ στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων. Π.χ. εἰς τό παράδειγμα 2: P(ἀρτίου ἀποτελέσματος) =

$$= \frac{\text{ἀριθμός τῶν ἀρτίων ἀποτελ.}}{\text{ἀριθμός ὅλων τῶν ἀποτελ.}} = \frac{3}{6}$$

1.3. Βασικαί πράξεις ἐπί σημειοσυνόλων

Ὁρισμοί:

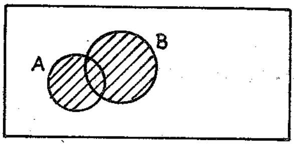
1. Ἕν ὑποσύνολον A τοῦ Ω συμβολιζόμενον $A \subset \Omega$ εἶναι μία συλλογή σημείων ω τοῦ Ω. (Ἐάν Ω εἶναι ὁ δειγματικός χῶρος τότε A εἶναι ἕνα ἐνδεχόμενον).
2. Ἔστωσαν A καί B δύο ὑποσύνολα (ἐνδεχόμενα). Λέγομεν ὅτι τό A συνεπάγεται τό B καί συμβολίζεται διά τοῦ $A \subset B$, ἐάν ὁποτεδήποτε πραγματοποιῆται τό A τότε πραγματοποιεῖται καί τό B, δηλ. κάθε $\omega \in A$ εἶναι ἐπίσης στοιχεῖον τοῦ B.

Σημείωσις: $A \subset B$ δύναται νά γραφῇ ὡς $B \supset A$ (B καλύπτει τό A ἤ περιέχει τό A).

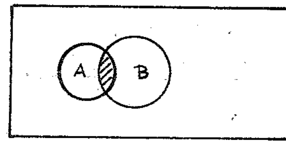
3. Τό ἐνδεχόμενον, τό ὁποῖον δέν περιέχει οὐδέ ἕν στοιχεῖον (στοιχειώδες ἐνδεχόμενον) καλεῖται ***ἀδύνατον ἐνδεχόμενον*** συμβολιζόμενον διά τοῦ ϕ.
4. ***Ἕνωσις δύο γεγονότων***: Ἡ ἕνωσις δύο γεγονότων A καί B συμβολιζομένη διά $A \cup B$, περιέχει κάθε στοιχεῖον, τό ὁποῖον ἀνήκει ἤ εἰς τό A

ἢ εἰς τὸ B (ἢ εἰς ἀμφότερα). Δύναται νὰ ἑρμηνευθῇ ὡς: ***τοὐλάχιστον ἕν ἐκ τῶν γεγονότων A καὶ B πραγματοποιεῖται.***

Σημείωσις: Ἕνωσις τριῶν γεγονότων δηλ. $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$ ἡ πρᾶξις $\cup$ ἱκανοποιεῖ τὸν προσεταιριστικὸν νόμον.



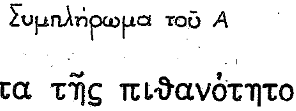
Ἕνωσις $A \cup B$



Τομὴ $A \cap B$

5. ***Ἡ τομὴ ἢ γινόμενον*** δύο συνόλων (ἐνδεχομένων) εἶναι τὸ σύνολον (ἐνδεχόμενον), τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ ὅλα τὰ στοιχεῖα (στοιχειώδη γεγονότα), τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς ἀμφότερα τὰ A καὶ B, ἤτοι $A \cap B$ ἢ AB σημαίνει τὴν σύγχρονον πραγματοποίησιν τῶν γεγονότων A καὶ B.

6. Τὸ ***συμπλήρωμα ἢ ἀντίθετον*** τοῦ A (ἐν Ω) συμβολιζόμενον διὰ τοῦ A^c ἢ $\bar{A}$ ἢ A' (ἂς διατηρήσωμεν τὸ A') εἶναι τὸ σύνολον, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα (στοιχεῖα), τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς τὸ Ω ἀλλὰ ὄχι εἰς τὸ A, ἤτοι A' σημαίνει ὅτι τὸ ἐνδεχόμενον A δὲν συμβαίνει.



Συμπλήρωμα τοῦ A

1.4. Βασικὰ ἀξιώματα τῆς πιθανότητος

Ἔστω Ω εἷς δειγματικὸς χῶρος. Ἡ "πιθανότης" ἢ "συνάρτησις πιθανότητος" P, εἶναι μία συνάρτησις ὁριζομένη διὰ κάθε (μετρήσιμον)* ὑποσύ-

---

* Ἡ ἔννοια τῆς μετρησιμότητος χρειάζεται μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν χώρων ἀποτελου-

νολον (ἐνδεχόμενον) τοῦ Ω, οὕτως ὥστε, νά πληροῦνται τά κάτωθι ***ἀξιώματα τοῦ Kolmogorov.***

1). $P(\Omega)=1$, ἤτοι ἡ πιθανότης τοῦ βεβαίου γεγονότος Ω εἶναι ἴση πρός 1.

2). Ἐάν A εἶναι ἕν ἐνδεχόμενον, τότε $P(A)\geqslant 0$.

3). Ἐάν $A_1, A_2, \ldots$ εἶναι μία ἀκολουθία ***ἀσυμβιβάστων*** ἤ ***ξένων μεταξύ των*** ἐνδεχομένων, δηλ. $A_i A_j=\phi$, $i\neq j$, τότε

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup\ldots\cup A_\nu\cup\ldots)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_\nu)+\ldots,$$

ἤτοι ἡ πιθανότης ἵνα συμβῆ τουλάχιστον ἕν τῶν ἀσυμβιβάστων ἐνδεχομένων εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων τῶν ἐν λόγῳ ἐνδεχομένων.

Εἰς τήν ὁρολογίαν τῆς θεωρίας μέτρου, ἡ συνάρτησις πιθανότητος εἶναι ἕν πεπερασμένον μέτρον (ἤτοι μέ $P(\Omega)<\infty$) τοιοῦτον ὥστε $P[\Omega]=1$.

Παράδειγμα: Ἐκ μιᾶς δέσμης 52 συνήθων παιγνιοχάρτων ἐξάγεται ἕν τυχαίως. Ἔστωσαν τά ἐνδεχόμενα:

A: τό ἐξαχθέν παιγνιόχαρτον εἶναι "Καρρό"

B: " " " " "Σπαθί"

$P(A\cup B)=P($τό ἐξαχθέν εἶναι "Καρρό" ἤ "Σπαθί"$)=P(A)+P(B)$

Ἐκ τοῦ ὅτι ὑποθέτομεν ὅτι ὅλα τά παιγνιόχαρτα εἶναι ἐξ ἴσου πιθανά, ἕπεται ὅτι ἕκαστον ἔχει πιθανότητα ἐξαγωγῆς ἴσην πρός $\frac{1}{52}$ καί ἄρα:

$$P(A)=\frac{13}{52},\quad P(B)=\frac{13}{52},\quad P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{2}.$$

1.5. Βασικαί ἰδιότητες τῶν πιθανοτήτων

I. Δι' οἱονδήποτε ἐνδεχόμενον A

μένων ἀπό ἄπειρον τό πλῆθος στοιχείων. Ἡ κατασκευή ἑνός μή μετρησίμου συνόλου ἀπαιτεῖ μεγάλην ἐπιδεξιότητα. Ἕν σύνολον $A\subset\Omega$ καλεῖται "μετρήσιμον" ἐάν τοῦτο ἀνήκῃ εἰς ἕν σ-σῶμα ἤ σ-ἄλγεβραν (σῶμα Borel) B ἐπί τοῦ Ω. B εἶναι ἡ μικροτέρα οἰκογένεια συνόλων τοῦ Ω κλειστή ὡς πρός τάς πράξεις τῆς συμπληρωματικότητος καί τῆς ἀριθμησίμου ἑνώσεως.

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Ἀπόδειξις :

Ἀρκεῖ νά ἀποδειχθῆ (βάσει τοῦ ἀξιώματος 2) $P(A) \geq 0$) ὅτι $P(A) \leq 1$. Πρός τοῦτο θεωρήσωμεν τό A', ὅτε $A \cup A' = \Omega$ καί $AA' = \phi$· ἐντεῦθεν, δυνάμει καί τοῦ ἀξιώματος 3), $P(A \cup A') = P(A) + P(A') = P(\Omega) = 1$.
Οὕτω $P(A) = 1 - P(A') \leq 1$, διότι, βάσει τοῦ ἀξιώματος 2), εἶναι $P(A') \geq 0$.

II. Ἔστωσαν A καί B δύο ἐνδεχόμενα. Τότε :

$$P(AB') = P(A) - P(AB)$$

Ἀπόδειξις: $A = AB \cup AB'$, $(AB) \cap (AB') = \emptyset$
Δυνάμει τοῦ ἀξιώματος 3) ἔχομεν:

$$P(A) = P(AB \cup AB') = P(AB) + P(AB') \text{ ἄρα } P(AB') = P(A) - P(AB).$$

III. *Προσθετικόν θεώρημα τῶν πιθανοτήτων* : Διά δύο ἐνδεχόμενα A, B ἰσχύει :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Ἀπόδειξις: $A \cup B = A \cup A'B$ καί $A \cap (A'B) = \phi$. Ἐκ τοῦ ἀξιώματος 3) προκύπτει:

$$P(A \cup B) = P(A \cup A'B) = P(A) + P(A'B)$$

Ἐκ τῆς ἰδιότητος II εἶναι $P(A'B) = P(B) - P(AB)$ ἄρα ἔχομεν

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Πόρισμα: $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ (ὑποπροσθετική ἰδιότης τῆς P).
Γενικῶς ἰσχύει ἡ οὕτω καλουμένη ***ἀνισότης τοῦ Boole*** : Διά ν οἱαδήποτε ἐνδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_\eta$ ἔχομεν

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\eta) \leq P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_\eta)$$

Ἀπόδειξις: Ἐπαγωγικῶς: Ὑποθέτομεν ὅτι ἰσχύει διά k καί θά ἀποδείξωμεν αὐτήν διά $k+1$. $P(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cup A_{k+1}) \leq P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) + P(A_{k+1})$ καί λόγῳ τῆς ὑποθέσεως εἶναι:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$

ἄρα
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} P(A_i) + P(A_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i)$$

I. $P(A') = 1 - P(A)$.

Ἀπόδειξις: $A \cup A' = \Omega$, $P(A \cup A') = P(A) + P(A') = 1$

Ἄρα $$P(A) = 1 - P(A')$$

Παραδείγματα: Ἐφαρμογαὶ τῶν ὡς ἄνω προτάσεων.

1. Ἐξ ἑκάστης δύο δεσμῶν παιγνιοχάρτων ἐξάγεται ἓν παιγνιόχαρτον. Μὲ A συμβολίζομεν τὸ ἐνδεχόμενον: Εἷς τουλάχιστον "ἄσσος καρρό", καὶ μὲ A_i τὸ γεγονὸς τῆς ἐμφανίσεως "ἄσσος καρρό" ἐκ τῆς i δέσμης $i = 1, 2$. Τότε τὸ ἐνδεχόμενον $A = A_1 \cup A_2$. Ἐκ τῆς προτάσεως III ἔχομεν

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2)$$

Ἀλλὰ $P(A_1) = \frac{1}{52}$ καὶ $P(A_2) = \frac{1}{52}$. Ἵνα εὕρωμεν τὴν $P(A_1 A_2)$ δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι ὑπάρχουν 52.52 δυνατὰ ζεύγη (διατεταγμένα) τῶν παιγνιοχάρτων, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ ἐξαχθοῦν ἀπὸ τὰς δύο δέσμας, ἐκ τῶν ὁποίων μόνον ἓν εἶναι εὐνοϊκὸν διὰ τὸ ἐνδεχόμενον $A_1 A_2$.

Ἄρα $P(A_1 A_2) = \frac{1}{52^2}$ καὶ ὡς ἐκ τούτου $P(A) = \frac{2}{52} - \frac{1}{52^2} = \frac{1}{26} - \frac{1}{52^2}$.

2. Ὡς εἰς τὸ παράδειγμα 1, ἄς θεωρήσωμεν τὸ ἐνδεχόμενον B, ἵνα οὐδεὶς "ἄσσος καρρό" ἐμφανισθῇ. Τότε τὸ B εἶναι τὸ ἀντίθετον ἐνδεχόμενον τοῦ A τοῦ παραδείγματος 1. Ἄρα ἔχομεν

$$P(B) = P(A') = 1 - P(A) = 1 - \left(\frac{1}{26} - \frac{1}{52^2}\right) \quad \text{ἤ} \quad P(B) = \frac{51 \cdot 51}{52 \cdot 52} = P(A_1')P(A_2')$$

(βλ. § 3.3 – 34).

3. Ἓν νόμισμα ρίπτεται τρεῖς φοράς. Μὲ A συμβολίζομεν τὸ ἐνδεχόμενον: Τὸ K (κορῶνα) ἐμφανίζεται τουλάχιστον μίαν φοράν. Τότε

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - P(\text{οὐδέν "κ"}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Τοῦτο ὑπολογίζεται καί ὡς ἑξῆς : P (ἕν τουλάχιστον "κ") = P (ἀκριβῶς 1 "κ") + P (ἀκριβῶς 2 "κ") + P (ἀκριβῶς 3 "κ") $= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$.

2.1. Δείγματα ἐκ πεπερασμένου πληθυσμοῦ

Ἄς θεωρήσωμεν ἕνα πληθυσμόν (σύνολον) ἐξ n διακεκριμένων ἀντικειμένων (στοιχείων) καί ὑποθέσωμεν ὅτι ἐξάγονται ν ἀντικείμενα, τό ἕν κατόπιν τοῦ ἄλλου, ἄνευ ἀντικαταστάσεως (*ἄνευ ἐπαναθέσεως*)· τότε τό πλῆθος τοιούτων ὑποσυνόλων ἐκ ν ἀντικειμένων καλουμένων *δειγμάτων μεγέθους* ν εἶναι ἴσον πρός τό πλῆθος $\binom{n}{\nu}$ τῶν συνδυασμῶν τῶν n ἀντικειμένων ἀνά ν. Τοῦτο εἶναι ἴσον πρός :

$$\binom{n}{\nu} = \frac{n(n-1)\dots(n-\nu+1)}{1\cdot 2 \quad (\nu-1)\nu} = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!}$$

Σημείωσις : Δέν ἐνδιαφέρει ἡ διάταξις (σειρά) καθ' ἥν τά ν ἀντικείμενα τοῦ δείγματος ἐξήχθησαν, δηλ. ποῖον ἐξῆλθεν πρῶτον, ποῖον δεύτερον κ.τ.λ. Ταῦτα εἶναι τά μή διατεταγμένα δείγματα. Ἐάν ὅμως μᾶς ἐνδιαφέρη ἡ διάταξις, τότε τό πλῆθος τῶν *διατεταγμένων δειγμάτων* μεγέθους ν εἶναι ἴσον πρός τό πλῆθος τῶν διατάξεων τῶν n ἀντικειμένων ἀνά ν, τό ὁποῖον συμβολίζεται διά τοῦ

$$(n)_\nu = n(n-1)\dots(n-\nu+1).$$

Παραδείγματα: 1) Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς μίαν κάλπην περιέχονται 10 λευκαί καί 5 μαῦραι σφαῖραι. Ἐξάγομεν τυχαίως δύο σφαίρας. Ποία ἡ πιθανότης ἵνα ἀμφότεραι αἱ σφαῖραι εἶναι λευκαί (ἐνδεχόμενον A) ;

Ὑπάρχουν $\binom{15}{2}$ τρόποι (μή διατετάγμενα ζεύγη) ἐξαγωγῆς δύο σφαιρῶν ἐκ τῶν 15, ἐνῶ ὑπάρχουν $\binom{10}{2}$ ζεύγη λευκῶν σφαιρῶν. Ἄρα

$$P(A) = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{15}{2}} = \frac{\frac{10\cdot 9}{2}}{\frac{15\cdot 14}{2}} = \frac{3}{7}$$

Ἔστω B: Μία εἶναι λευκή καί μία μαύρη. Τότε ἔχομεν

$$P(B) = \frac{\binom{10}{1}\binom{5}{1}}{\binom{15}{2}} = \frac{10\cdot 5\cdot 2}{15\cdot 14} = \frac{5}{7}$$

2) Ἐξάγομεν 5 παιγνιόχαρτα ἐκ τῶν 52. α) Ποία ἡ πιθανότης ἵνα καί οἱ τέσσαρες ἄσσοι ἐμφανισθοῦν (ἐνδεχόμενον A);

$$P(A) = \frac{\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}}$$

β) Ποία ἡ πιθανότης νά ἔχωμεν ἀκριβῶς 3 ἄσσους (ἐνδεχόμενον B);

$$P(B) = \frac{\binom{4}{3}\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}}$$

διότι εἰς ἕκαστον τῶν $\binom{4}{3}$ τρόπων ἐκλογῆς 3 ἄσσων ἐκ των 4 ἄσσων ἀντιστοιχοῦν $\binom{48}{2}$ τρόποι ἐκλογῆς δύο παιγνιοχάρτων μή "ἄσσων" ἐκ τῶν ὑπολοίπων 48 παιγνιοχάρτων.

Πρότασις 1. Ἄς θεωρήσωμεν ἕνα σύνολον n ἀντικειμένων $a_1, a_2, \ldots, a_n$ καί ὑποθέσωμεν ὅτι ἐξάγομεν τυχαίως ἀντικείμενα, τό ἕν κατόπιν τοῦ ἄλλου, ἄνευ ἐπαναθέσεως. Τότε ἡ P(ἵνα τό a_i ἐμφανισθῇ κατά τήν ν-οστήν ἐξαγωγήν) $= \frac{1}{n}$ δι' ὅλα τά $i = 1, 2, \ldots, n$ καί $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

Ἀπόδειξις: Ὑπάρχουν $(n)_\nu$ διατεταγμένα δείγματα μεγέθους ν. Τό ἐνδεχόμενον νά ἔχωμεν τό a_i ἀντικείμενον κατά τήν ν-οστήν ἐξαγωγήν δύναται νά πραγματοποιηθῇ κατά $(n-1)_{\nu-1} = (n-1)(n-2)\ldots(n-\nu+1)$ τρόπους, διότι διά τήν πρώτην ἐξαγωγήν ἔχομεν $(n-1)$ τρόπους ἐκλογῆς, διά τήν δευτέραν ἔχομεν $(n-2)$ ἐκλογάς κ.ο.κ. διά τήν ν-οστήν ἐξαγωγήν ἔχομεν μόνον ἕνα τρόπον ἐκλογῆς, τοῦ ἀντικειμένου a_i. Ἄρα, ἐπειδή ὅλα τά $(n)_\nu$ διατεταγμένα δείγματα ἔχουν τήν αὐτήν πιθανότητα (ἕνεκα τοῦ τυχαίου τῆς ἐκλογῆς), ἔχομεν:

$$P(\alpha_i \text{ ἐμφανίζεται κατά τήν } \nu\text{-οστήν ἐξαγωγήν}) = \frac{(n-1)\dots(n-\nu+1)}{(n)_\nu} =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-\nu+1)}{n(n-1)(n-2)\dots(n-\nu+1)} = \frac{1}{n}$$

Πρότασις 2. Ἄς θεωρήσωμεν ἕνα σύνολον n ἀντικειμένων $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ καί ὑποθέσωμεν ὅτι ἐξάγομεν τυχαίως ν ἀντικείμενα τό ἕν κατόπιν τοῦ ἄλλου ἄνευ ἐπαναθέσεως. Τότε ἡ P(ἵνα τό α_i περιέχεται εἰς τό δεῖγμα) $= \frac{\nu}{n}$.

Ἀπόδειξις: Ὑπάρχουν $\binom{n}{\nu}$ (μή διατεταγμένα) δείγματα μεγέθους ν καί $\binom{n-1}{\nu-1}$ τρόποι ἐκλογῆς δείγματος (ἤ δείγματα) μεγέθους ν περιέχοντος τό ἀντικείμενον α_i. Ἄρα

$$P(\alpha_i \text{ περιεχόμενον εἰς τό δεῖγμα}) = \frac{\binom{n-1}{\nu-1}}{\binom{n}{\nu}} = \frac{\nu}{n}$$

Ἑτέρα ἀπόδειξις:

$P(\alpha_i$ περιέχεται εἰς τό δεῖγμα$) = P(\alpha_i$ ἐμφανίζεται κατά μίαν οἱονδήποτε ἐξαγωγήν ἀπό 1 ἕως $\nu) = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_\nu)$ ὅπου A_k συμβολίζει τό ἐνδεχόμενον ἵνα τό ἀντικείμενον α_i ἐμφανισθῇ κατά τήν k-οστήν ἐξαγωγήν, $k = 1, 2, \dots, \nu$. Ἐπειδή τά ἐνδεχόμενα A_k εἶναι ἀσυμβίβαστα ἔχομεν, δυνάμει τοῦ ἀξιώματος 3,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_\nu) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_\nu) = \frac{\nu}{n},$$

διότι $P(A_i) = \frac{1}{n}$, βάσει τῆς προτάσεως 1.

2.2. Δειγματοληψία μετ' ἐπαναθέσεως

Εἰς τήν τυχαίαν δειγματοληψίαν μετ' ἐπαναθέσεως ἀντιστοιχοῦμεν τήν ἰδίαν πιθανότητα, δηλ. $n^{-\nu} = \frac{1}{n^\nu}$ εἰς ἕκαστον τῶν n^ν δειγμάτων. (Εἶναι τό αὐτό ὡς ἐάν θέτωμεν ν διακεκριμένας σφαίρας εἰς n κελλία (δοχεῖα), ὁπότε τοῦτο δύναται νά γίνῃ κατά n^ν τρόπους ἤ ἄλλως ὑπάρχουν n^ν διάφοροι κατανομαί.

Πρότασις 3. Ὅταν ἐξάγωμεν ν ἀντικείμενα ἐκ τῶν n μετ' ἐπαναθέσεως, τότε:

α) P(τό α_i ἐμφανίζεται κατά τήν ν-οστήν ἐξαγωγήν) $= \frac{1}{n}$, ὅπου $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

β) P(τό α_i θά περιέχηται εἰς ἕν δεῖγμα μεγέθους ν) $= 1 - P$(α_i μή ἐμφανισθῆ μέχρι τοῦ ν-οστοῦ σταδίου) $= 1 - \frac{(n-1)^\nu}{n^\nu} = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu$.

3.1 Δεσμευμένη (ὑπό συνθήκην) πιθανότης

Παράδειγμα 1ον: Ρίπτομεν κύβον μίαν φοράν. Ἔστωσαν τά ἐνδεχόμενα A: ἐμφανίζεται τό 2, B: ἐμφανίζεται ἄρτιον ἀποτέλεσμα.

Ἡ πιθανότης τοῦ A ὑπό τήν συνθήκην ὅτι ἐπραγματοποιήθη τό B λέγεται δεσμευμένη ἤ ὑπό συνθήκην πιθανότης τοῦ A δοθέντος τοῦ B καί παρίσταται διά $P(A|B)$. Ἔχομεν

$$P(A) = \frac{1}{6} \text{ (ἀπόλυτος πιθανότης)}.$$

Ἡ ἐμφάνισις τοῦ B περιορίζει τόν δειγματοχῶρον Ω εἰς τό $B = \{2, 4, 6\}$. Οὕτω

$$P(A|B) = \frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(B)} \text{ (Δεσμευμένη πιθανότης)}$$

Παράδειγμα 2ον: Σύρομεν ἕν παιγνιόχαρτον ἀπό μίαν δέσμην. Ἔστωσαν τά ἐνδεχόμενα

A : τό παιγνιόχαρτον εἶναι "Ρήγας"

B : τό παιγνιόχαρτον εἶναι "φιγούρα" (Σημειωτέον ὅτι "φιγούρα" εἶναι: "Ρήγας", "Ντάμα", "Βαλές").

Ἡ (μή δεσμευμένη) $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. Ἡ δεσμευμένη πιθανότης $P(A|B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, ἤτοι ἔχομεν

$$P(A|B) = \frac{\frac{4}{52}}{\frac{12}{52}} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Ὁρισμός: Ὑποθέσωμεν ὅτι A καί B εἶναι δύο οἱαδήποτε ἐνδεχόμενα καί $P(B) > 0$. Τότε ἡ ***δεσμευμένη πιθανότης τοῦ A ὅταν δίδεται τό B*** (ἤ δοθέντος ὅτι τό B συνέβη ἤ ὅτι θά συμβῆ), συμβολιζομένη διά τοῦ $P(A|B)$, ὁρίζεται ὑπό τῆς

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad (1)$$

Ὁμοίως, ἐάν $P(A)>0$, $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

Παράδειγμα: Εἰς μίαν οἰκογένειαν μέ δύο τέκνα ὑπάρχει ἕνα ἀγόρι (τουλάχιστον ἕνα ἀγόρι). Ποία ἡ πιθανότης ἵνα ἀμφότερα τά τέκνα εἶναι ἀγόρια;

Ἔστω $A\equiv$ ἀμφότερα εἶναι ἀγόρια

$B\equiv$ τουλάχιστον ἕν ἐκ τῶν τέκνων εἶναι ἀγόρι

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(\text{ἀκριβῶς 2 ἀγόρια})}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

καθότι $P(B)=1-P(\text{οὐδέν ἀγόρι})=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

3.2. Πολλαπλασιαστικός τύπος (νόμος τοῦ γινομένου ἤ νόμος τῶν συνθέτων) πιθανοτήτων

Ἔχομεν ἐξ ὁρισμοῦ, διά $P(B)>0$, $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ τό ὁποῖον δίδει

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A|B) \tag{2}$$

Ὁμοίως ἐάν $P(A)>0$, εὑρίσκομεν

$$P(AB)=P(A)P(B|A) \tag{3}$$

καί αἱ (2) καί (3) δίδουν τόν τύπον

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B) \tag{4}$$

ὁ ὁποῖος ἀναφέρεται καί ὡς ***πολλαπλασιαστικός τύπος*** τῶν πιθανοτήτων.

Ἐφαρμογή τοῦ (4): Θεωρήσωμεν δειγματοληψίαν, ἄνευ ἐπαναθέσεως, ἐξ ἑνός πληθυσμοῦ n ἀντικειμένων $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Ποία ἡ πιθανότης ἵνα τό ἀντικείμενον α_i ἐκλεγῇ κατά τήν δευτέραν ἐξαγωγήν (ἐνδεχόμενον A_ν); Διά τοῦ A_ν συμβολίζομεν τό ἐνδεχόμενον ἵνα τό α_i ἐκλεγῇ κατά τήν ν-οστήν ἐξαγωγήν ($\nu=1,2$). Ἔχομεν $A=A_1' A_2$

$$P(A)=P(A_1'A_2)=P(A_1')P(A_2|A_1')=\frac{n-1}{n}\ \frac{1}{n-1}=\frac{1}{n},$$

ὅπου $P(A_1')=P$ (τῆς μή ἐξαγωγῆς τοῦ a_i κατά τήν πρώτην ἐξαγωγήν) $=$
$=\frac{n-1}{n}$ καί $P(A_2|A_1')=\frac{1}{n-1}$

Δυνάμεθα νά γενικεύσωμεν τόν τύπον (2) εἰς περισσότερα τῶν δύο ἐνδεχόμενα δηλ. δι' οἱαδήποτε ν ἐνδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ ἔχομεν

$$P(A_1A_2\ldots A_\nu)=\prod_{j=1}^{\nu}P\left(A_j\Big|\bigcap_{i<j}A_i\right)P\left(\bigcap_{i<j}A_i\right)$$

3.3. Ἀνεξάρτητα ἐνδεχόμενα

Ἐάν συμβῆ νά ἔχωμεν $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=P(A)$, $(P(B)>0)$, ἤτοι ἐάν συμβαίνη ἡ δεσμευμένη πιθανότης τοῦ A ὅταν δίδεται τό B νά ἴση μέ τήν ἀδέσμευτον πιθανότητα τοῦ A, τότε λέγομεν ὅτι τό A εἶναι ***στατιστικῶς*** ἤ ***στοχαστικῶς ἀνεξάρτητον*** τοῦ B.

Παράδειγμα: P (τό ἐξαχθέν παιγνιόχαρτον εἶναι "ἄσσος" (A) | τό παιγνιόχαρτον εἶναι "σπαθί" (B)).

Τό ἐνδεχόμενον A εἶναι στοχαστικῶς ἀνεξάρτητον τοῦ B διότι

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{52}}{\frac{13}{52}}=\frac{1}{13}\quad \text{καί}\quad P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}.$$

Ἄς σημειωθῆ ὅτι, ὅταν $P(A|B)=P(A)$, τότε ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν ἐπίσης ὅτι : $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$ ὅθεν ἔχομεν ἐπίσης $P(B|A)=P(B)$. Διά τοῦτο ἡ συμμετρική (ὡς πρός A, B) σχέσις $P(AB)=P(A)P(B)$ χρησιμοποιεῖται ὡς ὁρισμός τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν δύο ἐνδεχομένων A καί B.

Ὁρισμός : Τά ἐνδεχόμενα A καί B καλοῦνται ***στατιστικῶς*** ἤ ***στοχαστικῶς ἀνεξάρτητα*** ἤ, ἁπλῶς ἀνεξάρτητα , ἐάν

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

Παράδειγμα: Ἄς θεωρήσωμεν οἰκογενείας τριῶν τέκνων. Ἔστωσαν τά ἐνδεχόμεθα

A : τέκνα ἀμφοτέρων τῶν φύλων

B : τό πολύ ἕν θῆλυ

Διά νά διαπιστώσωμεν κατά πόσον τά A καί B εἶναι στατιστικῶς ἀνεξάρτητα, πρέπει νά ἴδωμεν ἐάν : $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. Ἔχομεν

$$P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \quad P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad P(AB) = \frac{3}{8} \text{ (AB = ἀκριβῶς ἕν θῆλυ)}$$

Ἄρα $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, τό ὁποῖον δεικνύει ὅτι τά A καί B εἶναι ἀνεξάρτητα.

Σημείωσις: Ἐάν θεωρήσωμεν οἰκογενείας τεσσάρων τέκνων, τότε τά αὐτά ἐνδεχόμενα A καί B δέν εἶναι ἀνεξάρτητα. (Ἴδε Ἄσκ. 10)

Ὁρισμός: Ἄς θεωρήσωμεν περισσότερα τῶν δύο ἐνδεχόμενα, $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$. Τά ἐνδεχόμενα $A_1, \ldots, A_\nu$ καλοῦνται ***τελείως ἀνεξάρτητα*** ἐάν διά κάθε ὑποσύνολον $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}$, ὅπου $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq \nu$, $2 \leq r \leq \nu$, τῶν $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$, ἔχωμεν :

$$P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \ldots A_{i_r}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_r})$$

Ἑπομένως τά $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ πρέπει να εἶναι ἀνά δύο ἀνεξάρτητα, δηλ. $P(A_i \cdot A_j) = P(A_i) P(A_j)$ δι' ὅλα τά ζεύγη $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, \nu$, ἐπί πλέον ταῦτα πρέπει νά εἶναι ἀνεξάρτητα ἀνά τρία, ἤτοι : $P(A_i A_j A_k) = P(A_i) P(A_j) P(A_k)$ κ.ο.κ, καί τελικῶς πρέπει νά ἰσχύη ἡ σχέσις

$$P(A_1, A_2, \ldots, A_\nu) = P(A_1) P(A_2) \ldots P(A_\nu) \tag{5}$$

Ἑπομένως δέν εἶναι ἐν γένει ἀρκετή ἡ ἰσχύς τῆς σχέσεως (5) διά τήν τελείαν ἀνεξαρτησίαν τῶν $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$.

Παράδειγμα: (Παράδειγμα τριῶν ἐνδεχομένων A_1, A_2, A_3, τά ὁποῖα εἶναι ἀνεξάρτητα ἀνά δύο, ἀλλά δέν εἶναι ἀνεξάρτητα ἀνά τρία καί ἑπομένως δέν εἶναι τελείως ἀνεξάρτητα). Ἄς ρίψωμεν ἕνα κύβον δύο φοράς.

"Εστω A_1 = περιττόν ἀποτέλεσμα κατά τήν 1ην ρῖψιν

A_2 = περιττόν ἀποτέλεσμα κατά τήν 2αν ρῖψιν

A_3 = περιττόν ἄθροισμα τῶν δύο ἀποτελεσμάτων

Λύσις :

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$$

$$P(A_2A_3) = P(A_2)\cdot P(A_3) = \frac{1}{4}$$

$$P(A_1A_2A_3) = 0 \neq P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) = \frac{1}{8}$$

3.4. Ἀνεξάρτητα πειράματα

Ὁρισμός : "Εστωσαν $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_\nu$ πειράματα τύχης καί $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_\nu$ οἱ ἀντίστοιχοι δειγματικοί χῶροι. Λέγομεν ὅτι τά πειράματα εἶναι ἀνεξάρτητα (στατιστικῶς) ἐάν, δι' οἱαδήποτε ἐνδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ τοιαῦτα ὥστε τό ἐνδεχόμενον A_i σχετίζεται μόνον μέ τό Π_i, ἰσχύη ἡ σχέσις

$$P(A_1A_2\ldots A_\nu) = P(A_1)\cdot P(A_2)\ldots P(A_\nu).$$

Ἐάν εἰδικῶς τά πειράματα Π_i εἶναι ἐπαναλήψεις τοῦ ἰδίου πειράματος Π, τότε ὁμιλοῦμεν περί ἀνεξαρτήτων δοκιμῶν. Π.χ. ὅταν ρίπτωμεν ἕν νόμισμα πολλάς φοράς, ὅταν ρίπτωμεν ἕνα κύβον πολλάς φοράς κ.τ.λ. Οὕτως, ἐάν ρίψωμεν ἕν νόμισμα ν φοράς καί $P(K) = \frac{1}{2}$, P [νά ἔχωμεν ν φοράς K] $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \ldots \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^\nu}$.

Ἐάν ἐκλέξωμεν ἕν παιγνιόχαρτον ἀπό ἑκάστην ἐκ δύο δεσμῶν παιγνιοχάρτων, τότε P (2 "ἄσσους καρρό") = P (εἷς "ἄσσος καρρό" ἀπό τήν πρώτην δέσμην) · P (εἷς "ἄσσος καρρό" ἀπό τήν δευτέραν δέσμην) $= \left(\frac{1}{52}\right)\cdot\left(\frac{1}{52}\right) = \left(\frac{1}{52}\right)^2$. (Βλέπε Παράδειγμα 2 τῆς § 1.5.).

3.5. Ἰδιότητές τινες τῶν δεσμευμένων πιθανοτήτων

i) $P(B|A) \geq 0$ διά κάθε B, $P(A|A) = 1$, $P(\bigcup B_\nu | A) = \sum_\nu P(B_\nu|A)$

ἐάν τά B_γ εἶναι ἀσυμβίβαστα.

ii) $P(\Omega|A) = 1$

iii) $P(\phi|A) = 0$

iv) Ἐάν $A \subset B$ (A ὑποσύνολον τοῦ B) τότε $P(B|A) = 1$

v) $P(A'|B) = 1 - P(A|B)$, ἀλλά $P(A|B') \neq 1 - P(A|B)$ καί

vi) $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(AB|C)$

(Προσθετικόν θεώρημα διά δεσμευμένας πιθανότητας)

Οὕτω ἐάν μέ P_A συμβολίσωμεν τήν δεσμευμένην πιθανότητα ὅταν δίδεται τό A, ἡ P_A ἱκανοποιεῖ ὅλα τά ἀξιώματα μιᾶς συναρτήσεως πιθανότητος (Βλέπε §1.4).

3.6. Διακριταί μεταβληταί

Ὁρισμός: Εἷς δειγματικός χῶρος καλεῖται ***ἀριθμήσιμος*** ἐάν οὗτος ἀποτελῆται ἀπό πεπερασμένον ἤ ἀριθμήσιμον πλῆθος στοιχειωδῶν ἐνδεχομένων (σημείων).

Παραδείγματα:

α) Ἡ ῥῖψις ἑνός νομίσματος τρεῖς φοράς: τό πλῆθος τῶν ἀποτελεσμάτων εἶναι $8 = 2^3$.

β) Ἡ ῥῖψις ἑνός νομίσματος ἕως ὅτου ἐμφανισθῇ κορώνα διά πρώτην φοράν. Ἐδῶ τό πλῆθος τῶν δοκιμῶν ἄρα καί τῶν ἀποτελεσμάτων ἐνδέχεται νά εἶναι ἄπειρον ἀλλά ἀριθμήσιμον.

Ὁρισμός: ***Τυχαία μεταβλητή*** ἤ ***στοχαστική μεταβλητή*** εἶναι μία συνάρτησις μέ πραγματικάς τιμάς ὁριζομένη ἐπί τοῦ δειγματικοῦ χώρου*. Αὕτη καλεῖται ***ἀπαριθμητή*** ἤ ***διακριτή*** (discrete) ἐάν λαμβάνῃ μόνον πεπε-

---

*Ἀκριβέστερον μία μετρήσιμος συνάρτησις X ἐπί τοῦ Ω. Ἡ X καλεῖται μετρήσιμος ἐάν διά κάθε c, $\{\omega : \omega \in \Omega, X(\omega) < c\}$ εἶναι ἕνα σύνολον τοῦ σώματος Borel ἐπί τοῦ Ω (Βλέπε ὑποσημείωσιν §1.4). Ἡ μετρησιμότης τοῦ X ἐξασφαλίζει τήν δυνατότητα ἀντιστοιχίσεως πιθανοτήτων εἰς κάθε ὑποσύνολον τῆς πραγματικῆς εὐθείας, τό ὁποῖον εἶναι ἀριθμήσιμος ἕνωσις ἤ τομή διαστημάτων (κλειστῶν, ἀνοικτῶν ἤ ἡμιανοικτῶν).

ρασμένον ἢ τὸ πολὺ ἀριθμήσιμον πλῆθος τιμῶν.

Παραδείγματα τυχαίων μεταβλητῶν

α) Ἡ ρῖψις ἑνὸς νομίσματος 5 φοράς. Διὰ τοῦ X συμβολίζομεν τὸ πλῆθος τοῦ σήματος Κ. Τότε τὸ X εἶναι μία τυχαία μεταβλητὴ λαμβάνουσα τὰς τιμὰς 0, 1, 2, 3, 4, 5.

β) Ἡ ρῖψις ἑνὸς νομίσματος ἕως ὅτου λάβωμεν Κ (κορώνα) διὰ πρώτην φοράν. Ἔστω ὅτι X συμβολίζει τὸν ἀριθμὸν τῶν δοκιμῶν αἱ ὁποῖαι χρειάζονται, ὁπότε $X = 1, 2, 3, \ldots$

3.7 Θεώρημα τῆς ὁλικῆς πιθανότητος

Ἔστω τὸ ἐνδεχόμενον A, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ συμβαίνῃ μόνον ἐν συνδυασμῷ μὲ ἓν οἱονδήποτε τῶν ν ἐνδεχομένων $B_1, B_2, \ldots, B_\nu$, τὰ ὁποῖα εἶναι ξένα μεταξύ των, ἤτοι $B_i B_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Τότε ἔχομεν τὸν καλούμενον *τύπον τῆς ὁλικῆς πιθανότητος*:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \ldots + P(B_\nu)P(A|B_\nu) \quad (6)$$

Ἀπόδειξις: Προφανῶς

$$A \subset B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_\nu ,$$

$$A = A \cap B = A(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_\nu) = AB_1 \cup AB_2 \cup \ldots \cup AB_\nu$$

ὅπου, ἐπειδὴ τὰ B_i εἶναι ξένα μεταξύ των θὰ εἶναι ξένα μεταξύ των καὶ τὰ AB_i. Ἄρα

$$P(A) = P(AB_1 \cup AB_2 \cup \ldots \cup AB_\nu) = P(AB_1) + P(AB_2) + \ldots + P(AB_\nu) \quad (7)$$

Ἀλλά: $P(AB_i) = P(B_i)P(A|B_i)$, $\quad i = 1, 2, \ldots, \nu$.

Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (7) προκύπτει ἡ (6).

Παράδειγμα: Μία κάλπη I περιέχει 5 λευκὰς καὶ 3 μαύρας σφαίρας καὶ μία ἄλλη κάλπη II περιέχει 3 λευκὰς καὶ 7 μαύρας σφαίρας. Ἐκλέγομεν τυχαίως μίαν κάλπην καὶ ἐκ ταύτης ἐξάγομεν μίαν σφαῖραν. Ποία ἡ πιθανότης, ἵνα ἡ σφαῖρα εἶναι λευκή;

"Εστω B_1 : τό γεγονός τῆς ἐκλογῆς τῆς κάλπης I

B_2 : τό γεγονός τῆς ἐκλογῆς τῆς κάλπης II

(Ἐδῶ τό ν τοῦ θεωρήματος εἶναι 2).

"Εστω A : ἡ ἐξαχθεῖσα σφαῖρα εἶναι λευκή.

$$P(A) \stackrel{\wedge}{=} P(B_1)\cdot P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) \quad \text{καί} \quad P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$$

$P(A|B_1) = P$ (ἡ ἐξαχθεῖσα σφαῖρα εἶναι λευκή, ὅταν δίδεται ὅτι αὐτή προέρχεται ἐκ τῆς κάλπης I) $= \frac{5}{8}$, ἡ $P(A|B_2) = \frac{3}{10}$. "Αρα

$$P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{8}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{37}{80}$$

3.8 Θεώρημα τοῦ Bayes

"Εστωσαν τά ἐνδεχόμενα $B_1, B_2, \ldots, B_\nu$ ὡς εἰς τό θεώρημα τῆς ὁλικῆς πιθανότητος.

Τότε ὁ τύπος (θεώρημα) τοῦ Bayes δίδεται ὑπό τῆς

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)\,P(A|B_i)}{P(B_1)\,P(A|B_1) + \ldots + P(B_\nu)\,P(A|B_\nu)} \qquad i = 1, 2, \ldots, \nu \qquad (8)$$

Ἡ $P(B_i)$ καλεῖται "a priori" ἤ "*ἐκ τῶν προτέρων*" πιθανότης τοῦ B_i, ἐνῶ ἡ $P(B_i|A)$ καλεῖται "a posteriori" ἤ "*ἐκ τῶν ὑστέρων*" πιθανότης τοῦ B_i.

Ἀπόδειξις : "Εχομεν

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}$$

"Οθεν καί ἀντικαθιστῶντες τό $P(A)$ ἐκ τοῦ θεωρήματος τῆς ὁλικῆς πιθανότητος λαμβάνομεν τήν (8)

Παράδειγμα: Ἐξ 100 δεμάτων βιομηχανικῶν ἀντικειμένων τά 75 δέματα περιέχουν 50 ἀντικείμενα ἕκαστον καί τά ὑπόλοιπα περιέχουν 60 ἀντικείμενα ἕκαστον. Τό ποσοστόν τῶν ἐλαττωματικῶν εἰς ἕκαστον τῶν 75 δεμάτων εἶναι 4% καί τό ποσοστόν τῶν ἐλαττωματικῶν εἰς ἕκαστον τῶν ὑπολοίπων δεμάτων εἶναι 5%. Ἐκλέγεται τυχαίως ἕν δέμα ἐκ τῶν 100 δεμάτων, καὶ ἐν συνεχείᾳ ἐκλέγεται ἕνα ἀντικείμενον ἐξ αὐτοῦ καὶ ἀφοῦ ἐλεγχθῇ εὑρίσκεται ὅτι εἶναι ἐλαττωματικόν. Ποία ἡ πιθανότης ἵνα τὸ ἐκλεγὲν ἀντικείμενον προήρχετο ἐκ τῶν 75 δεμάτων;

Λύσις: Ἔστω B_1 : τὸ ἐκλεγὲν δέμα εἶναι τοῦ πρώτου εἴδους (μὲ 4% ἐλαττωματικά).

B_2 : τὸ ἐκλεγὲν δέμα εἶναι τοῦ δευτέρου εἴδους (μὲ 5% ἐλαττωματικά).

A : ἐκλογὴ ἐλαττωματικοῦ ἀντικειμένου

Ζητεῖται : $P(B_1|A)$. Βάσει τοῦ θεωρήματος τοῦ Bayes ἔχομεν

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)}$$

$$P(B_1) = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} \qquad P(B_2) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$P(A|B_1) = P$ (ἓν ἀντικείμενον ἔκ τινος δέματος τοῦ πρώτου εἴδους εἶναι ἐλαττωματικόν) $= \frac{1}{25}$, $\quad P(A|B_2) = \frac{1}{20}$

Ἑπομένως :

$$P(B_1|A) = \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{25}}{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{25}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{20}}$$

/Α

Παράδειγμα :

(Τὰ αὐτὰ δεδομένα τοῦ προηγουμένου παραδείγματος) ... "Ἓν δέμα ἐξάγεται τυχαίως ἐκ τῶν 100 δεμάτων καὶ ἐν συνεχείᾳ ἐκλέγονται ἐξ αὐτοῦ δύο ἀντικείμενα τῶν ὁποίων τὸ ἓν εὑρίσκεται ἐλαττωματικόν. Ποία ἡ πιθανότης ἵνα τὸ ἐλαττωματικὸν ἀντικείμενον προέρχεται ἐκ τῶν 75 δεμάτων;

Λύσις :

$$P(A|B_1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{48}{1}}{\binom{50}{2}}, \quad P(A|B_2) = \frac{\binom{3}{1}\binom{57}{1}}{\binom{60}{2}}, \quad P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἀρτοποιεῖον παρασκευάζει 50 ἄρτους ἡμερησίως ἐκ τῶν ὁποίων 10 ἔχουν βάρος μικρότερον τοῦ κανονικοῦ. Εἰς ἀγορανομικὸν ἔλεγχον ὁ ἐλεγκτὴς ζυγίζει 5 ἄρτους τυχαίως λαμβανομένους ἐκ τῶν 50. Ποία ἡ πιθανότης ἵνα ἀνακαλυφθῇ λιποβαρὴς ἄρτος;

2. Κατὰ τὴν συνάντησιν 5 πολιτικῶν πόσαι δυναταὶ χειραψίαι ὑπάρχουν;

3. Τέσσαρες μαθηματικοὶ συμφωνοῦν νὰ συναντηθοῦν εἰς τὸ ξενοδοχεῖον Ἀκρόπολις τῶν Ἀθηνῶν. Συμβαίνει ὅμως νὰ ὑπάρχουν 4 ξενοδοχεῖα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὄνομα. Ποία ἡ πιθανότης ἵνα οὐδὲ δύο μαθηματικοὶ συναντηθοῦν εἰς τὸ αὐτὸ ξενοδοχεῖον;

4. Θεωροῦμεν δύο κάλπας. Ἡ 1η περιέχει 2 λευκὰ καὶ 4 ἐρυθρὰ σφαιρίδια. Ἡ 2α περιέχει 8 λευκὰ καὶ 6 ἐρυθρά. Ἐκλέγομεν τυχαίως ἀνὰ ἓν σφαιρίδιον ἐξ ἑκάστης κάλπης. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πιθανότης ἵνα
   i) ἐκλέξωμεν δύο λευκὰ σφαιρίδια
   ii) δύο σφαιρίδια τοῦ αὐτοῦ χρώματος
   iii) ἓν λευκὸν καὶ ἓν ἐρυθρὸν σφαιρίδιον.

5. Ὑποτεθείσθω ὅτι 3 "καμέναι" λυχνίαι ἀνακατεύονται μὲ μίαν καλὴν λυχνίαν καὶ ὅτι δοκιμάζομεν αὐτὰς μέχρις ὅτου εὕρωμεν τὴν καλήν. Ποία ἡ πιθανότης ἵνα ἡ καλὴ λυχνία εὑρεθῇ κατὰ τὴν ν-οστὴν δοκιμὴν διὰ $\nu = 1, 2, 3, 4$.

6. Κύβος ῥίπτεται μέχρις ὅτου ἐμφανισθῇ ἄσσος. Δεδομένου ὅτι ἄσσος δὲν παρετηρήθη μέχρι καὶ τῆς δευτέρας δοκιμῆς, ποία ἡ πιθανότης νὰ χρειασθοῦν τουλάχιστον τέσσαρες δοκιμαί;

7. Ἔστω ὅτι ἡ πιθανότης P_ν ἵνα μία οἰκογένεια ἔχῃ ἀκριβῶς ν τέκνα δίδεται ὑπό: $P_\nu = \alpha p^\nu$ διά $\nu \geqslant 1$ καί $P_o = 1 - \alpha p(1+p+p^2+\dots)$ διά $\nu=0$. Δείξατε ὅτι ἡ πιθανότης ἵνα ἡ οἰκογένεια ἔχῃ ἀκριβῶς k ἄρρενα τέκνα εἶναι $2\alpha p^k/(2-p)^{k+1}$.

8. Ἕξ διάφορα ζεύγη ὑποδημάτων εὑρίσκονται εἰς ἕν δωμάτιον. Τέσσαρα ὑποδήματα ἐκλέγονται τυχαίως. Ποία ἡ πιθανότης ἵνα ἐκλέξωμεν τουλάχιστον ἕν ζεῦγος;

9. Εἰς τό παιγνίδιον "bridge" ἕκαστος τῶν τεσσάρων παικτῶν Α, Β, Γ, Δ λαμβάνει δεκατρία παιγνιόχαρτα. Ζητεῖται ἡ πιθανότης ἵνα α) τουλάχιστον εἷς τῶν παικτῶν ἔχῃ ἕν οἱονδήποτε εἶδος. (Ὑπάρχουν τέσσαρα εἴδη: "Μπαστούνια, Καρρώ, Κοῦπες καί Σπαθιά"). β) ὁ Β ἔχῃ τουλάχιστον 2 "ἄσσους" δεδομένου ὅτι ὁ Α ἔχῃ ἕνα "ἄσσον".

10. Ἀποδείξατε ὅτι διά οἰκογένειαν τεσσάρων τέκνων τά ἐνδεχόμενα Α καί Β τοῦ δευτέρου παραδείγματος τῆς § 3.3 δέν εἶναι ἀνεξάρτητα.

11. Τρεῖς κατάδικοι Α, Β, Γ πληροφοροῦνται ὑπό τοῦ φρουροῦ ὅτι εἷς ἐξ αὐτῶν ἐκληρώθη πρός ἐκτέλεσιν, οἱ δέ ὑπόλοιποι δύο θά ἀφεθοῦν ἐλεύθεροι. Ὁ Α ζητᾶ ἀπό τόν φρουρόν νά τόν πληροφορήσῃ ποῖος τῶν Β καί Γ θά ἀφεθῇ ἐλεύθερος, ἀλλ' ὁ φρουρός ἀρνεῖται λέγων ὅτι ἐάν τοῦ ἀπαντήσῃ τότε ἡ πιθανότης ἐκτελέσεως του θά γίνῃ $\frac{1}{2}$. Εὐσταθεῖ τό ἐπιχείρημα τοῦ φρουροῦ καί διατί;

12. Ἡ πιθανότης ὀρθῆς διαγνώσεως τοῦ καρκίνου τῆς μήτρας διά τοῦ λεγομένου τέστ Παπανικολάου εἶναι 95%. Ποία ἡ πιθανότης ἵνα κυρία, ἡ ὁποία εὑρέθη πάσχουσα ἐκ τῆς ἀσθενείας πραγματι πάσχῃ ἐκ ταύτης, δεδομένου ὅτι τό ποσοστόν γυναικῶν, αἱ ὁποῖαι πάσχουν ἐκ καρκίνου τῆς μήτρας εἶναι 1/10.000;

Αἱ ἀσκήσεις 13-16 ἀφοροῦν πράξεις ἐπὶ τῶν συνόλων (ἐνδεχομένων)

13.* Δείξατε τούς λεγομένους κανόνας τοῦ De Morgan:

α) $(A \cup B)' = A'B'$ β) $(AB)' = A' \cup B'$

Γενικεύσατε τούτους διά ν σύνολα.

14. Παραστήσατε διά διαγραμμάτων Venn (ὡς ἐν § 1.3) τά κάτωθι ἐνδεχόμενα:

AB', $AB' \cup A'B$, $A'B'$, $(AB)'$, $A'B'\Gamma'$

Ἐπί πλέον εὕρετε ἐκφράσεις (συναρτήσει τῶν πράξεων $\cup, \cap, '$) διά τά κάτωθι ἐνδεχόμενα:

α) ἀκριβῶς ἕν τῶν A, B, Γ συμβαίνει

β) ἀκριβῶς δύο τῶν A, B, Γ συμβαίνουν

γ) τουλάχιστον κ τῶν A, B, Γ συμβαίνουν διά $\kappa = 0, 1, 2, 3$

δ) Τό πολύ κ τῶν A, B, Γ συμβαίνουν διά $\kappa = 0, 1, 2, 3$.

15. Ἁπλοποιήσατε τάς παραστάσεις

$(A \cup B)(A \cup \Gamma)$, $(A \cup B)(A' \cup B)$

16. Ἔστω ὁ δειγματοχῶρος $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ καί τά ἑξῆς ἐνδεχόμενα

$A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $\Gamma = \{4, 5, 6, 7\}$

Ὁρίσατε τά στοιχεῖα ἑκάστου τῶν ἐνδεχομένων

α) AB, β) $A'B'$, γ) $AB' \cup A'B$, δ) $A'B$, ε) $(A \cup B')'$, στ) $A' \cup B'$

ζ) $A'B'\Gamma'$ η) $(A \cup B \cup \Gamma)'$

Ὑποτιθεμένου ὅτι τά στοιχεῖα (ψηφία) τοῦ Ω εἶναι ἰσοπίθανα (τυχαῖα) εὕρετε τάς πιθανότητας τῶν ἐνδεχομένων α) ἕως η)

---

* Αἱ διά * σημειούμεναι ἀσκήσεις ἀποτελοῦν κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον συμπλήρωμα τῆς θεωρίας.

17.* Ἕνας πληθυσμός Π (σύνολον) N ἀντικειμένων δύναται νά διαιρεθῆ εἰς κ ὑποπληθυσμούς (ὑποσύνολα) $\Pi_1, \ldots, \Pi_k$, οὕτως ὥστε τό Π_1 νά περιέχῃ n_1 ἀντικείμενα, τό Π_2 νά περιέχῃ n_2 ἀντικείμενα, κ.ο.κ., τό Π_k νά περιέχῃ n_k ἀντικείμενα, κατά

$$\frac{N!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

τρόπους. (Ὑπόδειξις: Ἐκ τῶν N δύνανται νά ἐκλεγοῦν n_1 κατά $\binom{N}{n_1}$ τρόπους, ἐκ τῶν ὑπολοίπων $N-n_1$ δύνανται νά ἐκλεγοῦν n_2 κατά $\binom{N-n_1}{n_2}$ τρόπους κ.ο.κ)

18. Συνέχεια (ἐφαρμογή). Συνήθης δέσμη 52 παιγνιοχάρτων μοιράζεται εἰς 4 παίκτας (παιγνίδιον bridge), ἑκάστου παίκτου λαμβάνοντος 13 παιγνιόχαρτα. Ζητεῖται ἡ πιθανότης ἵνα α) ἕκαστος παίκτης ἔχῃ ἕνα "ἄσσον", β) ἀκριβῶς ἕνας παίκτης ἔχῃ πλήρη σειράν ("καρρά" ἤ "μπαστούνια" ἤ "σπαθιά" ἤ "κοῦπες").

19. N σφαιρίδια τοποθετοῦνται τυχαίως εἰς N κελλία. Ποία ἡ πιθανότης ἵνα οὐδέν κελλίον παραμείνῃ κενόν;

20. Ρίπτομεν τρία νομίσματα συγχρόνως καί ἐπαναλαμβάνομεν τοῦτο μίαν φοράν. Ποία ἡ πιθανότης ἵνα λάβωμεν τό αὐτό ἀποτέλεσμα ὅταν τά νομίσματα εἶναι (α) διακεκριμένα (β) ταυτόσημα;

21. Ποία ἡ πιθανότης ἵνα 12 πρόσωπα

α) ἔχουν ὅλα διαφορετικούς μῆνας γεννήσεως;

β) ἐγεννήθησαν τόν αὐτόν μῆνα;

(Ὑποθέσατε ὅτι οἱ 12 μῆνες εἶναι ἰσοπίθανοι).

22.* Δείξατε ὅτι διά τρία οἱαδήποτε ἐνδεχόμενα Α, Β, Γ ἰσχύει ἡ σχέσις

$$P(A\cup B\cup \Gamma) = P(A)+P(B)+P(\Gamma)-P(AB)-P(A\Gamma)-P(B\Gamma)+P(AB\Gamma)$$

Ὑπόδειξις: Χρησιμοποιήσατε τό Προσθετικόν θεώρημα § 1.5 ἤ διάγραμμα Venn.

23.* Συνέχεια. ***Θεώρημα τοῦ Poincaré.*** Διά ν ἐνδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$, ἡ πιθανότης ἵνα συμβῇ τουλάχιστον ἕν τούτων δίδεται ὑπό τῆς

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu) = S_1 - S_2 + S_3 - \ldots + (-1)^{\nu-1} S_\nu \qquad (1)$$

ὅπου ἐτέθη

$$S_k = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} P(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}) \;,\; \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset \{1, 2, \ldots, \nu\}$$

Ὑπόδειξις: Ὡς εἰς τήν 22.β), δείξατε ὅτι ἕν στοιχεῖον ω ἀνῆκον εἰς τήν $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu$ καί ἀνῆκον εἰς k ἀκριβῶς ἐνδεχόμενα (διά $k = 1, 2, \ldots, \nu$) λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν εἰς τό 2ον μέλος τῆς (1) μόνον μίαν φοράν. Παρατηρήσατε ὅτι ἡ $P(\omega)$ ἐμφανίζεται εἰς τό S_i $\binom{k}{i}$ φοράς.

24. Συνέχεια (ἐφαρμογή). ***Πρόβλημα τῶν rencontres (συναντήσεων)***: ν ἐπιστολαί τοποθετοῦνται τυχαίως εἰς ν φακέλλους. Ποία ἡ πιθανότης p_1, τουλάχιστον μία ἐπιστολή νά τοποθετηθῇ εἰς τόν ὀρθόν φάκελλον; Δείξατε ὅτι διά μεγάλα ν, τό $p_1 \longrightarrow 1 - e^{-1} = 0,63212$. Διά $\nu = 6$, $p_1 = 0,63196$, διά $\nu = 7$, $p_1 = 0,63214$.

25. Τῇ βοηθείᾳ τῆς (1) δείξατε ὅτι κατά τήν τυχαίαν τοποθέτησιν (ῥῖψιν) s σφαιριδίων εἰς k κελλία ἡ πιθανότης ἵνα τουλάχιστον ἕν κελλίον παραμείνῃ κενόν εἶναι

$$1 - \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} \left(1 - \frac{\nu}{k}\right)$$

26. Ἔμπροσθεν τοῦ ταμείου ἑνός θεάτρου ἀναμένουν 8 πρόσωπα ἐκ τῶν ὁποίων 4 ἔχουν μόνον εἰκοσάδραχμα καί 4 μόνον δεκάδραχμα. Τό εἰσιτήριον στοιχίζει 10 δρχ. τό δέ ταμεῖον ἀνοίγει χωρίς νά ἔχῃ καθόλου χρήματα. Ποία ἡ πιθανότης ἵνα τό ταμεῖον δυνηθῇ νά δώσῃ εἰσιτήρια εἰς τά 8 πρόσωπα διαθέτον πάντοτε τά ἀπαιτούμενα "ρέστα"; Ποία θά ἦτο ἡ πιθανότης ἐάν 5 πρόσωπα εἶχον "δεκάρικα" καί 3 "εἰκοσάρικα";

27. *Πρόβλημα τοῦ Chevalier de Meré.* Ποῖον εἶναι συμφερώτερον, νά στοιχηματίσῃ ἕνας παίκτης ὅτι θά φέρῃ τουλάχιστον ἕνα 6 ρίπτων 4 φοράς ἕνα κύβον ἤ ὅτι θά φέρῃ διπλοῦν 6 τουλάχιστον μίαν φοράν ρίπτων δύο κύβους συγχρόνως 24 φοράς;

28. *Πρόβλημα τῶν μεριδίων ("πόντων").* Εἰς ἑκάστην ἐπανάληψιν παιγνιδίου ἕκαστος τῶν δύο παικτῶν A, B ἔχει τήν αὐτήν πιθανότητα νά κερδίσῃ. Ὅποιος κερδίσει πρῶτος 3 παιγνίδια λαμβάνει τό κατατεθέν παρ' ἑκάστου ποσόν (στοίχημα). Ἐάν οἱ παῖκται ἀναγκασθοῦν νά διακόψουν τό παιγνίδι ὅταν ὁ A ἔχῃ δύο "πόντους" καί ὁ B ἕνα "πόντον", πῶς πρέπει νά μοιρασθοῦν τό στοίχημα; Ὁ Pascal ἀπήντησεν εἰς τόν ἐξ ἐπαγγέλματος παίκτην de Meré ὅτι τό ποσόν πρέπει νά μοιρασθῇ ὑπό ἀναλογίαν 3 πρός 1 ὑπέρ τοῦ A, δηλ. ἐάν ἕκαστος κατέθετεν α δρχ. ὁ A θά ἐκέρδιζε α/2 δρχ. Διατί;

Αἱ ἀσκήσεις 29 – 39 ἀφοροῦν δεσμευμένας πιθανότητας καί τήν ἀνεξαρτησίαν ἐνδεχομένων.

29. Ἐάν τά A καί B εἶναι ἀνεξάρτητα, δείξατε ὅτι θά εἶναι ἀνεξάρτητα καί τά ζεύγη: (A, B'), (A', B), (A', B').

30. Ἐάν τά A, B, Γ εἶναι τελείως ἀνεξάρτητα, δείξατε ὅτι καί τά κάτωθι ζεύγη εἶναι ἀνεξάρτητα: $(A, B\Gamma)$, $(B, A\Gamma)$, (Γ, AB).

31. Κύβος ρίπτεται μέχρις ὅτου ἐμφανισθῇ ἄσσος ἤ μέχρις ὅτου ρι-

φθῇ τρίς. Δοθέντος ὅτι ἄσσος δέν ἐνεφανίσθη εἰς τήν πρώτην ρίψιν, ποία ἡ πιθανότης νά ριφθῇ ὁ κύβος α) δίς, γ) τρίς;

32. Δύο ὁμάδες Α καί Β παίζουν εἰς μίαν σειράν ἀνεξαρτήτων καί τό πολύ 7 συναντήσεων μέχρις ὅτου ἡ μία ὁμάς κερδίση 4 παιγνίδια. Δεδομένου ὅτι ἡ πιθανότης νίκης ἑκάστης ὁμάδος εἶναι $\frac{1}{2}$ (ἰσοπαλίας ἀποκλειομένης) ποία ἡ πιθανότης α) νά χρειασθοῦν τό πολύ 6 παιγνίδια; β) νά χρειασθοῦν 6 παιγνίδια δεδομένου ὅτι ἡ Α ἐκέρδισε τά δύο πρῶτα;

33. Κατά τήν ἐξέτασιν ἑνός ἀσθενοῦς ὑπάρχει ἡ ὑποψία ὅτι οὗτος πάσχει ἀπό μίαν τῶν 3 ἀσθενειῶν A_1, A_2, A_3. Ὑποθέσωμεν ὅτι, ὑπό ὡρισμένας συνθήκας, τά 50% τοῦ πληθυσμοῦ πάσχουν ἐκ τῆς ἀσθενείας A_1, 25% ἐκ τῆς ἀσθενείας A_2 καί 25% ἐκ τῆς ἀσθενείας A_3. Διά καλυτέραν διάγνωσιν ὁ ἀσθενής ὑποβάλλεται εἰς ὡρισμένον "τέστ" τοῦ ὁποίου τό ἀποτέλεσμα εἶναι θετικόν μέ πιθανότητα 25% εἰς τήν περίπτωσιν τῆς A_1, 50% εἰς τήν τῆς A_2 καί μέ 90% εἰς τήν τῆς A_3. Τό τέστ ἐπαναλαμβάνεται 3 φοράς δίδον θετικόν ἀποτέλεσμα 2 φοράς καί μίαν φοράν ἀρνητικόν. Ποία ἡ πιθανότης ἑκάστης ἀσθενείας κατόπιν τοῦ τέστ;

34. Οἱ Α καί Β, σύνοικοι ἀφηρημένοι μαθηματικοί, λησμονοῦν τάς ὀμπρέλλας των ὅταν ἐπισκέπτωνται ἕνα κατάστημα ἕκαστος μέ πιθανότητα $\frac{1}{4}$, τήν δέ πρωΐαν ὁ Α ἐξερχόμενος πάντοτε παίρνει τήν ὀμπρέλλα του, ἐνῶ ὁ Β τήν λησμονεῖ μέ πιθανότητα $\frac{1}{3}$. Ἕκαστος ἐπισκέπτεται 3 καταστήματα καί ἐπιστρέφει σπίτι. Ποία ἡ πιθανότης ἵνα μετά τήν ἐπιστροφήν των α) ἔχουν καί τάς δύο ὀμπρέλλας; β) ἔχουν μόνον μίαν ὀμπρέλλαν; γ) δέν ἔχουν καμμίαν; δ) ὁ Β ἔχει χάσει τήν ὀμπρέλλαν του δεδομένου ὅτι ἔχουν μόνον μίαν;

35. Δείξατε ὅτι ἡ δεσμευμένη πιθανοσυνάρτησις $P(\cdot|A)$ πληροῖ καί τά τρία Ἀξιώματα τοῦ Kolmogorov, τά ὁποῖα πληροῖ ἡ $P(\cdot)$ (§ 1.4).

36. Οἱ ὑποψήφιοι Ἀνωτάτων Σχολῶν κρίνονται ὡς "ἱκανοί" ἤ "μή ἱκανοί" ἐπί τῇ βάσει εἰσιτηρίων ἐξετάσεων, εἰς τάς ὁποίας τό ποσοστόν ἐπιτυχίας ἐκ τῶν (πράγματι) ἱκανῶν εἶναι 80% ἐκ δέ τῶν μή ἱκανῶν 25%. Ὑποτιθεμένου ὅτι τό ποσοστόν τῶν ἱκανῶν ὑποψηφίων εἶναι 40%, νά εὑρεθῇ τό ποσοστόν τῶν ἱκανῶν φοιτητῶν τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν.

37. Ρίπτομεν κύβον τρεῖς φοράς. Νά εὑρεθοῦν αἱ δεσμευμέναι πιθανότητες ἵνα

α) φέρωμεν τρεῖς φοράς 6 δεδομένου ὅτι φέρομεν τουλάχιστον ἕνα 6

β) τό ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων εἶναι 10 δεδομένου τουλάχιστον δύο ἐνδείξεις εἶναι ἴσαι.

38. Δείξατε ὅτι ἐάν $P(A)>0$, $P(B)>0$ καί τά A, B εἶναι ἀσυμβίβαστα, τότε εἶναι καί (στοχαστικῶς) ἐξηρτημένα. Ἰσχύει τό ἀντίστροφον;

39. Δύο μέλη τριμελοῦς ὁρκωτοῦ δικαστηρίου ἐκλέγουν ὁ ἕνας ἀνεξαρτήτως τοῦ ἄλλου τήν ὀρθήν ἀπόφασιν μέ τήν αὐτήν πιθανότητα p ἐνῶ τό τρίτον μέλος ἀποφασίζει βάσει τοῦ ἀποτελέσματος "κορώνα" ἤ "γράμματα" τῆς ρίψεως ἑνός νομίσματος. Ἡ ἀπόφασις λαμβάνεται κατά πλειοψηφίαν. Ὁ δικαστής λαμβάνει ὀρθήν ἀπόφασιν μέ πιθανότητα p.
Ποῖος ἀποφασίζει ὀρθότερον, ὁ δικαστής ἤ τό ὁρκωτόν δικαστήριον;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΑΙ ΚΥΡΙΩΤΕΡΑΙ ΚΑΤΑΝΟΜΑΙ

4.1 Κατανομὴ ἀπαριθμητῆς τυχαίας μεταβλητῆς

Ἔστω X μία τυχαία μεταβλητὴ καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι αὕτη εἶναι ἀπαριθμητή, δηλ. λαμβάνει ἀριθμήσιμον πλῆθος τιμῶν, ἔστωσαν, x_1, $x_2, \ldots, x_\nu, \ldots$ Συνήθως αἱ τιμαὶ αὗται εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καὶ δὴ θετικοί. Διὰ τοῦ ὅρου "κατανομὴ τῆς X" ἐννοοῦμεν τὴν ἀντιστοιχίαν τῶν τιμῶν αὐτῆς x_i καὶ τῶν πιθανοτήτων

$$p_i = P\left[X = x_i\right],$$

μὲ τὰς ὁποίας ἡ X λαμβάνει ἑκάστην τῶν δυνατῶν τιμῶν αὐτῆς x_i. Ἡ συνάρτησις p_i, ἡ ὁποία δίδει δι' ἑκάστην τιμὴν x_i τῆς X τὴν ἀντίστοιχον πιθανότητα καλεῖται ***συνάρτησις πιθανότητος***. Εὐνόητον ὅτι

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

Ἕτερος τρόπος καθορισμοῦ τῆς κατανομῆς τῆς X εἶναι νὰ προσδιορίσωμεν τὴν καλουμένην ***ἀθροιστικὴν συνάρτησιν κατανομῆς*** ἢ ἁπλῶς ***συνάρτησιν κατανομῆς*** τῆς X, συμβολιζομένην συνήθως διὰ $F(t)$, καὶ ὁριζομένην ὡς ἀκολούθως:

Διὰ κάθε ἀριθμὸν t

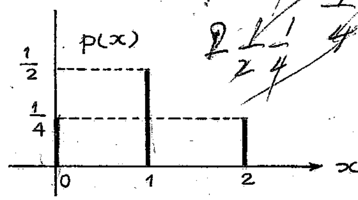
$$F(t) = P\left[X \leq t\right] = \sum_{x_i \leq t} p_i$$

Παράδειγμα: Ρίπτομεν ἓν νόμισμα δύο φοράς. Ἔστω X ὁ ἀριθμὸς τῶν "Κ" ("κορώνα"), ὁπότε τὸ X λαμβάνει μόνον τὰς τιμὰς 0, 1 καὶ 2. Ἡ συνάρτησις πιθανότητος (Σχ. 1) προσδιορίζεται διὰ τῶν πιθανοτήτων

$p_0 = P(X=0) = \frac{1}{4}$

$p_1 = P(X=1) = \frac{1}{2}$

$p_2 = P(X=2) = \frac{1}{4}$



Σχ. 1

$\binom{2}{0} =$

$\binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)$

'Η ἀθροιστική συνάρτησις κατανομῆς τῆς X (Σχ. 2) δίδεται ὑπό τῶν :

$F(t) = 0$ διά $t<0$

$F(0) = \frac{1}{4}$

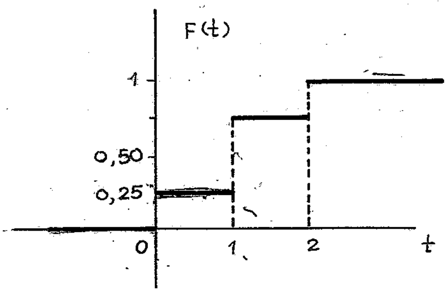
$F(t) = \frac{1}{4}$ διά $0 \leq t < 1$

$F(1) = \frac{3}{4}$

$F(t) = \frac{3}{4}$ διά $1 \leq t < 2$

$F(2) = 1$

$F(t) = 1$ διά $t \geq 2$.



Σχ. 2

Δέον νά σημειωθῆ ὅτι ἡ $F(t)$ εἶναι συνεχής παντοῦ ἐξαιρέσει τῶν σημείων $t=0,1,2$ ὅπου αὕτη "πηδᾶ" μέ πηδήματα μεγέθους $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ εἰς τά σημεῖα $0,1,2$, ἀντιστοίχως. Οὕτω ἡ F_X εἶναι ***κλιμακωτή συνάρτησις***. Τό αὐτό ἀληθεύει διά κάθε ἀπαριθμητήν τυχαίαν μεταβλητήν. Δύναται νά δειχθῆ ὅτι ἡ συνάρτησις κατανομῆς F δύναται νά ἔχῃ τό πολύ ἀριθμήσιμον πλῆθος "πηδημάτων" (ἀσυνεχειῶν). Τοῦτο προκύπτει ἐκ τοῦ ὅτι διά κάθε ἀκέραιον ν, τό πλῆθος τῶν πηδημάτων μεγέθους $\geq 1/\nu$ δέν ὑπερβαίνει τό ν, διά $\nu = 1,2,\ldots$ Ἄρα τό σύνολον τῶν "πηδημάτων" τῆς F, ὡς ἀριθμήσιμος ἕνωσις, τό πολύ, ἀριθμησίμων συνόλων εἶναι, τό πολύ, ἀριθμήσιμον σύνολον.

Ἰδιότητες συναρτήσεως κατανομῆς.

Ὁρισμός : Διά κάθε τυχαίαν μεταβλητήν $\underline{X}$ (ἀπαριθμητήν ἤ μή) ἡ ἀθροιστική συνάρτησις κατανομῆς (α.σ.κ) ἤ ἁπλῶς συνάρτησις κατανομῆς (σ.κ.) αὐτῆς, ἔστω, F ὁρίζεται διά κάθε πραγματικόν ἀριθμόν t ὑπό τῆς

$$F(t) = P[X \leq t].$$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου προκύπτουν αἱ ἑξῆς ἰδιότητες μιᾶς σ.κ. F :

α) $0 \leq F(t) \leq 1$ διά κάθε t,

β) $\underset{t\to\infty}{\text{όρ}}\, F(t) = F(\infty) = 1$

γ) $\underset{t\to-\infty}{\text{όρ}}\, F(t) = F(-\infty) = 0$

δ) ἡ F εἶναι μή φθίνουσα συνάρτησις, ἤτοι

$$F(t_1) \geq F(t_2) \quad \text{διά κάθε} \quad t_1 > t_2$$

ε) Ἡ F εἶναι συνεχής συνάρτησις (τουλάχιστον) ἐκ δεξιῶν, ἤτοι

$$F(t+) \equiv \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} F(t+\varepsilon) = F(t) \quad \text{διά κάθε } t$$

4.2 Αἱ πλέον εὔχρηστοι ἀπαριθμηταί κατανομαί

$p^{k}(p-1)^{k-1}$

Ι. Ὑπεργεωμετρική κατανομή.

Θεωρήσωμεν μίαν κάλπην περιέχουσαν Λ λευκάς σφαίρας καί Μ μαύρας. Ἐξάγομεν ν σφαίρας τυχαίως ***ἄνευ ἐπαναθέσεως***. Ἔστω Χ τό πλῆθος τῶν λευκῶν σφαιρῶν εἰς τό δεῖγμα τῶν ν. Τότε λέγομεν ὅτι τό Χ ἔχει τήν ὑπεργεωμετρικήν κατανομήν. Τό Χ δύναται νά λάβῃ τάς (ἀκεραίας) τιμάς κ, ὅπου κ ἱκανοποιεῖ τήν : $\max(0, \nu - M) \leq k \leq \min(\Lambda, \nu)$

Ἡ συνάρτησις πιθανότητος τῆς Χ δίδεται ὑπό τῆς

$$p_k = P[X = k] = \binom{\Lambda}{k}\binom{M}{\nu-k} \Big/ \binom{\Lambda+M}{\nu}$$

Παράδειγμα : Μία δέσμη 50 τεμαχίων βιομηχανικοῦ προϊόντος περιέχει 5 ἐλαττωματικά. Ἐκλέγομεν τυχαίως ἐκ τῆς δέσμης τρία τεμάχια.

α) Ποία ἡ πιθανότης ἵνα ὑπάρχῃ ἀκριβῶς ἕνα ἐλαττωματικόν τεμάχιον εἰς τό δεῖγμα ; β) Ποία ἡ πιθανότης p ἵνα τουλάχιστον ἕν τεμάχιον εἶναι ἐλαττωματικόν ;

Λύσις: α) Ἐάν θεωρήσωμεν τά ἐλαττωματικά ὡς λευκάς ~~μαύρας~~ σφαίρας, τότε ἔχομεν:

$$p_1 = P(\text{ἕν ἐλαττωματικόν}) = \frac{\binom{5}{1}\binom{45}{2}}{\binom{50}{3}} = \frac{99}{392}$$

β) Ἔχομεν

$$p = 1 - P(\text{οὐδέν ἐλαττωματικόν}) = 1 - \frac{\binom{45}{3}}{\binom{50}{3}} = \frac{541}{1960}$$

II. Διωνυμική Κατανομή

Ὁρισμός: Μία ἀκολουθία ἀνεξαρτήτων δοκιμῶν, εἰς ἑκάστην τῶν ὁποίων διακρίνομεν δύο ἀποτελέσματα (ἐνδεχόμενα) A καί A' μέ $P(A) = p$, καλεῖται *ἀκολουθία (ἀνεξαρτήτων) δοκιμῶν Bernoulli*. Τό A συνήθως ἀναφέρεται ὡς ἐπιτυχία (ε), ἐνῶ τό ἀντίθετον αὐτοῦ A' ὡς ἀποτυχία (α). Ἄς θεωρήσωμεν ν δοκιμάς Bernoulli καί ἔστω X ὁ ἀριθμός τῶν ἐπιτυχιῶν (ἤτοι ὁ ἀριθμός ἐμφανίσεων τοῦ ἐνδεχομένου A εἰς ν δοκιμάς). Τότε λέγομεν ὅτι ἡ X ἀκολουθεῖ τήν *διωνυμικήν κατανομήν* ἤ *κατανομήν τοῦ Bernoulli*. Προφανῶς ἡ X δύναται νά λάβῃ τάς τιμάς $0, 1, 2, \ldots, \nu$.

Ἔστω $b(\kappa, \nu, p) = P(\kappa$ ἐπιτυχιῶν εἰς ν δοκιμάς τοῦ Bernoulli μέ πιθανότητα ἐπιτυχίας $p)$

Θεώρημα: $b(\kappa, \nu, p) = \binom{\nu}{\kappa} p^{\kappa} (1-p)^{\nu-\kappa}$

Ἀπόδειξις: Ἕν τυπικόν στοιχεῖον τοῦ δειγματικοῦ χώρου, ὁ ὁποῖος παράγεται ὑπό τῶν ν δοκιμῶν, εἶναι μία ἀκολουθία ν γραμμάτων (ε καί α).

Ἡ πιθανότης ἵνα παρατηρήσωμεν μίαν τοιαύτην ἀκολουθίαν λ.χ. τήν $\varepsilon\alpha\alpha\varepsilon\varepsilon \ldots \varepsilon\alpha$ εἶναι $p(1-p)(1-p)pp \ldots p(1-p)$ διότι αἱ ν δοκιμαί εἶναι ἀνεξάρτητοι, καί ἐπομένως τά ἐνδεχόμενα ε καί α, τά ὁποῖα ἐμφανίζονται εἰς τυχοῦσαν ἀκολουθίαν, ὡς ἡ ἀνωτέρω, εἶναι ἀνεξάρτητα (ἴδε § 3.3). Ἐάν ὁ ἀριθμός τῶν ε εἰς μίαν ἀκολουθίαν ν δοκιμῶν εἶναι κ (ἄρα ν-κ εἶναι τά α) τότε ἡ πιθανότης μιᾶς τοιαύτης ἀκολουθίας εἶναι $p^{k}(1-p)^{\nu-k}$. Ὑπάρχουν ὅμως $\binom{\nu}{k}$ ἀκολουθίαι ν γραμμάτων τοιαῦται ὥστε νά περιέχουν κ ἐπιτυχίας (ε) καί ν-κ ἀποτυχίας (α). Ἐπειδή δέ ἑκάστη τῶν ἀκολουθιῶν τούτων ἔχει πιθανότητα $p^{k}(1-p)^{\nu-k}$, λαμβάνομεν

$$b(k,\nu,p)=\binom{\nu}{k}p^{k}(1-p)^{\nu-k} \qquad k=0,1,2,\ldots,\nu$$

Συνήθως γράφομεν $1-p=q$, οὕτως ὥστε

$$b(k,\nu,p)=\binom{\nu}{k}p^{k}q^{\nu-k}$$

Παραδείγματα: α) Ρίπτομεν ἕν νόμισμα 10 φοράς. Ποία ἡ πιθανότης νά ἐμφανισθῇ "κορώνα" 6 φοράς;

Ἔστω Κ: κορώνα ≡ ἐπιτυχία, Γ: Γράμματα ≡ ἀποτυχία καί $p=P(K)=\frac{1}{2}$. Ἄρα

$$b\left(6,10,\frac{1}{2}\right)=\binom{10}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{10-6}=\binom{10}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=0,2051$$

b) Ποία ἡ πιθανότης ἵνα εἰς μίαν οἰκογένειαν 5 τέκνων τά τρία εἶναι ἄρρενα; Ὑποθέτομεν ὅτι P(ἕν τέκνον εἶναι ἄρρεν) $=\frac{1}{2}$. Ἄρα $b\left(3,5,\frac{1}{2}\right)=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=0,3125.$

Παρατήρησις: Διά νά διαπιστώσωμεν ἐάν ἡ $b(k,\nu,p)$ εἶναι μία συνάρτησις πιθανότητος πρέπει νά ἴδωμεν κατά πόσον

$$\sum_{k=0}^{\nu} b(k,\nu,p)=1$$

Πράγματι, $\sum_{k=0}^{\nu} b(k,\nu,p)=\sum_{k=0}^{n}\binom{\nu}{k}p^{k}q^{n-k}=(p+q)^{\nu}=1$, τό ὁποῖον προκύπτει ἐκ τοῦ τύπου τοῦ ***διωνύμου τοῦ Νεύτωνος*** (ἐξ οὗ καί ὁ ὅρος διωνυμική):

$$(\alpha+\beta)^{\nu}=\alpha^{\nu}+\binom{\nu}{1}\alpha^{\nu-1}\beta+\ldots+\binom{\nu}{\nu-1}\alpha\beta^{\nu-1}+\beta^{\nu}$$

Ἡ α.σ.κ. τῆς διωνυμικῆς, ἤτοι, τά ἀθροίσματα: $\sum_{k=0}^{s} b(k,\nu,p)=$ $=\sum_{k=0}^{s}\binom{\nu}{k}p^{k}q^{\nu-k}$ ἔχουν πινακοποιηθῆ δι' ἀρκετάς τιμάς τῶν p καὶ ν καὶ δι᾽ ὅλα τὰ $\nu = 0, 1, \ldots, \nu$. (Μερικὰ $b(\kappa, \nu, p)$ δίδονται εἰς τὸν Πίνακα 1).

Παρατήρησις: Ὑποθέτομεν ὅτι ἐξάγομεν τυχαίως καὶ ***μετ᾽ ἐπαναθέσεως*** ν σφαίρας ἐκ μιᾶς κάλπης περιεχούσης Λ λευκὰς καὶ M μαύρας σφαίρας. Τότε ἡ κατανομὴ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν λευκῶν σφαιρῶν εἰς τὸ δεῖγμα εἶναι ἡ διωνυμικὴ μὲ παραμέτρους ν καὶ $p = \frac{\Lambda}{\Lambda + M}$. Ἐὰν τὸ Λ εἶναι "ἀρκετὰ" μεγάλον (ἐν σχέσει πρὸς τὸ ν) καὶ ἐκλέγωμεν τὰς σφαίρας ἄνευ ἐπαναθέσεως, τότε ἡ προκύπτουσα ὑπεργεωμετρικὴ κατανομὴ δύναται νὰ προσεγγισθῇ ὑπὸ τῆς διωνυμικῆς μὲ παραμέτρους ν καὶ $p = \frac{\Lambda}{N}$, ὅπου $N = \Lambda + M$, ἤτοι διὰ $N \to \infty$ καὶ $\frac{\Lambda}{N} \to p$ ἡ

$\Lambda \to \infty$
$p \to 0$

$$p_\kappa = \frac{\binom{\Lambda}{\kappa}\binom{\nu}{\nu-\kappa}}{\binom{N}{\nu}}$$

τείνει εἰς τὴν

$$b(\kappa, \nu, p) = \binom{\nu}{\kappa} p^{\kappa} q^{\nu-\kappa}$$

Τοῦτο προκύπτει ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι ἐάν, τοῦ $N \to \infty$, τὸ $\frac{\Lambda}{N}$ παραμένῃ σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς p, τότε οὐσιαστικῶς δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ δειγματοληψία γίνεται μετ᾽ ἐπαναθέσεως.

Ὁρισμός: Εἰς μίαν δοκιμὴν τοῦ Bernoulli ἔστω X ἡ τυχαία μεταβλητή, ἡ ὁποία λαμβάνει τὴν τιμὴν 1 ὅταν ἐμφανισθῇ ε (ἐπιτυχία) καὶ τὴν τιμὴν 0 ὅταν ἐμφανισθῇ α (ἀποτυχία).

Ἡ X καλεῖται ***ἁπλῆ ἢ δίτιμος μεταβλητὴ τοῦ Bernoulli ἢ μηδὲν-ἕνα μεταβλητή.***

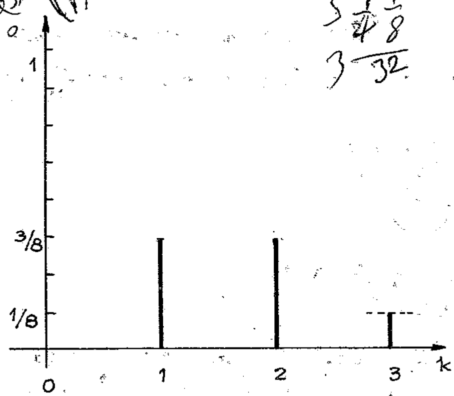
Ἔχομεν λοιπὸν τὴν συνάρτησιν πιθανότητος

$$P(X = 1) = p \quad , \quad P(X = 0) = q \, .$$

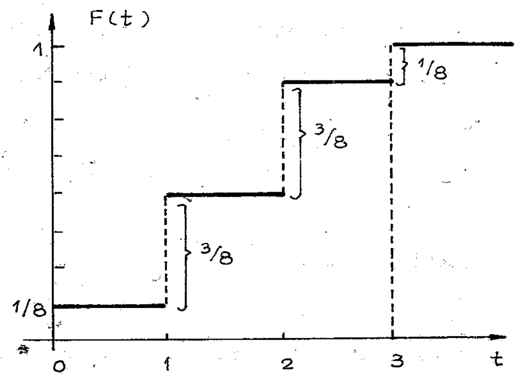
Ἐὰν μὲ X_i συμβολίσωμεν τὴν μεταβλητὴν τοῦ Bernoulli τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν i δοκιμήν, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ τότε ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐπιτυχιῶν, ἔστω κ, εἰς ν δοκιμάς, δηλ. ἡ διωνυμική μεταβλητή δύναται νά γραφῆ ὡς $k=\sum_{i=1}^{\nu} X_i$.

Παράδειγμα διωνυμικῆς συναρτήσεως πιθανότητος καί α.σ.κ. διά $\nu=3$ δοκιμάς καί $p=\frac{1}{2}$. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἡ συνάρτησις πιθανότητος ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου

$$b\left(k,3,\frac{1}{2}\right)=\binom{3}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^3 , \quad k=0,1,2,3 \quad (\Sigma\chi.1)$$



Σχ.1



Σχ.2. α.σ.κ. διωνυμικῆς μέ $\nu=3$, $p=\frac{1}{2}$

III. Γεωμετρική κατανομή.

Θεωρήσωμεν μίαν ἀκολουθίαν δοκιμῶν τοῦ Bournelli, ἡ ὁποία τερματίζεται ὅταν ἐπιτυχία ἐμφανισθῆ διά πρώτην φοράν. Ἔστω X ὁ ἀριθμός τῶν ἀπαιτουμένων δοκιμῶν. Τότε λέγομεν ὅτι ἡ X ἀκολουθεῖ τήν *γεωμετρικήν κατανομήν*. Τό X λαμβάνει κάθε θετικήν ἀκεραίαν τιμήν $1,2,3,\ldots$ ἔχομεν δέ

$$p_\nu = P(X=\nu) = q^{\nu-1}p , \quad \nu=1,2,\ldots$$

δεδομένου ὅτι αἱ πρῶται ν δοκιμαί πρέπει νά δώσουν ἀποτυχίαν ἡ δέ ν-οστή ἐπιτυχίαν. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ p_ν, $\nu=1,2,\ldots$ ὁρίζει συνάρτησιν πιθανότητος, ἱκανοποιοῦσα τήν

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu = 1$$

IV. Κατανομή τοῦ Pascal

Ἂς θεωρήσωμεν μίαν ἀκολουθίαν δοκιμῶν τοῦ Bernoulli, αἱ ὁποῖαι τερματίζονται ὅταν ἐμφανισθῇ ἡ ν-οστή ἐπιτυχία. Ἔστω X ὁ ἀριθμός τῶν δοκιμῶν, αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται πρός τοῦτο. Προφανῶς

$$X = \nu \quad , \quad \nu+1 \quad , \nu+2, \ldots$$

καί ἔχομεν

$P(X=k)$ = P (αἱ $k-1$ δοκιμαί δίδουν $\nu-1$ ἐπιτυχίας καί ἡ k δοκιμή δίδει ἐπιτυχίαν).
= P (αἱ πρῶται $k-1$ δοκιμαί δίδουν $\nu-1$ ἐπιτυχίας).
P (ἡ τελευταία δίδει ἐπιτυχίαν).

Ἑπομένως

$$P(X=k) = b(\nu-1, k-1, p)\cdot p = \binom{k-1}{\nu-1} p^{\nu-1} q^{k-\nu} p = \binom{k-1}{\nu-1} p^{\nu} q^{k-\nu} \qquad (1)$$

διά $k=\nu, \nu+1, \ldots$

Παρατήρησις: Ἡ μεταβλητή τοῦ Pascal (καλουμένη ἐπίσης ***ἀρνητική διωνυμική***) εἶναι τό ἄθροισμα ν (ἀνεξαρτήτων) γεωμετρικῶν μεταβλητῶν $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$, ὅπου X_i εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν δοκιμῶν μετά τήν $(i-1)$ ἐπιτυχίαν μέχρι τῆς i ἐπιτυχίας.

Πρέπει νά σημειωθῇ ὅτι

$$\sum_{k=\nu}^{\infty} p_k = \sum_{k=\nu}^{\infty} \binom{k-1}{\nu-1} p^{\nu}\cdot q^{k-\nu} = p^{\nu} \sum_{k=\nu}^{\infty} \binom{k-1}{\nu-1} q^{k-\nu} =$$

$$= p^{\nu}\left\{1 - \binom{\nu}{1} q + \binom{\nu+1}{2} q^2 - \binom{\nu+2}{3} q^3 + \ldots\right\} = p^{\nu}(1-q)^{-\nu} = 1$$

διότι κατά τό ἀνάπτυγμα τοῦ διωνύμου

$$(1-q)^{-\nu} = 1 - \nu(-q) + \frac{(-\nu)(-\nu-1)}{2!} q^2 + \frac{(-\nu)(-\nu-1)(-\nu-2)}{3!}(-q^3) + \ldots =$$

$$= 1 - \nu q + \frac{(\nu+1)\nu}{2!} q^2 - \frac{(\nu+2)(\nu+1)\nu}{3!} q^3 + \ldots = \sum_{k=\nu}^{\infty} \binom{k-1}{\nu-1} q^{k-\nu}$$

Σημείωσις: Διά $\nu>0$ ἡ κατανομή (1) λέγεται *ἀρνητική διωνυμική*, δυναμένη νά γραφῆ ὑπό τήν μορφήν

$$P[X=k] = \binom{-\nu}{k-\nu} p^{\nu}(-q)^{k-\nu}$$

ὅπου διά κάθε α καί n θετικόν ἀκέραιον

$$\binom{-\alpha}{n} = \frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\dots(-\alpha-n+1)}{n!}$$

V. *Κατανομή τοῦ Poisson*

Θεωρήσωμεν ἕν διάστημα χρόνου $(0,t)$ καί ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς ἕν μικρόν χρονικόν διάστημα Δt δύναται νά συμβαίνη μία ἐπιτυχία (ἕν ἐνδεχόμενον A) μέ πιθανότητα $\theta\Delta t$ καί μία ἀποτυχία (A') μέ πιθανότητα $1-\theta\Delta t$. Ἄρα κατά τήν διάρκειαν τοῦ χρόνου t ἡ πιθανότης ἵνα ἐμφανισθῆ k φοράς τό ἐνδεχόμενον A μέ $p=\theta\Delta t$ εἶναι ἡ διωνυμική $b(k,\nu,\theta\Delta t)$ ὅπου $\nu = \dfrac{t}{\Delta t}$.

Θά δείξωμεν ὅτι

$$\lim_{\Delta t\to 0} b(k,\nu,\theta\Delta t) = e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^k}{k!}, \quad k=0,1,2,\dots \qquad (1)$$

Ἀπόδειξις: Ἔχομεν

$$b(k,\nu,\theta\Delta t) = \frac{\nu(\nu-1)\dots(\nu-k+1)}{k!}(\theta\Delta t)^k(1-\theta\Delta t)^{\nu-k}$$

$$= \left(1-\frac{1}{\nu}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{\nu}\right)\frac{(\theta t)^k}{k!}\,\frac{\left(1-\frac{\theta t}{\nu}\right)^{\nu}}{\left(1-\frac{\theta t}{\nu}\right)^{k}}$$

Ἀλλά τοῦ $\Delta t\longrightarrow 0$, ὅτε τό $\nu\longrightarrow\infty$, ἔχομεν

$$\left(1-\frac{s}{\nu}\right)\longrightarrow 1 \qquad s=1,\dots,k-1$$

$$\left(1-\frac{\theta t}{\nu}\right)^{\nu}\longrightarrow e^{-\theta t}$$

$$\left(1-\frac{\theta t}{\nu}\right)^{k}\longrightarrow 1$$

Ὅθεν ἕπεται ἡ (1)

Σημείωσις: Ἡ $X(t)$ μέ συνάρτησιν πιθανότητος τήν (1) ἀποτελεῖ τό ἁπλούστερον ἴσως παράδειγμα μιᾶς ***στοχαστικῆς διαδικασίας*** ἤτοι μιᾶς οἰκογενείας $\{X(t), t \in T\}$ στοχαστικῶν μεταβλητῶν, ἐξαρτωμένων ἀπό μίαν παράμετρον t, συνήθως χρόνον.

Ὁρισμός: Ἡ κατανομή μέ συνάρτησιν πιθανότητος

$$P_k = P[X=k] = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}\,, \quad k=0,1,2,\ldots \qquad (2)$$

καλεῖται κατανομή Poisson μέ παράμετρον λ. (Διαφορά P_k δίδει ὁ Πίναξ 2).

Ὡς προκύπτει ἐκ τῆς (1), ὅταν τό $\nu \longrightarrow \infty$ καί τό $p = p(\nu) \longrightarrow 0$ οὕτως ὥστε

$$\nu p \longrightarrow \lambda > 0\,;$$

ὅπου τό λ ἔχει μετρίας τιμάς $(\lambda < 10)$*, τότε ἡ διωνυμική πιθανότης

$$b(k,\nu,p) \longrightarrow e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} = P_k\,, \qquad k=0,1,2,\ldots$$ (36ι

Παράδειγμα: Εἰς μίαν ἑταιρείαν μέ 500 ἐργαζομένους, ποία ἡ πιθανότης ἵνα (τουλάχιστον) ἕν πρόσωπον ἑορτάζῃ τά γενέθλιά του κατά τήν πρώτην τοῦ ἔτους (ἐνδεχόμενον A);

Ὑποθέτομεν ὅτι ὅλαι αἱ 365 ἡμέραι εἶναι ἐξ ἴσου πιθαναί ὡς γενέθλια.

Τότε $p = P[\text{ἕν πρόσωπον νά γεννηθῇ τήν πρώτην τοῦ ἔτους}] = \dfrac{1}{365}$

$$P(A) = 1 - P[\text{οὐδείς ἐργαζόμενος ἐγεννήθη τήν πρώτην τοῦ ἔτους}]$$

$$= 1 - b\left(0,\ 500,\ \frac{1}{365}\right) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{500} = 1 - 0,2537 = 0,7463$$

Προσεγγίζομεν τό $b\left(0,\ 500,\ \dfrac{1}{365}\right)$ διά τοῦ

---

* Ἄλλως ἡ διωνυμική καί ἡ ἀντίστοιχος Poisson τείνουν πρός τήν κανονικήν κατανομήν (ἴδε κεφ. VII κατωτέρω).

$$P_0 = e^{-\lambda} \quad \frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda} \quad \text{όπου } \lambda = \nu p = 500\left(\frac{1}{365}\right) = 1,37$$

Ὅθεν ·

$$P(A) \approx 1 - P_0 = 1 - e^{-1,37} = 1 - 0,2541 = 0,7459$$

μέ σφάλμα μόνον εἰς τό τέταρτον δεκαδικόν ψηφίον.

Φαινόμενά τινα τά ὁποῖα ἀκολουθοῦν τήν κατανομήν τοῦ Poisson

Τοιαῦτα εἶναι : α) Ὁ ἀριθμός τῶν σωματιδίων α, τά ὁποῖα ἐκπέμπονται ὑπό μιᾶς ραδιενεργοῦ οὐσίας, εἰς ὡρισμένην χρονικήν περίοδον (π.χ. ἕνα sec, 5 secs).

β) Ὁ ἀριθμός τῶν ἀτυχημάτων κατά τήν διάρκειαν μιᾶς χρονικῆς περιόδου (ἔστω, ἑνός ἔτους, ἑνός μηνός κ.λ.π) διά δεδομένην κοινωνίαν (πόλιν, χώραν κ.τ.λ.).

γ) Ὁ ἀριθμός τῶν βακτηριδίων, τά ὁποῖα παρατηροῦνται διά μικροσκοπίου ἐπί τετραγωνιδίου ὡρισμένου ἐμβαδοῦ μιᾶς πλακός Petri.

δ) Ὁ ἀριθμός τῶν τηλεφωνικῶν κλήσεων τῶν ἀφικνουμένων εἰς ἕνα τηλεφωνικόν κέντρον κατά τήν διάρκειαν μιᾶς χρονικῆς περιόδου.

ε) Ὁ ἀριθμός τῶν ἀφικνουμένων πελατῶν εἰς μίαν super market κατά τήν διάρκειαν μιᾶς χρονικῆς περιόδου, π.χ. μεταξύ 9-10 π.μ.

5.1 Ἡ ἔννοια τῆς πυκνότητος πιθανότητος καί τῆς συνεχοῦς κατανομῆς.

Ἔστω ἡ τυχαία μεταβλητή X, ἡ ὁποία λαμβάνει τιμάς εἰς ἕν διάστημα ἤ ἕνωσιν διαστημάτων. Τότε δέν εἶναι δυνατόν νά ἀντιστοιχίσωμεν, ὡς εἰς τήν περίπτωσιν τῆς ἀπαριθμητῆς μεταβλητῆς, ***θετικάς*** πιθανότητας εἰς ἑκάστην τιμήν τῆς X εἰς τό διάστημα ἤ διαστήματα, διότι ἔχομεν ἕν μή ἀριθμήσιμον σύνολον (μή ἀριθμήσιμον τό πλῆθος) δυνατῶν τιμῶν τῆς X (βλέπε 4.1). Ἀντί ὅμως τούτου ἀντιστοιχοῦμεν πιθανότητας εἰς μικρά (ἰδανικῶς ἀπειροστά) διαστήματα τιμῶν τῆς X, οὕτως ὥστε $P(X = c) = 0$ διά κάθε ἀριθμόν c καί $P(\lambda < X \le \lambda + \Delta\lambda) \approx f(\lambda).\Delta\lambda$ διά $\Delta\lambda$ "μικρόν".

Ἡ συνάρτησις $f(\lambda)$ καλεῖται ***πυκνότης πιθανότητος*** ἤ ***συνάρτησις πυκνότητος*** ἤ ***ἁπλῶς πυκνότης*** τῆς τυχαίας μεταβλητῆς X. Ἡ $f(\lambda)$ πρέπει νά ἱκανοποιῆ $f(\lambda) \geqslant 0$ δι' ὅλους τούς ἀριθμούς λ καί, κατ' ἀναλογίαν πρός τήν $\sum_i p_i = 1$ τῆς § 4.1,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\lambda = 1 \qquad (1)$$

Οὕτω τό $f(\lambda)d\lambda$, καλούμενον ***στοιχεῖον*** ἤ ***διαφορικόν πιθανότητος*** ἤ ***στοιχειώδης πιθανότης***, ἐκφράζει τήν $P(\lambda < X < \lambda + d\lambda)$.

Ἐπί πλέον προκύπτει ὅτι διά κάθε σημεῖον λ ὅπου ἡ f εἶναι συνεχής ἔχομεν

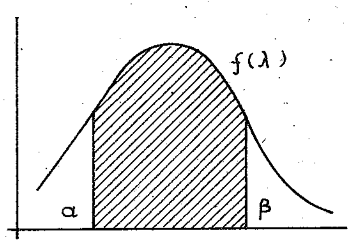
$$f(\lambda) = \lim_{\varepsilon \to 0} P(\lambda < X \le \lambda + \varepsilon)/\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(\lambda+\varepsilon) - F(\lambda)}{\varepsilon}$$

Οὕτω ἡ $f(\lambda)$ εἶναι ἡ παράγωγος τῆς σ.κ. $F(\lambda)$, δηλ. $f(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}F(\lambda)$. Ἡ (1) ἐπίσης συνεπάγεται ὅτι ἡ ***$F(\lambda)$ εἶναι παντοῦ συνεχής*** (καί ἔχει παράγωγον παντοῦ ἐξαιρέσει ἀριθμησίμου τό πολύ πλῆθος σημείων).

Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ὅτι ἡ X, ὡς καί ἡ κατανομή αὐτῆς, εἶναι ***"συνεχής"***.

Ἐπί πλέον ἔχομεν

$$P(\alpha < X \leqq \beta) = \int_\alpha^\beta f(\lambda)\, d\lambda$$



Σχ.1

Ἡ ἔκφρασις τῆς $P[\alpha < X \le \beta]$ ὡς ἐμβαδοῦ (Σχ.1) διά τοῦ ὁλοκληρώματος συνεπάγεται ὅτι

$$P[\alpha < X \le \beta] = P[\alpha \le X \le \beta] = P[\alpha < X < \beta] = P[\alpha \le X < \beta].$$

Τοῦτο προκύπτει ἐκ τοῦ ὅτι εἰς τά σημεῖα (πράγματι εἰς ὅλα τά σημεῖα) α καί β τοῦ διαστήματος ἡ πιθανότης εἶναι μηδέν. Τοῦτο, σημειωτέον δέν σημαίνει ὅτι τό ἐνδεχόμενον $[X = \alpha]$ εἶναι ἀδύνατον.

᾿Εξ ὁρισμοῦ τό ἀδύνατον γεγονός $\phi = \Omega$ ἔχει πιθανότητα μηδέν ἀλλά δέν ἰσχύει τό ἀντίστροφον, ἤτοι ἐάν $P(A)=0$ τοῦτο σημαίνει ὅτι τό A εἶναι λίαν ἀπίθανον νά συμβῆ ἀλλ' ὄχι ἀπραγματοποίητον.

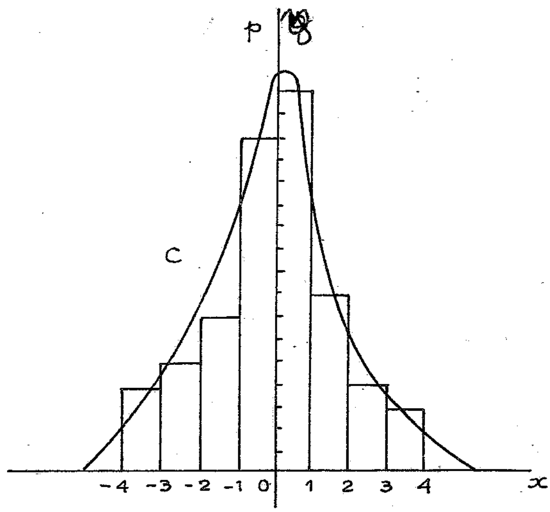
Παράδειγμα: Κατά τήν κροῦσιν ἑνός στόχου ὑπό τινος πυροβόλου ὅπλου ρίπτοντος 63 φοράς, ἐλήφθησαν τά δεδομένα τοῦ κατωτέρω πίνακος ὅπου X σημαίνει τήν ὁριζοντίαν ἀπόκλισιν τοῦ σημείου κρούσεως ὑπό τοῦ κέντρου τοῦ στόχου. ᾿Εν συνεχείᾳ ἐκ τῶν συχνοτήτων τοῦ Πίνακος 1 κατεσκευάσθη τό κατωτέρω διάγραμμα (ἱστόγραμμα σχετικῶν συχνοτήτων (Σχ. 2)

Πίναξ 1

᾿Απόκλισις	Συχνότης (f) ἀποκλίσεων	Σχετική Συχνότης (p)
$-4 < X \leq -3$	4	4/63
$-3 < X \leq -2$	5	5/63
$-2 < X \leq -1$	7	7/63
$-1 < X \leq 0$	15	15/63
$0 < X \leq 1$	17	17/63
$1 < X \leq 2$	8	8/63
$2 < X \leq 3$	4	4/63
$3 < X \leq 4$	3	3/63

Διάγραμμα - ῾Ιστόγραμμα

῞Εκαστον ὀρθογώνιον τοῦ διαγράμματος ἔχει ἐμβαδόν κατά προσέγγισιν ἴσον πρός τήν πιθανότητα τῆς X νά εἶναι εἰς τό ἀντίστοιχον διάστημα, τό ὁποῖον εἶναι ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου (τό ὕψος ἑκάστου ὀρθογωνίου ἐλήφθη ἴσον πρός τήν ἀντίστοιχον σχετικήν συχνότητα).



Σx. 2

Ἂν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ διαστήματα γίνονται ὁλονὲν μικρότερα ἐνῶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ῥίψεων κατὰ τοῦ στόχου αὐξάνει, τότε ἡ τεθλασμένη ἡ ἀποτελουμένη ἐκ τῶν ἀνωτέρω πλευρῶν τῶν ὀρθογωνίων θὰ τείνῃ, ἐν γένει, εἰς κάποιαν ὁμαλὴν καμπύλην, ἔστω C.

Ἡ καμπύλη αὐτὴ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἰδανικὴν καμπύλην πυκνότητος πιθανότητος $y = f(x)$ τῶν ἀποκλίσεων X. Ἡ πιθανότης ἵνα ἡ X κεῖται μεταξὺ δύο σημείων α καὶ β θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἐμβαδὸν τὸ περικλειόμενον ὑπὸ τῆς καμπύλης, τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τῶν εὐθειῶν $y=\alpha$, $y=\beta$.

Ἐπὶ πλέον, τὸ ὁλικὸν ἐμβαδὸν ὑπὸ τὴν καμπύλην καὶ ἄνωθεν τοῦ ἄξονος τῶν x θὰ ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα.

Ὁρισμός: *Συνάρτησις πυκνότητος πιθανότητος* (σ.π.π). *Συνεχὴς κατανομή.* Τυχαία μεταβλητὴ X, ὡς καὶ ἡ κατανομὴ αὐτῆς, λέγεται συνεχὴς ἐὰν ὑπάρχῃ συνάρτησις $f(x) \geq 0$, καλουμένη συνάρτησις πυκνότητος (πιθανότητος) ἢ ἁπλῶς πυκνότης τοιαύτη ὥστε ἡ σ.κ. F τῆς X διὰ κάθε ἀριθμὸν λ νὰ δίδεται ὑπὸ τῆς

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} f(x)\,dx \qquad (2)$$

Τοῦτο ἰσοδυναμεῖ μέ τό ὅτι

$$f(x) \geq 0 \quad \text{διά κάθε } x$$

καί ἡ f εἶναι ὁλοκληρώσιμος εἰς $(-\infty, \infty)$ καί πληροῖ τήν

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

Παράδειγμα: $f(x) = 1$ ἐάν $0 \leq x \leq 1$

$f(x) = 0$ διά x ἐκτός τοῦ ὡς ἄνω διαστήματος

Αὕτη εἶναι συνάρτησις πυκνότητος πιθανότητος διότι $f(x) \geq 0$ καί

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1$$

Ἡ ἔννοια τῆς πυκνότητος πιθανότητος εἶναι ἀνάλογος τῆς ἐννοίας τῆς πυκνότητος (μάζης) εἰς τήν φυσικήν, δηλ.

$$\lim_{\text{ὄγκος} \to 0} \frac{\text{μᾶζα εἰς μίαν „μικράν" περιοχήν πέριξ τοῦ } A}{\text{ὄγκος τῆς περιοχῆς}} = f(A).$$

ὅτε ἡ μᾶζα $m(R)$ εἰς μίαν περιοχήν R δίδεται ὑπό τῆς

$$m(R) = \int_R (\text{συνάρτησις πυκνότητος})\,dV = \int_R f(R)\,dV$$

ὅπου dV εἶναι ὁ στοιχειώδης ὄγκος.

Ὁμοίως ἡ συνάρτησις πυκνότητος πιθανότητος $f(x)$ εἰς ἕν σημεῖον x τῆς πραγματικῆς εὐθείας δύναται νά γραφῇ:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{πιθανότης εἰς τό διάστημα } (x, x+\Delta x)}{\Delta x}$$

ἡ δέ πιθανότης $P\left[X \in A\right]$ δίδεται ὡς

$$\int_A f(x)\,dx.$$

Ἡ σ.π.π. ὅμως εἶναι ***κανονικοποιημένη*** (normalized) συνάρτησις πυκνότητος μάζης (πιθανότητος) ὑπό τήν ἔννοιαν ὅτι πληροῖ τήν (1).

Ὅπως καί εἰς τήν φυσικήν, ὅταν ἡ πυκνότης εἶναι σταθερά (ἤτοι ἡ ἴδία εἰς ὅλα τά σημεῖα) καλεῖται *ὁμοιόμορφος* ἤ *ὁμαλή*· οὕτω μία σ.π.π $f(x)$ καλεῖται ὁμοιόμορφος ἐπί ἑνός συνόλου A ἐάν $f(x)=c$ διά $x \in A$ καί $f(x)=0$ ἐάν $x \notin A$.

Ἐπειδή μία συνάρτησις πυκνότητος πιθανότητος πρέπει νά ἱκανοποιῇ τήν (1) λαμβάνομεν

$$c\int_A dx = 1$$

Ἀλλά

$\int_A dx = \mu(A)$ ὅπου $\mu(A)$ παριστᾶ τό μέτρον τοῦ A (μῆκος ἐάν A εἶναι ὑποσύνολον τῆς εὐθείας, ἐμβαδόν ἐάν A εἶναι ὑποσύνολον ἑνός ἐπιπέδου, ὄγκος ἐάν A εἶναι ἕν ὑποσύνολον τοῦ χώρου τῶν τριῶν διαστάσεων κ.τ.λ.).

Ὅθεν ἕπεται ὅτι

$$c = \frac{1}{\mu(A)}, \quad \text{ἤτοι} \quad f(x) = \frac{1}{\mu(A)} \quad \text{διά } x \in A$$
$$= 0 \qquad \text{διά } x \notin A.$$

Οὕτω ὁρίζεται μία ὁμοιόμορφος κατανομή ἐπί ἑνός συνόλου A, τό ὁποῖον δύναται νά εἶναι οἱονδήποτε *φραγμένον* ὑποσύνολον τοῦ Εὐκλειδείου χώρου αὐθαιρέτων διαστάσεων.

5.2 Μερικαί συνεχεῖς κατανομαί

I. *Ὁμοιόμορφος κατανομή*

Ὁρισμός: Ἡ X ἔχει τήν (μονοδιάστατον) *ὁμοιόμορφον κατανομήν* εἰς τό διάστημα (α,β) ἐάν ἡ σ.π.π. τῆς X δίδεται ὑπό τῆς

$$f(x) = \frac{1}{\beta-\alpha}, \qquad \alpha < x < \beta$$
$$= 0 \qquad x > \beta \text{ ἤ } x < \alpha$$

Ἡ κατανομή καλεῖται ἐπίσης *ὀρθογώνιος* ἕνεκα τοῦ σχήματος (Σχ.1) τῆς πυκνότητος

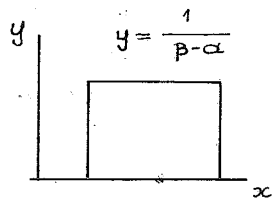
$$y = \frac{1}{\beta-\alpha}.$$

Ἡ α.σ.κ. τῆς Χ εἶναι

$$F(t) = 0 \quad \text{ἐάν} \quad t \leq \alpha,$$

$$F(t) = \frac{t-\alpha}{\beta-\alpha} \quad \text{ἐάν} \quad 0 \leq t \leq \beta$$

$$F(t) = 1 \quad \text{ἐάν} \quad t \geq \beta$$

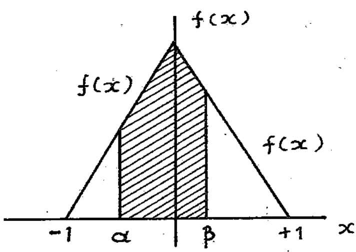


Σχ. 1

II. Τριγωνική κατανομή

Αὕτη (Σχ. 2) ἔχει πυκνότητα

$$f(x) = 1-|x| \qquad -1<x<1$$



Σχ. 2

Τότε ἡ.

$P[\alpha<x<\beta]$ = τὸ γραμμοσκιασμένον ἐμβαδόν

III. Ἐκθετική κατανομή

Ὁρισμός: Μία τυχαία μεταβλητή Χ ἔχει τήν ἐκθετικήν (ἢ ἀρνητικήν ἐκθετικήν) κατανομήν ἐάν ἡ σ.π.π αὐτῆς εἶναι τῆς μορφῆς

$$f(x) = \theta e^{-\theta x} \quad x>0 \qquad (\theta>0 \text{ μία παράμετρος}) \quad (1)$$

Ἡ ἀθροιστική συνάρτησις κατανομῆς αὐτῆς εἶναι

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx = \int_0^t e^{-\theta x}dx = \left[-e^{-\theta t}\right]_0^t = 1-e^{-\theta t} \quad ,t>0 \quad (2)$$

Ἔχομεν ἀποδείξει (βλέπε κατανομήν τοῦ Poisson) ὅτι, ἐάν εἰς ἕνα μικρόν χρονικόν διάστημα Δt τό πολύ ἕν γεγονός δύναται νά συμβαίνη, τότε εἰς μίαν χρονικήν περίοδον t ἡ πιθανότης ἵνα k γεγονότα συμβοῦν εἶναι ἡ κατανομή τοῦ Poisson

$$P_k(t) = e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^k}{k!},$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι διά $k=0$ ἡ πιθανότης ἵνα εἰς διάστημα χρόνου t οὐδέν γεγονός συμβῇ εἶναι $e^{-\theta t}$. Ἄρα ἐάν T συμβολίζῃ τόν χρόνον (ἀναμονῆς) μέχρις ὅτου συμβῇ ἕν γεγονός, τότε

$$P(T>t)=e^{-\theta t} \quad \text{καί} \quad P(T\leq t)=1-e^{-\theta t},$$

ἤτοι ἡ α.σ.κ. τῆς T εἶναι ἡ ἐκθετική (2) μέ πυκνότητα τήν (1).

IV. *Κανονική κατανομή*

Ὁρισμός: Λέγομεν ὅτι μία τυχαία μεταβλητή ἀκολουθεῖ τήν κανονικήν ἤ τήν κατανομήν ***Gauss*** ἤ ***Laplace*** ἐάν ἡ συνάρτησις πυκνότητος αὐτῆς εἶναι τῆς μορφῆς

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty<x<\infty \qquad (3)$$

ὅπου μ εἶναι τυχών ἀριθμός καί $\sigma>0$.

Αὐτή εἶναι ἡ πλέον εὔχρηστος κατανομή καί τοῦτο κυρίως διά τούς ἑξῆς λόγους:

α) Πολλαί κατανομαί (π.χ. ἡ διωνυμική, ἡ Poisson κ.τ.λ.) δύνανται, ὑπό ὡρισμένας συνθήκας, νά προσεγγισθοῦν ὑπό τῆς κανονικῆς.

β) Ὑπό λίαν γενικάς συνθήκας πληρουμένας εἰς τήν πρᾶξιν, ὁ μέσος ὅρος (ἀρκούντως) μεγάλου ἀριθμοῦ παρατηρήσεων ἀκολουθεῖ κατά προσέγγισιν τήν κανονικήν κατανομήν (βάσει τοῦ λεγομένου Κεντρικοῦ Ὁριακοῦ Θεωρήματος (Ἴδε Κεφ. VII).

γ) Τυχαῖα (ὄχι συστηματικά) σφάλματα ἀκολουθοῦν τήν κανονικήν κατανομήν. Διά τοῦτο αὕτη λέγεται καί ***κατανομή σφαλμάτων***.

δ) Ἡ μελέτη τῆς κανονικῆς κατανομῆς εἶναι εὐχερής ἀπό μαθηματικῆς ἀπόψεως.

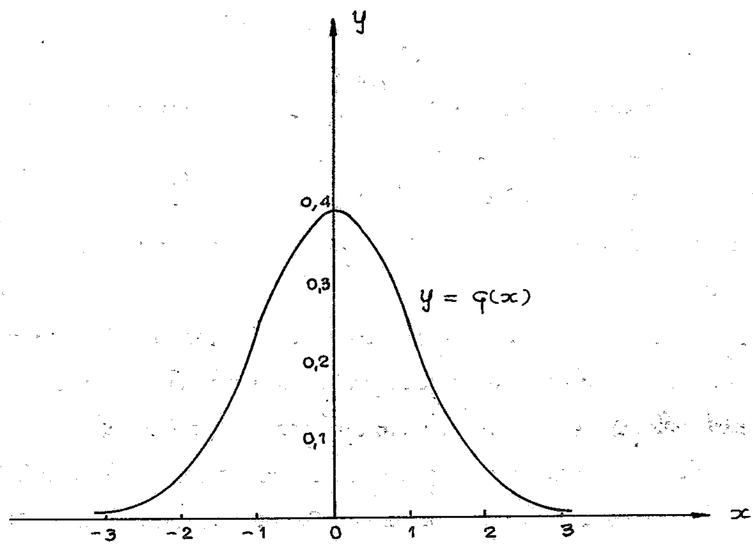
Ὁρισμός: Ἐάν $\mu=0$, $\sigma=1$, τότε ἡ κατανομή καλεῖται ***τυποποιημένη*** ἤ ***τυπική κανονική*** καί εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην ἡ σ.π.π συμβολίζεται διά φ (Σχ. 3).

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad (4)$$

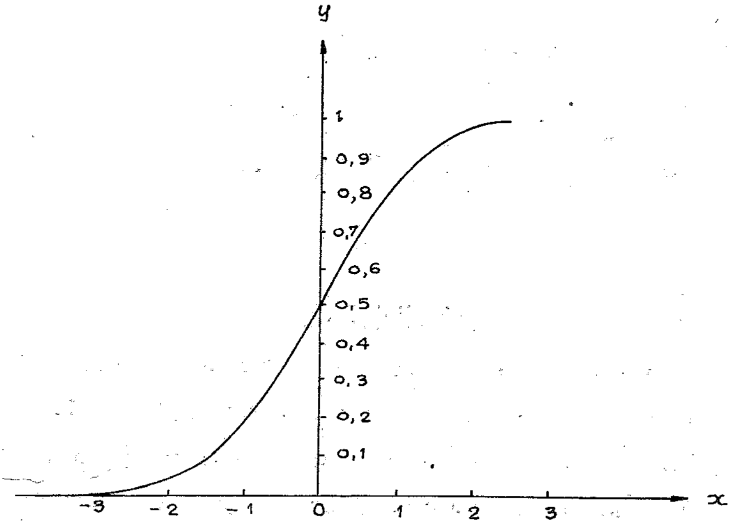
ἢ δὲ ἀντίστοιχος σ. κ. (Σχ. 4) διὰ τῆς

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \qquad (5)$$

Δι' ἀμφοτέρας τὰς $\varphi(x)$ καὶ $\Phi(t)$ ὑπάρχουν πίνακες διδόντες τὰς τιμὰς αὐτῶν (Πίνακες 3 καὶ 4).



Σχ. 3. Ἡ τυπικὴ κανονικὴ πυκνότης



Σχ. 4. Ἡ κανονική συνάρτησις κατανομῆς

Σημειωτέον ὅτι ἡ καμπύλη $y = f(x)$, σχήματος κωδονοειδοῦς, εἶναι συμμετρική περί τό σημεῖον μ (τήν μέσην τιμήν αὐτῆς, ἴδε § 6.4), ἤτοι

$$f(\mu + x) = f(\mu - x) \quad \text{διά κάθε } x.$$

Τό μ εἶναι ἐπίσης ἡ διάμεσος καί ἡ ἐπικρατοῦσα τιμή τῆς κατανομῆς (§ 6.2). Διά νά εἶναι ἡ $\varphi(x)$ (ὅθεν καί ἡ f) πράγματι πυκνότης πρέπει νά πληροῖ τήν

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1$$

Ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι $I^2 = 1$. Ἔχομεν

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\psi)\,d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+\psi^2)}\,dx\,d\psi$$

Μεταβαίνοντες εἰς πολικάς συντεταγμένας διά τῶν μετασχηματισμῶν

$$x=\rho\,\sigma\upsilon\nu\theta \quad , \quad \psi=\rho\eta\mu\theta$$

μὲ Ἰακωβιανὴν $J=\rho$ λαμβάνομεν

$$I^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\rho e^{-\frac{1}{2}\rho^2}d\rho\, d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\infty}\rho e^{-\frac{1}{2}\rho^2}d\rho=1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δοχεῖον περιέχει 7 λευκὰς σφαίρας ἠριθμημένας ἀπό 1-7 καὶ 3 μαύρας σφαίρας φερούσας τοὺς ἀριθμοὺς 8, 9, 10. Ἐκλέγομεν κατὰ τύχην 5 σφαίρας α) ἄνευ ἐπαναθέσεως (β) μετ' ἐπαναθέσεως. Δἰ ἑκάστην τῶν περιπτώσεων α) καὶ β) νὰ δοθῆ ἡ κατανομή

   Α) Τοῦ ἀριθμοῦ τῶν λευκῶν σφαιρῶν εἰς τὸ δεῖγμα

   Β) Τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ εἰς τὸ δεῖγμα

   Γ) Τοῦ μεγαλυτέρου ἀριθμοῦ εἰς τὸ δεῖγμα

   Δ) Τοῦ ἐλαχίστου ἀριθμοῦ σφαιρῶν, ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἐξαγωγὴν μιᾶς λευκῆς σφαίρας.

2. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πιθανότητες ἵνα εἰς οἰκογένειαν 5 τέκνων

   α) Ὑπάρχῃ τουλάχιστον 1 ἀγόρι

   β) Ἀκριβῶς δύο ἀγόρια

   γ) Ὅλα εἶναι ἀγόρια δεδομένου ὅτι τὸ πρῶτον εἶναι ἀγόρι.

3. Ὑποτιθεμένου ὅτι ἡ πιθανότης ἐπιτυχοῦς βολῆς κατὰ στόχου εἶναι 0,4, ποῖος ἀριθμὸς βολῶν ἀπαιτεῖται οὕτως ὥστε ἡ πιθανότης ἵνα τουλάχιστον ἅπαξ κτυπηθῆ ὁ στόχος εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ 0,90;

4. Μηχανή κατασκευάζει ἀντικείμενα, τῶν ὁποίων κατά κανόνα 4% εἶναι ἐλαττωματικά. Ὁ παραγωγός λαμβάνει δεῖγμα ἐκ 10 ἀντικειμένων ἑκάστην ὥραν πρός ἔλεγχον. Ἐάν οὐδέν τούτων εἶναι ἐλαττωματικόν ἡ λειτουργία τῆς μηχανῆς δέν διακόπτεται. Ποία ἡ πιθανότης νά ἀφεθῇ εἰς λειτουργίαν ἡ μηχανή δεδομένου ὅτι ἤρχισε παράγουσα 10% ἐλαττωματικά ἀντικείμενα;

5. Θεωρήσωμεν μή ἀμερόληπτον νόμισμα τοιοῦτον ὥστε ἡ πιθανότης νά ἐμφανισθῇ 5 φοράς κορώνα εἰς 10 ρίψεις εἶναι διπλασία τῆς πιθανότητος νά ἐμφανισθῇ "κορώνα" 4 φοράς. Ποία ἡ πιθανότης ἵνα ἐμφανισθῇ κορώνα" τουλάχιστον μίαν φοράν εἰς 10 ρίψεις;

V 6. Τό 1‰ ἑνός πληθυσμοῦ εἶναι θύματα ἑνός δυστυχήματος ἕκαστον ἔτος. Δεδομένου ὅτι ἡ ἀσφαλιστική ἑταιρεία ἔχει ἀσφαλίσει 5000 ἐκ τοῦ πληθυσμοῦ, ποία ἡ πιθανότης ἵνα τό πολύ δύο πρόσωπα ἔχουν τό δυστύχημα τοῦτο;

7. Ἀεροπορική ἑταιρεία διαπιστώσασα ὅτι κατά μέσον ὅρον 5% τῶν προσώπων μέ κρατημένας θέσεις δέν ἐμφανίζονται κατά τήν ἀναχώρησιν, πωλεῖ 75 εἰσιτήρια δι' ἀεροπλάνον μέ 70 θέσεις. Ποία ἡ πιθανότης ἵνα οὐδέν πρόσωπον μείνῃ χωρίς θέσιν;

8. Εἰς ἐργοστάσιον λαμβάνουν χώραν 2 δυστυχήματα ἀνά ἑβδομάδα κατά μέσον ὅρον. Ὑπολογίσατε τάς πιθανότητας ἵνα
α) συμβοῦν δύο τό πολύ δυστυχήματα εἰς μίαν ἑβδομάδα
β) συμβοῦν τό πολύ δύο δυστυχήματα εἰς δύο ἑβδομάδας.

γ) συμβοῦν τό πολύ 2 δυστυχήματα εἰς ἑκάστην ἐκ δύο ἑβδομάδων.

9. Ὑποτεθείσθω ὅτι τό ποσοστόν αὐτοκτονίας εἰς μίαν χώραν εἶναι 4 ἄτομα ἀνά ἑκατομμύριον κατά μῆνα. Νά εὑρεθῇ ἡ πιθανότης ἵνα εἰς πόλιν 500.000 κατοίκων θά λάβουν χώραν τό πολύ 4 αὐτοκτονίαι εἰς ἕνα μῆνα.
Εἶναι ἐκπληκτικόν τό ὅτι εἰς ἕν ἔτος ὑπῆρξαν τουλάχιστον δύο μῆνες μέ περισσοτέρας τῶν 4 αὐτοκτονίας;

10. Εἰς ἑταιρείαν μεταφορῶν δύο αὐτοκίνητα τήν ἡμέραν κατά μέσον ὅρον παρουσιάζουν μηχανικήν βλάβην. Ὑποτιθεμένου ὅτι ἑκάστη μηχανική βλάβη ἀπαιτεῖ ἕναν μηχανικόν διά μίαν ἡμέραν, πόσους μηχανικούς πρέπει νά διαθέτῃ ἡ ἑταιρεία ἵνα μετά πιθανότητος τουλάχιστον 95% ὑπάρχῃ μηχανικός ἕτοιμος πρός διόρθωσιν τυχόν παρουσιαζομένης βλάβης;

11. Ρίπτομεν κύβον 20 φοράς. Διά $\nu = 1, 2, \ldots, 15$, δείξετε ὅτι ἡ ὑπό συνθήκην πιθανότης ἵνα ἀκριβῶς $5+\nu$ φοράς παρουσιασθῇ ἄσσος δεδομένου ὅτι παρουσιάσθη ἄσσος κατά τάς 5 πρώτας ρίψεις εἶναι ἴση πρός

$$\binom{15}{\nu} \frac{5^{15-\nu}}{6^{15}} .$$

Δείξατε ὅτι ἡ δεσμευμένη πιθανότης ἵνα $5+\nu$ φοράς παρουσιασθῇ ἄσσος δεδομένου ὅτι τουλάχιστον 5 φοράς παρουσιάσθη ἄσσος ἰσοῦται μέ

$$\frac{\binom{20}{5+\nu}\left(\frac{1}{5}\right)^{\nu}}{\sum_{k=0}^{15}\binom{20}{5+k}\left(\frac{1}{5}\right)^{k}}$$

12. Πόσα τέκνα πρέπει νά ἔχη οἰκογένεια ἵνα μέ πιθανότητα 95% ἔχη τουλάχιστον ἕνα ἀγόρι καί τουλάχιστον ἕνα κορίτσι;

√ 13. Ἐπαληθεύσατε ὅτι ἑκάστη τῶν κατωτέρω συναρτήσεων f εἶναι συνάρτησις πυκνότητος πιθανότητος καί παραστήσατε ταύτας γραφικῶς

α) $f(x) = 1 - |1-x|$ διά $0 < x < 2$

β) $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\,\dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad -\infty < x < \infty$ (κατανομή Cauchy)

γ) $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$ $\quad -\infty < x < \infty$ (κατανομή Laplace)

δ) $f(x) = \dfrac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}}$ $\quad x > 0$ (χ^2- κατανομή)

√ 14. Ἡ ποσότης ἄρτου (εἰς 100-άδας κιλῶν) τήν ὁποίαν πωλεῖ ἀρτοπωλεῖον εἰς μίαν ἡμέραν εἶναι τυχαία μεταβλητή μέ συνάρτησιν πυκνότητος

$$f(x) = \alpha x \quad , \quad 0 \leq x < 3$$ ή 0 έως 300 κιλά

$$f(x) = \alpha(6-x)\ , \quad 3 \leq x \leq 6$$ 300 έως 600 κιλά

α) Νά εὑρεθῆ ἡ τιμή τοῦ α ἥτις καθιστᾶ τήν f συνάρτησιν πυκνότητος

β) Ποία ἡ πιθανότης ἵνα εἰς μίαν ἡμέραν πωληθοῦν (i) περισσότερα τῶν 300 κιλῶν (ii) μεταξύ 150 καί 450 κιλῶν;

γ) Ἔστωσαν Α καί Β τά ἐνδεχόμενα εἰς τά (i) καί (ii). Εἶναι τά Α καί Β ἀνεξάρτητα;

15. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ διάρκεια εἰς λεπτά τῶν ὑπεραστικῶν τηλεφωνικῶν συνδιαλέξεων ἀκολουθεῖ τήν ἐκθετικήν κατανομήν μέ συνάρτησιν πυκνότητος

$$f(x) = \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x} \qquad x > 0$$

Νά εὑρεθοῦν αἱ πιθανότητες ἵνα ἡ διάρκεια μιᾶς ὑπεραστικῆς συνδιαλέξεως

α) ὑπερβῆ τά 5 λεπτά β) εἶναι μεταξύ 3 καί 6 λεπτῶν γ) μικρότερα τῶν 3 λεπτῶν δ) μικρότερα τῶν 6 λεπτῶν δεδομένου ὅτι ἦτο μεγαλυτέρα τῶν 3 λεπτῶν.

16. Ὁ χρόνος ἀναμονῆς (εἰς λεπτά) διά λεωφορεῖον ἔχει συνάρτησιν κατανομῆς

$$F(x) = 0 \qquad \text{διά} \qquad x \leq 0$$

$$F(x) = \frac{1}{10}x \qquad '' \qquad 0 \leq x \leq 5$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \qquad '' \qquad 5 \leq x \leq 10$$

$$F(x) = \frac{1}{20}x \qquad '' \qquad 10 \leq x \leq 20$$

α) Παραστήσατε γραφικῶς τήν συνάρτησιν κατανομῆς

β) Εἶναι ἡ κατανομή συνεχής;

γ) Ποία ἡ πιθανότης νά πρέπει νά περιμένῃ κανείς (i) περισσότερον τῶν 5 λεπτῶν (ii) ὀλιγώτερον τῶν 10 λεπτῶν (iii) περισσότερον τῶν 15 λεπτῶν δεδομένου ὅτι περιμένει πέραν τῶν 5 λεπτῶν;

17. Ἀριθμός ἐκλέγεται τυχαίως εἰς τό διάστημα (0,1). Ποία ἡ πιθανότης ἵνα α) τό πρῶτον δεκαδικόν ψηφίον αὐτοῦ εἶναι 1 β) τό δεύτερον δεκαδικόν ψηφίον εἶναι 5 γ) τό πρῶτον δεκαδικόν ψηφίον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης αὐτοῦ εἶναι 3;

18. Τό ὕψος ἀνδρῶν ἀκολουθεῖ τήν κανονικήν κατανομήν μέ μέσον μ 165 cm καί τυπικήν ἀπόκλισιν σ 5 cm I) Ποῖον ποσοστόν τοῦ πληθυσμοῦ τῶν ἀνδρῶν ἔχει ὕψος (α) μεγαλύτερον τῶν 165cm (β) μεγαλύτερον τῶν 170 cm (γ) μεταξύ 160 cm καί 170 cm;

II) Εἰς τυχαῖον δεῖγμα 4 ἀνδρῶν ποία ἡ πιθανότης (i) νά ἔχουν ὅλοι ὕψος τῶν 170 cm (ii) δύο νά εἶναι ὑψηλότεροι τοῦ μέσου (καὶ 2 χαμηλότεροι τοῦ μέσου);

√ 19. Μηχανὴ κατασκευάζει βίδες τῶν ὁποίων τὸ μῆκος εἰς cm ἀκολουθεῖ τὴν κανονικὴν κατανομὴν μὲ μέσον 5 καὶ τυπικὴν ἀπόκλισιν $\sigma = 0{,}2$. Ἐὰν τὸ μῆκος μιᾶς βίδας εἶναι ἐκτὸς τοῦ διαστήματος $5 \pm 0{,}2$, ἡ βίδα θεωρεῖται ἐλαττωματική.
α) Ποία ἡ ἀναλογία τῶν ἐλαττωματικῶν βίδων τὰς ὁποίας παράγει ἡ μηχανή;
β) Ποία ἡ πιθανότης ἵνα ἐκ 10 βίδων οὐδεμία ἐλαττωματική;

20. Ἡ διάρκεια λειτουργίας μιᾶς λυχνίας ραδιοφώνου ὡρισμένου τύπου ἀκολουθεῖ τὴν ἐκθετικὴν μὲ παράμετρον $\theta = 1/200$ ὥρας. Τὸ ἐργοστάσιον, τὸ ὁποῖον κατασκευάζει τὰς λυχνίας, ἐπιθυμεῖ νὰ δώσῃ εἰς τοὺς πελάτας ἐγγύησιν δι' ὡρισμένον ἀριθμὸν ὡρῶν· ἐὰν μία λυχνία καῇ ἐνωρίτερον ἐπιστρέφεται εἰς τὸ ἐργοστάσιον. Ποῖος ἀριθμὸς ὡρῶν πρέπει νὰ δοθῇ ὡς ἐγγύησις οὕτως ὥστε τὸ πολὺ 5% τῶν λυχνιῶν νὰ ἐπιστρέφωνται εἰς τὸ ἐργοστάσιον;

21. Εἰς κατάστημα καταφθάνουν κατὰ μέσον ὅρον 20 πελάται καθ' ὥραν. Ποία ἡ πιθανότης ἵνα ὁ χρόνος μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἀφίξεων εἶναι α) μικρότερος τῶν 3 λεπτῶν β) μεγαλύτερος τῶν 4 λεπτῶν. γ) Ὑποθέσωμεν ὅτι 10% τῶν πελατῶν ἀγοράζουν ὡρισμένον ἀντικείμενον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κατανομὴ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀγοραστῶν τοῦ ἀντικειμένου καθ' ὥραν

22. Ὁ κάτωθι πίναξ (R. D. Clarke. An application of the Poisson distribution, ***Journal of the Institute of Actuaries*** Τομ. 72 (1946) σ. 48) δίδει τὸν ἀριθμὸν τῶν περιοχῶν, ἑκάστης ἐμβαδοῦ $1/4\ (\mathrm{km})^2$ τοῦ Νοτίου Λονδίνου, αἱ ὁποῖαι ὑπέστησαν ἀεροπορικὸν βομβαρδισμὸν κ φορὰς κατὰ τὸν Β' Παγκόσμιον Πό-

λεμον

$K=$ ἀριθμ. βομβαρδισμῶν	0	1	2	3	4	5
$\nu_k =$ ἀριθ. περιοχῶν μέ K βομβαρδισμούς	229	211	93	35	7	1

Χρησιμοποιοῦντες ὡς παράμετρον λ τῆς Poisson τόν ἐκ τοῦ πίνακος μέσον ἀριθμόν βομβαρδισμῶν κατά περιοχήν, ὑπολογίσατε τάς πιθανότητας P_k (τῇ βοηθείᾳ τοῦ Πίνακος 2) καί διαπιστώσατε ὅτι αἱ παρατηρηθεῖσαι συχνότητες ν_k δέν διαφέρουν σημαντικῶς τῶν θεωρητικῶν συχνοτήτων $f_k = NP_k$, ὅπου $N = \Sigma \nu_k =$ 576. Οὕτω συμπεράνατε ὅτι οἱ βομβαρδισμοί ἐγένοντο κατά τύχην.

23. Ὑποτεθείσθω ὅτι ὁ ἀριθμός τυπογραφικῶν σφαλμάτων ἀνά σελίδα ἀκολουθεῖ τήν κατανομήν Poisson. Ἕνα βιβλίον 200 σελίδων περιέχει 40 τυπογραφικά λάθη. Ποία ἡ πιθανότης ἵνα 10 σελίδες τοῦ βιβλίου, ἐκλεγόμεναι τυχαίως, δέν περιέχουν τυπογραφικά λάθη;

24.* ***Ἡ κατανομή Pólya.*** Ἐκ δοχείου περιέχοντος Λ λευκά καί M μαῦρα σφαιρίδια, σύρομεν κατά τύχην ἕν σφαιρίδιον καί τό ἐπιστρέφομεν εἰς τό δοχεῖον προσθέτοντες συγχρόνως K σφαιρίδια τοῦ αὐτοῦ χρώματος. Ἐπαναλαμβάνομεν τοῦτο ν φοράς. Ἔστω X ὁ ἀριθμός τῶν λευκῶν σφαιριδίων, τά ὁποῖα ἐξάγομεν. (Δειγματοληπτικόν ***σχῆμα*** τοῦ Pólya). Ἡ κατανομή τοῦ Pólya δίδεται ὑπό τῆς

$$P\left[X=S\right] = \binom{\nu}{S} \frac{\Lambda(\Lambda+K)\cdots\left[\Lambda+(S-1)K\right]\, M(M+K)\cdots\left[M+(\nu-S-1)K\right]}{N(N+K)\cdots\left[N+(\nu-1)K\right]}$$

ὅπου ἐτέθη $N = \Lambda + M$. (Ἡ ὑπεργεωμετρική ἀντιστοιχεῖ εἰς $K=-1$, ἡ δέ διωνυμική εἰς $K=0$).

25.* ***Κατανομή Γ.*** Λέγομεν ὅτι ἡ Χ ἔχει τήν (συνεχῆ) κατανομήν Γ ἐάν ἔχῃ πυκνότητα

$$f(x)=\frac{\lambda^{p}}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-\lambda x}\qquad x>0$$

ὅπου Γ(p) εἶναι ἡ καλουμένη συνάρτησις Γ ὁριζομένη διά κάθε $p>0$ ὑπό τοῦ ὁλοκληρώματος τοῦ Euler (δευτέρου εἴδους)

$$\Gamma(p)=\int_0^{\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$$

Δείξατε ὅτι εἰς τήν διαδικασίαν Poisson (§ 4.2) ὁ χρόνος ἀναμονῆς μέχρις ὅτου ἐμφανισθοῦν ν γεγονότα ἔχει τήν κατανομήν Γ μέ παραμέτρους $\lambda=\theta$ καί $p=\nu$ (Ἡ ἐκθετική ἀντιστοιχεῖ εἰς $p=1$)

Ἐκ τούτου συμπεράνατε ὅτι ἡ σ.κ. τῆς Poisson δύναται νά ἐκφρασθῇ διά τοῦ μή πλήρους ἤ κολοβοῦ (incomplete) ὁλοκληρώματος Euler ὡς ἑξῆς:

$$\sum_{k=0}^{\nu-1}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k}}{k!}=\int_{\lambda}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\nu)}x^{\nu-1}e^{-x}dx$$

26. Τό παλαιόν Ἀμερικανικόν ***παιγνίδι τῶν craps***, (τό ὁποῖον ἐπαίζετο πρίν ἀναπτυχθῇ ἡ θεωρία πιθανοτήτων) παίζεται ὡς ἑξῆς: Εἷς τῶν δύο παικτῶν ἔστω ὁ Α ρίπτει δύο κύβους συγχρόνως καί ὡς ἀποτέλεσμα λαμβάνεται τό ἄθροισμα τῶν δύο ἐνδείξεων. Τοῦτο συνεχίζεται μέχρις ὅτου ὁ Α κερδίσῃ ἤ χάσῃ. Ὁ Α κερδίζει ἐάν α) τήν πρώτην φοράν φέρῃ 7 ἤ 11 ἤ
β) τήν πρώτην φοράν φέρῃ ἀποτέλεσμα κ ὅπου $4\leq\kappa\leq10$, $\kappa\neq7$ καί εἰς ἐπομένην ρῖψιν τό κ ἐπαναληφθῇ, ὑπό τόν ὅρον ὅτι δέν ἐμφανισθῇ 7 πρό τῆς ἐπαναλήψεως τοῦ κ. Ἄλλως ὁ Α χάνει.

Ἔστω Χ ὁ ἀριθμός τῶν ρίψεων ὅταν λήξῃ τό παιγνίδι. Νά εὑρεθοῦν:

i) ἡ συνάρτησις πιθανότητος τῆς X

ii) ἡ πιθανότης νὰ κερδίσῃ ὁ A

Εἶναι ***δίκαιον*** τὸ παιγνίδι δηλ. οἱ δύο παῖκται ἔχουν τὴν αὐτὴν πιθανότητα νὰ κερδίσουν (ὅταν στοιχηματίζουν τὸ αὐτὸ ποσόν);

27. Ὁ χρόνος λειτουργίας κινητῆρος ἀεροπλάνου ἀκολουθεῖ τὴν ἐκθετικὴν κατανομὴν μὲ παράμετρον $\theta = 0{,}001$ ὥρας. Διὰ τὴν πτῆσιν τοῦ ἀεροπλάνου ἀπαιτεῖται ἡ λειτουργία τουλάχιστον 2 ἐκ τῶν 4 κινητήρων τοῦ ἀεροπλάνου. Ποία ἡ πιθανότης ἐπιτυχοῦς ἀεροπορικῆς ἀποστολῆς ἀπαιτούσης α) 10 ὥρας πτήσεως β) 50 ὥρας πτήσεως;

28. Εἰς μίαν διασταύρωσιν τὸ φῶς τῆς τροχαίας ἀλλάζει ἀπὸ πράσινον εἰς κόκκινον καὶ ἀντιστρόφως ἀνὰ 1 λεπτόν. Ποία ἡ πιθανότης ἵνα αὐτοκίνητον δυνηθῇ νὰ διέλθῃ χωρὶς νὰ περιμένῃ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

6.1 Έννοια τῆς παραμέτρου

Ἡ πλήρης περιγραφή μιᾶς τυχαίας μεταβλητῆς δίδεται ὑπὸ τῆς κατανομῆς (πιθανότητος) αὐτῆς προσδιοριζομένης εἴτε ὑπὸ τῆς συναρτήσεως συχνότητος (πιθανότητος ἢ πυκνότητος) εἴτε ὑπὸ τῆς ἀθροιστικῆς συναρτήσεως κατανομῆς. Εἰς πολλὰς περιπτώσεις, χάριν ἁπλουστέρας περιληπτικῆς περιγραφῆς τῆς συμπεριφορᾶς μιᾶς τυχαίας μεταβλητῆς X ἀρκούμεθα εἰς τὸν προσδιορισμὸν μερικῶν σταθερῶν ἢ **παραμέτρων**, αἱ ὁποῖαι ὑπολογίζονται ἐκ τῆς κατανομῆς τῆς X. Αἱ παράμετροι αὗται δίδουν, ἐν ἀδραῖς γραμμαῖς, μίαν γενικὴν εἰκόνα τῆς κατανομῆς (δηλ. τοῦ σχήματος καὶ τῆς θέσεως τῆς "καμπύλης" τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις συχνότητος).

Ἡ **μέση τιμή**, ἡ **διασπορά** καὶ αἱ **ροπαὶ** διαφόρων τάξεων ἀποτελοῦν τὰς σημαντικωτέρας παραμέτρους.

6.2 Παράμετροι θέσεως μιᾶς κατανομῆς

Αἱ παράμετροι θέσεως (ἢ κεντρικῆς τάσεως) μιᾶς μεταβλητῆς X ἢ τῆς ἀντιστοίχου κατανομῆς δίδουν μίαν εἰκόνα περὶ τοῦ μεγέθους τῆς X (καὶ κατὰ συνέπειαν, περὶ τῆς θέσεως τῆς "καμπύλης" συχνοτήτων $y = f(x)$ εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν ἀξόνων). Τοιαῦται παράμετροι εἶναι:

α) Ἡ **ἐπικρατοῦσα** ἢ **πλέον πιθανὴ τιμή**.

β) Ἡ **διάμεσος** ἢ **διχοτόμος** (median) καὶ

γ) Ἡ **μέση τιμή**, ἡ ὁποία εἶναι καὶ ἡ σπουδαιοτέρα.

Διὰ συνεχῆ κατανομὴν μὲ πυκνότητα $f(x)$, καλεῖται **κορυφὴ** (mode) αὐτῆς ἕν σημεῖον x τοπικοῦ μεγίστου τῆς $f(x)$ οὕτω ἐάν ἡ f ἔχῃ παράγωγον δευτέρας τάξεως, τό σημεῖον x_o εἶναι κορυφή ἐάν

$$f'(x_o)=0 \qquad \text{καί} \qquad f''(x_o)<0.$$

Δἰ ἀπαριθμητήν μεταβλητήν λαμβάνουσαν τάς τιμάς $x_1, x_2, \dots x_\nu, \dots$ ὅπου $x_1 < x_2 < \dots < x_\nu < \dots$ ἡ x_ν λέγεται **κορυφή** ἐάν:

$$P\left[X=x_{\nu-1}\right] < P\left[X=x_\nu\right] \quad \text{καί} \quad P\left[X=x_{\nu+1}\right] < P\left[X=x_\nu\right]$$

Ἐάν ἡ κατανομή ἔχῃ μίαν μόνον κορυφήν, καλουμένην τότε καί ***ἐπικρατοῦσαν*** ἤ ***πλέον πιθανήν τιμήν***, λέγεται ***μονοκόρυφος*** (unimodal). Ἐάν ἔχῃ δύο κορυφάς λέγεται ***δικόρυφος*** (bimodal) κ.ο.κ

Ὁρισμός: ***Διάμεσος*** ἤ ***διχοτόμος*** μιᾶς μεταβλητῆς X μέ συνάρτησιν κατανομῆς $F(x)$ λέγεται κάθε ἀριθμός δ (σημεῖον τοῦ ἄξονος τῶν x) τοιοῦτος ὥστε:

$$P\left[X<\delta\right] = F(\delta -) \leq \frac{1}{2} \leq P\left[X \leq \delta\right] = F(\delta)$$

Ἐάν ἡ F εἶναι συνεχής, τότε διάμεσος εἶναι κάθε λύσις δ τῆς

$$F(\delta) = \frac{1}{2}$$

Παράδειγμα: α) Νά εὑρεθῇ ἡ διάμεσος δ τῆς ὁμοιομόρφου κατανομῆς $(0,1)$.

Πρός τοῦτο ζητεῖται λύσις τῆς $F(\delta) = 1/2$.

Ἄρα

$$\frac{1}{2} = \int_0^\delta f(x)\,dx = \int_0^\delta dx = \delta$$

ἤτοι:

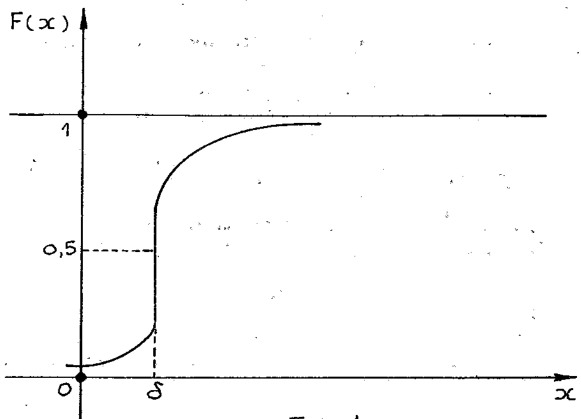
$$\delta = \frac{1}{2}$$

β) Διά τήν ἐκθετικήν $f(x) = \theta e^{-\theta x}$ ἡ διάμεσος δ ἱκανοποιεῖ τήν

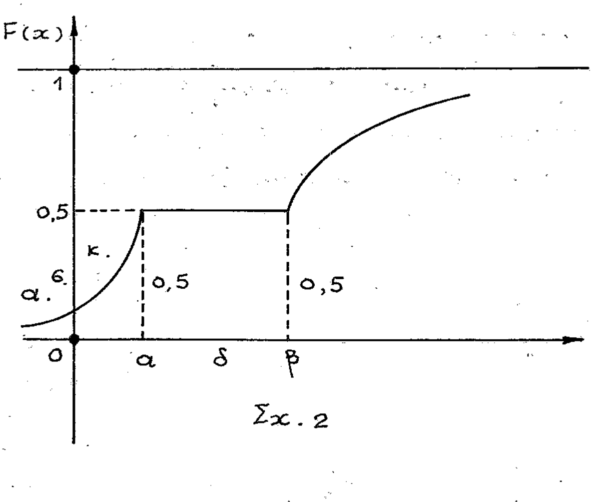
$$\int_0^\delta \theta e^{-\theta x}\,dx = \frac{1}{2}$$

ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν

$$\delta = \frac{1}{\theta} \log 2$$



Σx. 1



Σx. 2

Εἰς τὸ Σx.1 ὁρίζεται μονοσημάντως ἡ διάμεσος ἐνῶ εἰς τὸ Σx.2 ὑπάρχουν ἄπειροι τὸ πλῆθος (οἱοσδήποτε ἀριθμὸς μεταξὺ α καὶ β).

6.3 Ποσοστιαῖα σημεῖα (Quantiles)

Εἴδομεν ὅτι ἡ διάμεσος χωρίζει τὴν κατανομὴν (τῆς "μάζης" πιθανότητος) εἰς δύο ἴσα μέρη. Κατ' ἀναλογίαν ὁρίζομεν σημεῖα τοῦ ἄξονος τῶν x (ἀριθμούς) καλουμένους ***ποσοστιαῖα σημεῖα*** ἢ ***ποσοστημόρια*** διαιροῦντα τὴν κατανομὴν ὑπὸ τὴν ἀναλογίαν $p:(1-p)(0<p<1)$.

Ὁρισμός: Διὰ κάθε p, $0<p<1$ καλοῦμεν ***p-ποσοστιαῖον σημεῖον*** (quantile) ἢ ***100p-οστὸν ἑκατοστημόριον*** (percentile), ἔστω x_p, μιᾶς μεταβλητῆς X μὲ συνάρτησιν κατανομῆς F κάθε λύσιν x_p τῶν

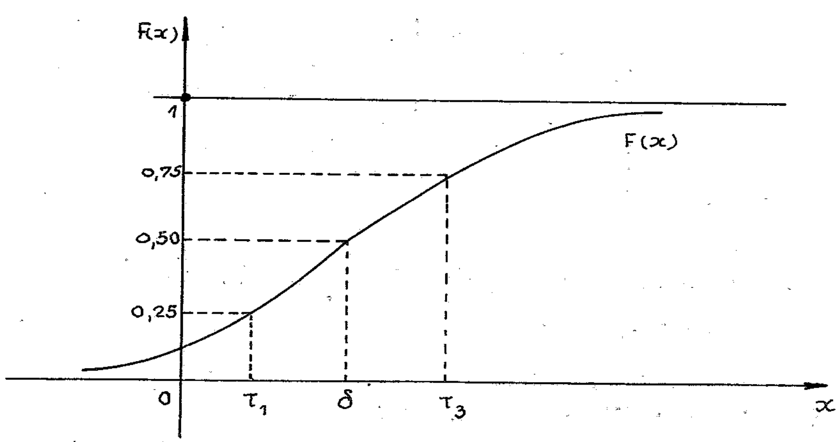
$$F(x_p-) \leq p \leq F(x_p)$$

Ἐὰν ἡ F εἶναι συνεχὴς καὶ γνησίως αὔξουσα ($F(x_1) > F(x_2)$ διὰ $x_1 > x_2$) τότε τὸ x_p ὁρίζεται μονοσημάντως ὡς ἡ λύσις τῆς

$$F(x_p) = p$$

Ἄλλως ἔχομεν τοῦ αὐτοῦ τύπου „προβλήματα" ὡς καὶ μὲ τὴν διάμεσον.

Διὰ $p = \nu\%$ τὸ x_p καλεῖται ν-οστὸν ***ἑκατοστιαῖον σημεῖον*** ἢ ***ἑκατοστημόριον*** (percentile). Διὰ $\nu = 25$ ἔχομεν τὸ $25^{ον}$ ἑκατοστημόριον καλούμενον ***πρῶτον τεταρτημόριον*** (quartile) ἔστω τ_1. Διὰ $\nu = 75$ ἔχομεν τὸ καλούμενον τρίτον τεταρτημόριον τ_3. Διὰ $\nu = 10$ ἔχομεν τὸ πρῶτον ***δεκατημόριον*** (decile) κ.τ.λ. Ἡ διάμεσος ἀντιστοιχεῖ εἰς $\nu = 50$ ($p = 0,5$).



Σχ. 3. Διάμεσος καὶ τεταρτημόρια

Σημείωσις: Τό 100p ποσοστιαῖον σημεῖον μιᾶς κατανομῆς καλεῖται ἐπίσης ***κατώτερον p-σημεῖον*** τῆς κατανομῆς ἢ ***ἀνώτερον (1-p) σημεῖον*** αὐτῆς.

Ὁρισμός: Ἡ διαφορά $\tau_3 - \tau_1$ καλεῖται ***ἐνδοτεταρτημοριακόν πλάτος*** ἢ ***εὖρος***, εἶναι δέ τοῦτο ἕν μέτρον τῆς μεταβλητότητος (variability) ἢ συγκεντρωτικότητος τῆς κατανομῆς, ὅπως ἡ διασπορά ἢ διακύμανσις ὁριζομένη κατωτέρω (§ 6.5). Πολλάκις ἀντί τοῦ πλάτους $\tau_3 - \tau_1$ χρησιμοποιεῖται, ὡς μέτρον μεταβλητότητος, τό ***ἡμιενδοτεταρτημοριακόν εὖρος***: $\frac{1}{2}(\tau_3 - \tau_1)$, καλούμενον καί ***τεταρτημοριακή ἀπόκλισις*** (quartile deviation).

6.4 Μέση τιμή - Μαθηματική Ἐλπίς

Ὑποθέσωμεν ὅτι τό ποσοστόν τῶν ἐλαττωματικῶν τεμαχίων ἑνός βιομηχανικοῦ προϊόντος εἶναι 5%, τῶν καλῆς ποιότητος 75% καί τῶν ἀνωτέρας ποιότητος 20%.
Ἐξ ἑνός ἐλαττωματικοῦ τεμαχίου ὁ βιομήχανος ζημιοῦται 1 δραχμήν, ἐξ ἑνός καλῆς ποιότητος κερδίζει 2 δρχ. καί ἐξ ἑνός ἀνωτέρας ποιότητος κερδίζει 5 δρχ. Ἔστω ὅτι τό ἐργοστάσιον παράγει N τεμάχια τοῦ ἐν λόγῳ προϊόντος, ἐκ τῶν ὁποίων N_1 εἶναι ἐλαττωματικά, N_2 εἶναι καλῆς ποιότητος καί N_3 ἀνωτέρας ποιότητος. Τότε τό ὁλικόν κέρδος K τοῦ βιομηχάνου εἶναι:

$$K = (-1)N_1 + 2N_2 + 5N_3 .$$

ἐνῶ τό κατά τεμάχιον κέρδος, ἔστω X, ἰσοῦται μέ

$$X = \frac{K}{N} = (-1)\frac{N_1}{N} + 2\frac{N_2}{N} + 5\frac{N_3}{N} = (-1)f_1 + 2f_2 + 5f_3$$

ὅπου f_1, f_2, f_3 εἶναι αἱ σχετικαί συχνότητες (ποσοστά) τῶν ἐλαττωματικῶν, μετρίας καί ἀνωτέρας ποιότητος τεμαχίων, ἀντιστοίχως. Διά μεγάλα N, ὡς ἤδη ἀνεφέρθη (Κεφ. 0 καί I) ἡ σχετική συχνότης ἑνός ἐνδεχομένου πλησιάζει τήν πιθανότητα αὐτοῦ, οὕτως ὥστε τό μέσον (κατά τεμάχιον) κέρδος ἐκ (τοῦ δείγματος) τῶν N τεμαχίων δύναται κατά προσέγγισιν νά ληφθῆ ὡς

$$X \approx (-1)(0{,}05) + 2\,(0{,}75) + 5\,(0{,}20) = 2{,}45 \text{ δρχ.}$$

οὕτω τῆς παραγωγικῆς διαδικασίας συνεχιζομένης ἐπί μακρόν (μαθηματικῶς ἐπ' ἄπειρον) τό ***προσδοκώμενον*** ἀνά τεμάχιον κέρδος εἶναι 2,45 δρχ.

Τοῦτο καλεῖται ***προσδοκωμένη*** ἤ ***ἐλπιζομένη τιμή*** ἔστω $E(X)$ τῆς τυχαίας μεταβλητῆς X, ἡ ὁποία λαμβάνει τάς τιμάς $-1, 2$ καί 5 μέ πιθανότητας $0{,}05$, $0{,}75$ καί $0{,}20$, ἀντιστοίχως, ἤτοι

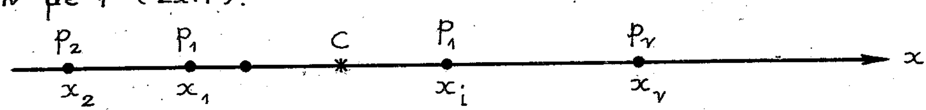
$$E(X) = (-1)\,P[X=-1] + 2\,P[X=2] + 5\,P[X=5]$$

Ὁμοίως, ἡ ἐλπιζομένη τιμή μιᾶς μεταβλητῆς X λαμβανούσης πεπερασμένον πλῆθος τιμῶν x_i μέ πιθανότητας p_i, $i=1,\ldots,\nu$ εἶναι ὁ ***βαρυκεντρικός*** ἤ ***σταθμικός μέσος*** (weighted average) τῶν τιμῶν αὐτῆς μέ βάρη τάς ἀντιστοίχους πιθανότητας, ἤτοι

$$E(x) = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_\nu x_\nu}{p_1 + p_2 + \ldots + p_\nu} = \sum_{i=1}^{\nu} p_i x_i \qquad (1)$$

(δεδομένου ὅτι τά βάρη ἐν τῇ προκειμένῃ περιπτώσει ἔχουν ἄθροισμα τήν μονάδα).

Παρατήρησις: Εἰς τήν φυσικήν, ὁ ἀνωτέρω τύπος (1) δίδει τήν τετμημένην τοῦ κέντρου βάρους, ἔστω C, ν ὑλικῶν σημείων $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ ἐπί τοῦ ἄξονος τῶν x μέ ἀντιστοίχους μάζας (βάρη) $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$, μέ τήν διαφοράν ὅτι ἐδῶ τό $p_1 + \ldots + p_\nu$ δέν ἰσοῦται κατ' ἀνάγκην μέ 1 (Σχ.1).



Σχ.1. Μέση τιμή - Κέντρον βάρους

Γενικώτερον ἔχομεν τόν ἑξῆς ὁρισμόν

Ὁρισμός: Ἡ ***μέση*** ἤ ***προσδοκωμένη*** ἤ ***ἐλπιζομένη τιμή*** ἤ ***μαθημα-***

τικὴ ἐλπίς (mean value, moyenne, mathematical expectation, espérance mathématique) μιᾶς τυχαίας μεταβλητῆς X, συμβολιζομένη διά E(X), ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

α) Διά διακριτήν μεταβλητήν λαμβάνουσαν τάς τιμάς $x_1, \ldots, x_\nu, \ldots$ μέ πιθανότητας $p_1, p_2, \ldots, p_\nu, \ldots$ ἀντιστοίχως

$$E(X) = \sum_i p_i x_i \tag{2}$$

ὑπό τόν ὅρον ὅτι ἡ σειρά συγκλίνει ἀπολύτως, ἤτοι

$$\sum_i p_i |x_i| < \infty \tag{3}$$

β) Διά συνεχῆ μεταβλητήν μέ συνάρτησιν πυκνότητος $f(x)$,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx\,, \tag{4}$$

ὑπό τόν ὅρον ὅτι τό ὁλοκλήρωμα συγκλίνει ἀπολύτως, ἤτοι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)\, dx < \infty \tag{5}$$

Ἐάν ἡ (3) ἤ ἡ (4) δέν πληροῦται, τότε λέγομεν ὅτι δέν ὑπάρχει ἡ μέση τιμή τῆς X. Ἡ συνθήκη (3) ἀπαιτεῖται διότι ἄλλως ἡ σειρά (2) θά ἤλλασσε τιμήν δι' ἀναδιατάξεως τῶν ὅρων αὐτῆς. Πρός τούτοις λέγομεν ὅτι ἡ E(X) ὑπάρχει ἐάν αὐτή εἶναι ὡρισμένη καί ἐπί πλέον πεπερασμένη. Οὕτω διά τήν ἀπαριθμητήν μεταβλητήν X μέ συνάρτησιν πιθανότητος

$$p_k = P\left[X = x_k\right] = P\left[X = c^k\right] = \frac{c-1}{c^k}\,, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

ἡ E(X) δέν ὑπάρχει, καθότι ἡ (3) ἀποκλίνει. Ὁμοίως λέγομεν ὅτι δέν ὑπάρχει ἡ E(X) τῆς X μέ

$$p_k = P\left[X = (-1)^{k+1} \frac{2^k}{k}\right] = \frac{1}{2^k} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

διότι ἐνῶ ἡ σειρά

$$\sum_{k=1} p_k x_k = \sum_{k=1} \frac{1}{2^k} (-1)^{k+1} \frac{2^k}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$$

συγκλίνει ὑπό συνθήκην δέν συγκλίνει ἀπολύτως. Κατά μείζονα λόγον, λέγομεν ὅτι ἡ $E(X)$ δέν ὑπάρχει, ἐάν, π.χ.

$$P\left[X = (-2)^k\right] = \frac{1}{2^k} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

ὅτε ἡ σειρά

$$\sum_{k \geq 1} p_k x_k = -1+1-1+1-\cdots$$

"αἰωρεῖται" μεταξύ −1 καί 0 μή τείνουσα εἰς ὡρισμένον ὅριον.

Ὁ ὅρος "μαθηματική ἐλπίς", ὡς καί ἡ θεωρία πιθανοτήτων, ἔχει τήν ἀρχήν του εἰς τά τυχηρά παιγνίδια.

Ἐάν (ἀναλόγως τοῦ παιγνιδίου) ὁ παίκτης δύναται νά κερδίση τό ποσόν α μέ πιθανότητα p καί νά χάση (νά κερδίση ὁ ἀντίπαλος του) τό ποσόν β μέ πιθανότητα $1-p=q$, τότε τό ἐλπιζόμενον κέρδος του (εἰς ἕν παιγνίδιον) εἶναι $\alpha p - q\beta$. Εἰς τά λεγόμενα ***δίκαια παιγνίδια*** (fair games) ἡ ἐλπίς ἑκάστου παίκτου εἶναι μηδέν. Οὕτω εἰς τό παιγνίδι "κορώνα - γράμματα" ὁ παίκτης λαμβάνει ἤ δίδει τό αὐτό ποσόν α ἀναλόγως τοῦ ἄν φέρη "κορώνα" ἤ "γράμματα" κατά τήν ρῖψιν νομίσματος, ἡ ἐλπίς εἶναι μηδέν, ἤτοι διά μεγάλον ἀριθμόν παιγνιδίων οὔτε ὁ ἕνας παίκτης κερδίζει οὔτε ὁ ἄλλος.

Παράδειγμα μή δικαίου παιγνιδίου. Ρουλέττα. Τό παιγνίδι τῆς ρουλέττας παίζεται ὡς ἑξῆς:

Ὁ (κυκλικός) τροχός τῆς ρουλέττας, ὁ ὁποῖος εἶναι ὑποδιῃρημένος εἰς 37 ἴσα τόξα φέροντα τούς ἀριθμούς 0, 1, ..., 36 (εἰς Ἀμερικήν πολλάκις 38 τόξα φέροντα τούς ἀριθμούς 00, 0, 1, ..., 36), τίθεται εἰς περιστροφικήν κίνησιν ἐνῶ σφαιρίδιον ρίπτεται ἐπ' αὐτοῦ. Ὑποθέσωμεν ὅτι, ἐάν τό σφαιρίδιον σταματήση εἰς περιττόν ἀριθμόν ὁ παίκτης κερδίζει ποσόν ἴσον πρός τό κατατεθέν, ἔστω α, ἄλλως τό χάνει. Ἔστω Y τό "κέρδος" τοῦ παίκτου καί X ὁ ἀριθμός εἰς τόν ὁποῖον σταματᾶ τό σφαιρίδιον ($X = 0, 1, 2, \ldots, 36$).

$$E(Y) = \alpha P\left[X = \text{περιττός}\right] + (-\alpha) P\left[X = 0, 2, 4, \ldots, 36\right] = \alpha \frac{17}{37} + (-\alpha)\frac{18}{37} = -\frac{\alpha}{37}$$

Τοῦτο εἶναι τό ἀναμενόμενον κέρδος (ζημία) τοῦ παίκτου (κατά παιγνίδιον) εἰς μακράν σειράν ἐπαναλήψεων τοῦ παιγνιδίου. Οὕτω εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν, ὡς καί εἰς πολλά ἄλλα τυχηρά παιγνίδια, ἡ μαθηματική ἐλπίς τοῦ παίκτου εἶναι ἀρνητική. Εἰς τήν πρᾶξιν ὅμως ὁ παίκτης, ἀγνοῶν τήν (κακήν) τύχην, τήν ὁποίαν τοῦ ἐπιφυλάσσει τό "ἀπώτερον μέλλον", παίζει ἐλπίζων ὅτι εἰς τό ἀμέσως προσεχές μέλλον θά αὐξήσῃ τό ποσόν χρημάτων, τό ὁποῖον διαθέτει, πρίν τό χάσῃ, (διά τό ὁποῖον δύναται νά δειχθῇ ὅτι ἡ πιθανότης εἶναι λίαν ἐνθαρρυντική!).

Παραδείγματα: α) Μέση τιμή ὁμοιομόρφου ἀπαριθμητῆς. Ἔστω X τό ἀποτέλεσμα τῆς ρίψεως ἑνός κύβου. Τότε

$$p_k = P\left[X = k\right] = \frac{1}{6} \qquad k = 1, 2, \ldots, 6$$

καί

$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} k\, p_k = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6} k = 3,5$$

Γενικώτερον διά μίαν ὁμοιόμορφον ἀπαριθμητήν μεταβλητήν X μέ

$$p_k = P\left[X = x_k\right] = \frac{1}{\nu} \qquad k = 1, \ldots, \nu$$

παρατηροῦμεν ὅτι ἡ

$$E(X) = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} x_i \equiv \overline{x}$$

εἶναι ὁ συνήθης ἀριθμητικός μέσος (ὅρος) τῶν τιμῶν αὐτῆς $x_1, \ldots, x_\nu$.
Ἄς σημειωθῇ ὅτι ἡ μέση τιμή δέν εἶναι ἀπαραίτητον νά εἶναι μία ἀπό τάς τιμάς τῆς X, ὡς εἰς τό ἀνωτέρω παράδειγμα.

β) *Μέσος διωνυμικής*

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\nu} k p_k = \sum_{k=0}^{\nu} k P(X=k) = \sum_{k=0}^{\nu} k\binom{\nu}{k}p^k q^{\nu-k} = \sum_{k=1}^{\nu} k\binom{\nu}{k}p^k q^{\nu-k}$$

Ἄρα

$$E(X)=\nu p\left[q^{\nu-1}+(\nu-1)q^{\nu-2}p+\binom{\nu-1}{2}q^{\nu-3}p^2+\dots+\binom{\nu-1}{\nu-2}pq^{\nu-2}+\binom{\nu-1}{\nu-1}p^{\nu-1}\right]=$$

$$=\nu p(p+q)^{\nu-1}=\nu p.$$

ἤτοι $E(X)=\nu p$

γ) *Μέσος τῆς Poisson*

$$p_k=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad k=0,1,2,\dots$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\lambda^\nu}{\nu!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$$

Ἄρα ἡ παράμετρος λ τῆς Poisson εἶναι ἡ μέση τιμή τῆς κατανομῆς

δ) *Μέσος τῆς ὁμοιομόρφου κατανομῆς εἰς τό διάστημα (α,β)*

Ἡ συνάρτησις πυκνότητος τῆς X εἶναι

$$f(x)=\frac{1}{\beta-\alpha} \qquad \alpha\leqq x\leqq\beta$$

Ἄρα:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} x\frac{1}{\beta-\alpha}dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta^2-\alpha^2}{2(\beta-\alpha)} = \frac{\beta+\alpha}{2}$$

ε) *Μέσος ἐκθετικῆς*

Ἡ συνάρτησις πυκνότητος τῆς ἐκθετικῆς εἶναι

$$f(x)=\theta e^{-\theta x}, \qquad x>0$$

Ἄρα,

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_{0}^{\infty}\theta x e^{-\theta x}dx = \frac{1}{\theta}\int_{0}^{\infty} u e^{-u}du = \frac{1}{\theta}$$

στ) *Μέσος κανονικής*

Ἔστω ἡ κανονική μεταβλητή Χ με πυκνότητα:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < \infty,$$

Θά δείξωμεν ὅτι $E(X) = \mu$.

Ἔχομεν

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma(2\pi)^{1/2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Θέτοντες $(x-\mu)/\sigma = y$, $x = \sigma y + \mu$ λαμβάνομεν

$$E(X) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \sigma y) e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \mu \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \frac{\sigma}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Ἀπομένει νά δειχθῇ ὅτι,

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1, \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{y}{2}} dy = 0, \tag{3}$$

Ἡ (2) ἐδείχθη εἰς τήν § 5.3 ἡ δέ (3) εἶναι προφανής, διότι ἡ $g(y) = y e^{-\frac{y^2}{2}}$ εἶναι περιττή συνάρτησις, ἤτοι $g(-y) = -g(y)$ καί ἄρα $\int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy = 0$ δεδομένου ὅτι $\int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| dy < \infty$

6.5 Ἰδιότητες τῆς μέσης τιμῆς

Ἔστω ἡ τυχαία μεταβλητή Χ. Τότε

α) $E(X+c) = E(X) + c$ $\quad$ (c = σταθερά) $\qquad$ (1)

Ἀπόδειξις: Ὑποτεθείσθω ὅτι ἡ Χ ἔχει πυκνότητα $f_Y(x)$. Τότε θέτοντες $Y = X + c$ ἔχομεν (ἴδε (1) τῆς § 6.6)

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}(x+c)f_X(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx+c\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx=$$
$$=E(X)+c\cdot$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἡ ἰδιότης (1) καὶ δι᾽ ἀπαριθμητὰς μεταβλητάς.

β) $E(aX)=aE(X)$, ($a=$ σταθερά) (2)

Ἀπόδειξις: Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ X εἶναι ἀπαριθμητή. Τότε, ἐξ ὁρισμοῦ τῆς $E(X)$

$$E(aX)=\sum_{i=1}^{\infty} ax_i P\left[aX=ax_i\right]=\sum_{i=1}^{\infty} ax_i P(X=x_i)=a\sum_{i=1} x_i P(X=x_i)=aE(X)$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἡ (2) καὶ διὰ συνεχεῖς μεταβλητάς.

γ) Ἔστω αἱ τυχαῖαι μεταβληταὶ X καὶ Y. Τότε (ἐὰν ὑπάρχουν αἱ $E(X)$ καὶ $E(Y)$):

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

Ἀπόδειξις: Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ X λαμβάνει τὰς τιμὰς $x_1, x_2, \dots, x_k$ μὲ πιθανότητας $p_1, p_2, \dots, p_k$ ἀντιστοίχως καὶ ἡ Y λαμβάνει τὰς τιμὰς $y_1, y_2, \dots, y_\nu$ μὲ πιθανότητας $q_1, q_2, \dots, q_\nu$ ἀντιστοίχως. Τότε

$$E(X+Y)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\nu}(x_i+y_j)P\left[X=x_i \text{ καὶ } Y=y_j\right]=$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\nu} x_i P\left[X=x_i\,,\ Y=y_j\right]+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\nu} y_j P\left[X=x_i\,,\ Y=y_j\right]=$$
$$=\sum_{i=1}^{k} x_i \sum_{j=1}^{\nu} P\left[X=x_i\,,\ Y=y_j\right]+\sum_{j=1}^{\nu} y_j \sum_{i=1}^{k} P\left[X=x_i\,,\ Y=y_j\right]=$$

Ἀλλὰ παρατηροῦμεν ὅτι δυνάμει τοῦ Θεωρήματος τῆς Ὁλικῆς Πιθανότητος § 3.7 (ἴδε καὶ § 7.4),

$$\sum_{j=1}^{\nu} P\left[X=x_i\,,\ Y=y_j\right]=P\left[X=x_i\right]=p_i \qquad i=1,\dots,k,$$

καὶ
$$\sum_{i=1}^{k} P\left[X=x_i, Y=y_j\right] = P\left[Y=y_j\right] = q_j \qquad j=1,\ldots,\nu.$$

Ἄρα
$$E(X+Y) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i + \sum_{j=1}^{\nu} y_j q_j = E(X)+E(Y).$$

Παρατήρησις: Ἡ ἀπόδειξις ἰσχύει καὶ διὰ $k=\nu=\infty$, ἤτοι διὰ γενικὰς ἀπαριθμητὰς τυχαίας μεταβλητάς, καθὼς ἐπίσης καὶ δι' οἱασδήποτε συνεχεῖς τυχαίας μεταβλητὰς X καὶ Y.
(Εἰς τὴν πραγματικότητα ἰσχύει δι' οἱασδήποτε τυχαίας μεταβλητὰς X καὶ Y, τὸ X δυνατὸν νὰ εἶναι ἀπαριθμητή, τὸ Y συνεχὴς καὶ ἀντιστρόφως).

Ὡς πόρισμα τῶν προτάσεων 2 καὶ 3 προκύπτει ἡ γενικὴ ἰδιότης τῆς μέσης τιμῆς (τῆς πράξεως E).

Ἡ ἰδιότης τῆς γραμμικότητος: Δι' οἱονδήποτε ζεῦγος τυχαίων μεταβλητῶν X καὶ Y (τῶν ὁποίων αἱ μέσαι τιμαὶ ὑπάρχουν) καὶ οἱονδήποτε ζεῦγος ἀριθμῶν α καὶ β ἰσχύει ἡ:

$$E(\alpha X+\beta Y) = \alpha E(X)+\beta E(Y)$$

Σημείωσις: Ἐν γένει διὰ μὴ γραμμικὴν συνάρτησιν g, $Eg(X)\neq g(EX)$, π.χ.
$$E(X^2) \neq \left[E(X)\right]^2 \quad \text{καὶ} \quad E(\log X) \neq \log E(X)$$

Παρατήρησις: Ἡ ἰδιότης τῆς γραμμικότητος τῆς E ἐπεκτείνεται ἐπαγωγικῶς εἰς περισσοτέρας τῶν δύο μεταβλητάς, ἤτοι ἰσχύει ἡ

Πρότασις: Δι' οἱασδήποτε σταθερὰς $\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu$ καὶ μεταβλητὰς $X_1,\ldots,X_\nu$ τῶν ὁποίων αἱ μέσαι τιμαὶ ὑπάρχουν, ἰσχύει ἡ

$$E(\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2+\ldots+\alpha_\nu X_\nu) = \alpha_1 E(X_1)+\alpha_2 E(X_2)+\ldots+\alpha_\nu E(X_\nu)$$

6.6 Ῥοπαί. Διασπορά

Ἔστω μία τυχαία μεταβλητὴ X ἐπὶ τοῦ δειγματοχώρου Ω. Τότε οἱαδήποτε συνάρτησις $g(X)$ τῆς X (μέ πραγματικάς τιμάς) εἶναι ἐπίσης τυχαία μεταβλητή, ἔστω Y, ἤτοι

$$Y = g(X) \text{ , καθότι } Y = Y(\omega) = g\left(X(\omega)\right) \quad , \ \omega \in \Omega .$$

Εἰς τινας περιπτώσεις ὅταν ἡ g εἶναι ἁπλῆ συνάρτησις, ὡς π.χ. τό τετράγωνον, ὁ $\log$, ἡ γραμμική συνάρτησις, εἶναι εὔκολον νά εὕρωμεν τήν κατανομήν τῆς Y ἐκ τῆς κατανομῆς τῆς X καί ἐν συνεχείᾳ τήν $E(Y)$ ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy .$$

ὅπου $f_Y(y)$ ἡ πυκνότης πιθανότητος τῆς Y. Τοῦτο ὅμως δέν εἶναι ἀπαραίτητον διότι δυνάμεθα νά εὕρωμεν τήν $E(Y)$ ἐκ τῆς

$$E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy \qquad (1)$$

ὅπου f_X ἡ πυκνότης τῆς X (ἡ ἀπόδειξις τῆς (1) ἐπαφίεται εἰς τόν ἀναγνώστην). Τό αὐτό ἰσχύει καί δι' ἀπαριθμητάς μεταβλητάς.

Παράδειγμα: Ἔστω X ὁμοιόμορφος εἰς τό διάστημα $(0,1)$. Ἔστω δέ $Y = X^2$. Τότε:

$$E(Y) = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Ροπαί ν τάξεως

Ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον παρουσιάζει ἡ περίπτωσις καθ' ἥν $g(X) = X^{\nu}$, ὅπου ν εἶναι θετικός ἀκέραιος ($\nu = 1, 2, \ldots$).

Ὁρισμός: Καλεῖται ροπή ν τάξεως ἤ ν-οστή ροπή (περί τήν ἀρχήν), ἔστω μ'_{ν}, ἡ:

$$\mu'_{\nu} = E(X^{\nu}) \quad , \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

Σημειωτέον ὅτι ἡ ροπή 1ης τάξεως, $E(X)$, εἶναι ὡς γνωστόν, ἡ μέση τιμή.

Παρατήρησις: Αἱ ροπαί ἔχουν μεγάλην σημασίαν διότι εἰς πολλάς περιπτώσεις, ἐάν γνωρίζωμεν ταύτας δι' ὅλας τάς τιμάς τοῦ ν, δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν πλήρως τήν κατανομήν (ἴδε § 10.2). Διά τήν προσέγγισιν κατανομῆς χρησιμοποιοῦμεν συνήθως τάς 4 πρώτας ροπάς.

Κεντρικαί ροπαί. Διασπορά

Ὁρισμός: Ἡ κεντρική ροπή τάξεως ν, ἔστω μ_ν, (περί τό κέντρον $\mu = E(X)$ τῆς κατανομῆς) ὁρίζεται ὑπό τῆς:

$$\mu_\nu = E(X-\mu)^\nu \quad , \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

Εἰς τήν Στατιστικήν ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον παρουσιάζει ἡ ***κεντρική ροπή δευτέρας τάξεως***, ἡ ὁποία συνήθως καλεῖται ***διασπορά*** ἤ ***σκεδασμός*** ἤ ***διακύμανσις*** τῆς X (variance), συμβολιζομένη διά τοῦ $\Delta(X)$ ἤ $Var(X)$, ἤτοι

$$\Delta(X) = Var(X) = E\left[X - E(X)\right]^2 = E(X-\mu)^2$$

Ἡ θετική τετραγωνική ρίζα τῆς διασπορᾶς καλεῖται ***τυπική ἀπόκλισις*** (standard deviation) καί εἰς μερικάς περιπτώσεις ***τυπικόν σφάλμα*** (Standard error).

Ἡ διακύμανσις τυχαίας μεταβλητῆς X εἶναι μέτρον τοῦ μεγέθους τῶν διαφορῶν τῶν τιμῶν τῆς X ἀπ' ἀλλήλων, ἤτοι μετρᾶ τήν ***μεταβλητότητα*** τῶν τιμῶν τῆς X ἤ ἄλλως τήν συγκεντρωτικότητα τῶν τιμῶν τῆς X περί τήν μέσην τιμήν αὐτῆς. Σημειωτέον ὅτι ἡ διασπορά τῆς X εἶναι ὁ μέσος τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων τῶν τιμῶν αὐτῆς ἀπό τήν μέσην τιμήν.

Σημείωσις: Αἱ τιμαί τῆς διασπορᾶς καί τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως μιᾶς μεταβλητῆς παρίστανται συνήθως διά τῶν σ^2 καί σ, ἀντιστοίχως. Ἐνίοτε τό σ^2 παριστᾶ ἐπίσης καί τήν πρᾶξιν τῆς εὑρέσεως τῆς διασπορᾶς ἤτοι

$$\sigma^2(X) = \Delta(X) = Var(X)$$

Ἰδιότητες τῆς διακυμάνσεως

i) Ἡ διακύμανσις τυχαίας μεταβλητῆς δέν μεταβάλλεται ἐάν ἡ X αὐξηθῆ κατά μίαν σταθεράν c, ἤτοι ἡ διακύμανσις δέν μεταβάλλεται ὅταν μεταβάλλεται ἡ ἀρχή τῶν ἀξόνων (ὅταν ἡ κατανομή ἀλλάξη θέσιν) ἤτοι:

$$\Delta(X+c) = \Delta(X)$$

Ἀπόδειξις: Ἔχομεν

$$\Delta(X+c) = E\left[(X+c) - E(X+c)\right]^2 =$$

$$E\left[(X+c-E(X)-c\right] = E\left[X-E(X)\right]^2 = \Delta(X)$$

ii) Ἐάν πολλαπλασιάσωμεν μίαν τυχαίαν μεταβλητήν X ἐπί σταθεράν α, τότε ἡ διακύμανσις τῆς προκυπτούσης μεταβλητῆς αX πολλαπλασιάζεται ἐπί τό τετράγωνον τῆς α, ἤτοι:

$$\Delta(\alpha X) = \alpha^2 \Delta(X)$$

Ἀπόδειξις: Ἔχομεν

$$\Delta(\alpha X) = E\left[(\alpha X) - E(\alpha X)\right]^2 =$$

$$= E\left[\alpha(X-E(X)\right]^2 = E\left\{\alpha^2\left[X-E(X)\right]^2\right\} = \alpha^2 E\left[X-E(X)\right]^2 = \alpha^2\Delta(X)$$

iii) Ἰσχύει:

$$\Delta(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2 = E(X^2) - \mu^2 =$$

$$= 2\alpha \text{ ροπή} - (\text{μέσος})^2 \qquad (2)$$

Ἀπόδειξις: Ἡ $\Delta(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) =$

$$= E(X^2) - 2E(\mu X) + E(\mu^2) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 =$$

$$= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2.$$

Παραδείγματα: α) Νά εὑρεθῆ ἡ διακύμανσις τῆς ὁμαλῆς κατανομῆς εἰς τό (0,1).

Ἔχομεν :

$$\mu = E(X) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \quad \text{καί} \quad E(X^2) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

Ἄρα ἔχομεν δυνάμει τῆς (2)

$$\Delta(X) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

β) Ἔστω ἡ κανονική μεταβλητή X μέ πυκνότητα

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

θά δείξωμεν ὅτι:

$$\Delta(X) = \sigma^2$$

Ἀπόδειξις: Γνωρίζομεν ὅτι $E(X) = \mu$ (§ 6.4).

Ἄρα:

$$\Delta(X) = E(X-\mu)^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx$$

Θέτομεν

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = u \quad , \quad du = \frac{dx}{\sigma} \quad , \quad \text{ὅτε}:$$

$$\Delta(X) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

Ὁλοκληροῦντες κατά μέρη λαμβάνομεν:

$$\Delta(X) = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} u e^{-\frac{1}{2}u^2}\Big]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du =$$

$$= 0 + \sigma^2 \cdot 1 = \sigma^2$$

Συμβολισμός. Ἡ κανονική κατανομή μέ μέσον μ καί διασποράν σ^2 θά παρίσταται διά $N(\mu, \sigma^2)$

Παράδειγμα: Ἔστω ἡ X μέ πυκνότητα

$$f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{9}}$$

Τότε :

$$E(X) = \frac{1}{2} \quad , \quad \Delta(X) = 9$$

ἤτοι ἡ X εἶναι $N\left(\frac{1}{2}, 9\right)$.

γ) *Διακύμανσις τῆς Poisson* :

$$p_k = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Γνωρίζομεν ἤδη (§ 6.4) ὅτι $E(X) = \lambda$, ἑπομένως χρειαζόμεθα τὴν $E(X^2)$. Εἶναι εὐκολώτερον ὅμως διὰ μίαν ἀπαριθμητὴν μὲ ἀκεραίας τιμάς, ὡς ἡ Poisson, νὰ εὕρωμεν τὴν καλουμένην *παραγοντικὴν ροπὴν* π_2 δευτέρας τάξεως, δηλ.

$$\Pi_2 = E\left[X(X-1)\right] = E(X^2) - E(X)$$

καὶ ἐντεῦθεν τὴν

$$E(X^2) = \Pi_2 + E(X)$$

Ἔχομεν :

$$\Pi_2 = E\left[X(X-1)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)p_k = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda^\nu}{\nu!} = \lambda^2$$

Ἄρα ἔχομεν :

$$E(X)^2 = \Pi_2 + E(X) = \lambda^2 + \lambda \quad , \quad \Delta(X) = E(X^2) - \lambda^2 = \lambda$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ μέση τιμὴ καὶ ἡ διασπορὰ τῆς Poisson εἶναι ἡ αὐτή.

6.7. Κατὰ προσέγγισιν ὑπολογισμὸς τοῦ μέσου καὶ τῆς διασπορᾶς.

Εἴδομεν ὅτι, δοθείσης μιᾶς συναρτήσεως $g(X)$ μιᾶς μεταβλητῆς X, εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρωμεν τὴν μέσην τιμὴν τῆς $Y = g(X)$ ἀπ' εὐθείας διὰ χρήσεως τῆς κατανομῆς τῆς X, δηλ. χωρὶς νὰ εὕρωμεν τὴν κατανομὴν τῆς Y. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ δι' οἱανδήποτε ροπὴν τῆς Y. Παρὰ ταῦτα, προκειμένου περὶ κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον πολυπλόκων συναρτήσεων g, οἱ ἐν λόγῳ ὑπολογισμοὶ ὁδηγοῦν συνήθως εἰς ὁλοκληρώσεις ἢ ἀθροίσεις, αἱ ὁποῖαι δυσκόλως δύνανται νὰ ἐκτελεσθοῦν. Διὰ τοῦτο αἱ κατωτέρω προσεγγίσεις καθίστανται λίαν χρήσιμοι.

Πρότασις. Ἔστω X τυχαία μεταβλητὴ μὲ $E(X)=\mu$ καὶ $\Delta(X)=\sigma^2$. Θεωρήσωμεν τὴν τυχαίαν μεταβλητὴν

$$Y=g(X)$$

ὅπου ἡ συνάρτησις g ἔχει παράγωγον τρίτης τάξεως. Τότε

$$E\left[g(X)\right] \approx g(\mu)+\frac{g''(\mu)}{2}\sigma^2 \qquad (1)$$

$$\Delta\left[g(X)\right] \approx \left[g'(\mu)\right]^2\sigma^2 \qquad (2)$$

Ἀπόδειξις: Κατὰ τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ Taylor τῆς g περὶ τὸ σημεῖον μ, ἔχομεν

$$g(X)=g(\mu)+(X-\mu)g'(\mu)+\frac{(X-\mu)^2}{2}g''(\mu)+R_1 \qquad (3)$$

Παραλείποντες τὸ ὑπόλοιπον R_1 καὶ λαμβάνοντες τὴν μέσην τιμὴν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἔχομεν τὴν (1) (σημειωτέον ὅτι $E(X-\mu)=0$)

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς (2), λαμβάνοντες μόνον ἕναν ὅρον εἰς τὸ ἀνάπτυγμα (3), ἔχομεν

$$\Delta(g(X))\approx\Delta\left[g(\mu)+(X-\mu)g'(\mu)\right]=\left[g'(\mu)\right]^2\Delta(X-\mu)=\left[g'(\mu)\right]^2\sigma^2$$

Παράδειγμα: Ὑπὸ ὡρισμένας συνθήκας, ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις S ἑνὸς ὑγροῦ (dyn/cm) δίδεται ὑπὸ τῆς

$$S=2(1-0{,}005T)^{1,2}$$

ὅπου T παριστᾷ τὴν θερμοκρασίαν εἰς βαθμοὺς Κελσίου τοῦ ὑγροῦ.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ T εἶναι συνεχὴς τυχαία μεταβλητὴ μὲ πυκνότητα

$$f(t) = 3000\,t^{-4}\,, \quad t \geq 10$$

Ὅθεν εὑρίσκομεν

$$E(T) = \int_{10}^{\infty} 3000\,t^{-3}\,dt = 15\,, \quad \Delta(T) = E(T^2) - 15^2 = 75$$

Διά τά $E(S)$ καί $\Delta(S)$ ἀπαιτεῖται ὁ μᾶλλον δυσχερής ὑπολογισμός τῶν ὁλοκληρωμάτων

$$E(S) = \int_{10}^{\infty} 2(1-0{,}005t)^{1,2} f(t)\,dt = 6000 \int_{10}^{\infty} (1-0{,}005t)^{1,2}\, t^{-4}\,dt$$

$$E(S^2) = 3000 \int_{10}^{\infty} 4(1-0{,}005t)^{2,4}\, t^{-4}\,dt$$

Ἀντ' αὐτοῦ χρησιμοποιοῦμεν τάς προσεγγίσεις (1) καί (2). Πρός τοῦτο ἀπαιτοῦνται αἱ

$$g(15)\,, \quad g'(15) \quad \text{καί} \quad g''(15)$$

ὅπου

$$g(t) = 2(1-0{,}005t)^{1,2}$$

Εὑρίσκομεν $g(15) = 1{,}82$

$$g'(t) = -0{,}012\,(1-0{,}005t)^{0,2}\,, \quad g'(15) = -0{,}01\,,$$

καί

$$g''(t) = 0{,}000012\,(1-0{,}005t)^{-0,8}\,, \quad g''(15) = \frac{1{,}2\times 10^{-5}}{(0{,}925)^{0,8}} \approx 0\,.$$

Οὕτω λαμβάνομεν

$$E(S) \approx g(15) + \frac{75}{2}\, g''(15) = 1{,}82 \;\; (\mathrm{dyn/cm})$$

$$\Delta(S) \approx 75\,\left[g'(15)\right]^2 = 0{,}0075 \;\; (\mathrm{dyn/cm})^2$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

† 1. Δείξατε ὅτι ἡ μέση τιμή μ μιᾶς μεταβλητῆς X ἔχει τὴν ἑξῆς ἰδιότητα:

$$\min_c E(X-C)^2 = E(X-\mu)^2 = \Delta(X)$$

2. Δείξατε ὅτι

$$\min_a E\left[|X-\alpha|\right] = E\left[|X-\delta|\right]$$

ὅπου δ ἡ διάμεσος τῆς X.

3. Δείξατε ὅτι ἀναγκαία συνθήκη διά τήν ὕπαρξιν τῆς μέσης τιμῆς μεταβλητῆς μέ συνάρτησιν κατανομῆς F εἶναι ἡ

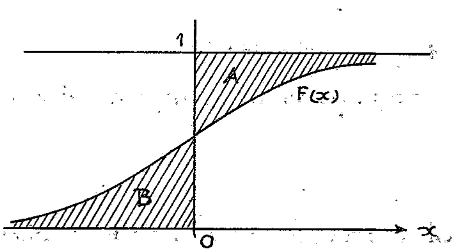
$$\lim_{x\to-\infty} x\cdot F(x) = \lim_{x\to+\infty} x\cdot F(x) = 0$$

4. Εὕρεσις τῆς μέσης τιμῆς γραφικῶς (γεωμετρικῶς). Δείξατε ὅτι διά συνεχῆ μεταβλητήν X μέ πυκνότητα $f(x)$ καί συνάρτησιν κατανομῆς $F(x)$, ἔχομεν

$$\mu = E(X) = \int_0^\infty [1-F(x)]dx - \int_{-\infty}^0 F(x)dx$$

Ὅθεν εἰς τό παρατιθέμενον σχῆμα

μ = ἐμβαδόν (A) − ἐμβαδόν (B)



Ἐκ τούτου συμπεράνατε ὅτι ἐάν E(X) ὑπάρχῃ, τότε τά

$$\int_0^{\infty} x f(x)\,dx \qquad \text{καὶ} \qquad \int_{-\infty}^{0} x f(x)\,dx$$

ἐπίσης ὑπάρχουν καὶ εἶναι πεπερασμένα.

5. Διὰ τὴν κατανομὴν τοῦ Cauchy μὲ πυκνότητα

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}$$

ἡ μέση τιμὴ δὲν ὑπάρχει. Ἐν τούτοις αἱ ***ἀπόλυτοι ροπαὶ*** τάξεως $r<1$ ἤτοι αἱ

$$E\left(|X|^r\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^r}{1+x^2}\,dx$$

ὑπάρχουν.

6. Δείξατε ὅτι ν πρῶται ροπαὶ καθορίζουν τὰς ν πρώτας κεντρικὰς ροπὰς καὶ ἀντιστρόφως.

7. Δείξατε ὅτι ἐὰν ὑπάρχῃ ἡ ροπὴ ν τάξεως μ'_ν, τότε ὑπάρχουν ὅλαι αἱ ροπαὶ μικροτέρας τάξεως μ'_k, $k = 1, 2, \ldots, \nu-1$.

8. Δείξατε ὅτι ἡ μέση τιμὴ καὶ ἡ διασπορὰ τῆς ὑπεργεωμετρικῆς κατανομῆς δίδονται ὑπὸ τῶν

$$E(X) = \nu p \qquad \Delta(X) = \nu p q\,\frac{N-\nu}{N-1}$$

ὅπου ἐτέθη $p = \Lambda/N$, $q = M/N$, $N = M + \Lambda$

(Ὑπόδειξις: Εὕρετε τὴν 2αν παραγοντικὴν ροπὴν ὡς διὰ τὴν Poisson § 6.6)

9. Εὕρετε τὴν μέσην τιμὴν καὶ διασπορὰν τῶν κάτωθι κατανομῶν

α) Διωνυμικῆς (Δείξατε ὅτι $\Delta(X) = \nu p q$)

β) Γεωμετρικῆς

γ) Pascal

δ) ἐκθετικῆς

ε) Γ τῆς Ἀσκ. II 25.

10.* *Γενικευμένη διωνυμική*. Θεωρήσωμεν ἀκολουθίαν ἀνεξαρτήτων δοκιμῶν εἰς τὰς ὁποίας ἡ πιθανότης τοῦ ἐνδεχομένου A κατὰ τὴν i δοκιμὴν εἶναι p_i. Ἔστω X ὁ ἀριθμὸς ἐμφανίσεων τοῦ A κατὰ τὰς πρώτας ν δοκιμάς.

i) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ

α) $E(X)$, β) $\Delta(X)$, γ) $\mu_3 = E(X - \Sigma p_i)^3$

ii) Δεῖξατε ὅτι ἡ διασπορὰ τῆς X διὰ δεδομένην τιμὴν τῆς $\bar{p} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} p_i$ καθίσταται μεγίστη ὅταν $p_1 = p_2 = \cdot = p_\nu = \bar{p}$. Ποίαν σημασίαν ἔχει τοῦτο ἐμπειρικῶς;

f 11.* Ἡ καλουμένη *κατανομὴ Laplace* ἔχει πυκνότητα

$$f(x) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{|x-\alpha|}{\alpha}}$$

Εὕρετε τὴν μέσην τιμὴν καὶ διασποράν αὐτῆς.

† 12. Δεῖξατε ὅτι ἡ ν-οστὴ ροπὴ τῆς τυπικῆς κανονικῆς κατανομῆς $N(0,1)$ εἶναι

$$\mu_\nu = 1 \cdot 3 \cdots (\nu - 1) \quad , \quad \text{διὰ } \nu \text{ ἄρτιον}$$
$$\mu_\nu = 0 \qquad\qquad '' \quad \nu \text{ περιττόν}$$

Συμπεράνατε τὰς κεντρικὰς ροπὰς τῆς $N(\mu, \sigma^2)$.

13. Ἡ θερμοκρασία T "ἀποστάξεως" πετρελαίου καθορίζει τὴν ποιότητα τοῦ τελικοῦ προϊόντος. Ἐάν $T_1 \leq 200°$ C (Κελσίου) τὸ προϊὸν λέγεται "νάφθα" καὶ πωλεῖται πρὸς β δολλάρια τὸ γαλόνι. Ἐάν $T > 200°$ C τὸ προϊὸν λέγεται ἀπόσταγμα πετρελαίου καὶ πωλεῖται πρὸς γ δολλάρια τὸ γαλόνι. Ἐάν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ θερμοκρα-

σία Τ εἶναι ὁμοιόμορφος εἰς τό διάστημα (160, 280) εὕρετε τό ἀναμενόμενον κέρδος κατά γαλόνι δεδομένου ὅτι ἡ παραγωγή ἑνός γαλονίου στοιχίζει α δολλάρια.

14. Δείξατε τούς ἑξῆς ἀναγωγικούς τύπους διά τόν ὑπολογισμόν διαδοχικῶν ὅρων τῆς συναρτήσεως πιθανότητος τῶν κατανομῶν:

α) Διωνυμικῆς:

$$P\left[X=k+1\right] = b\,(k+1,\nu,p) = \frac{p(\nu-k)}{q\,(k+1)}\,b(k,\nu,p)\,, \qquad k=0,1,2,\dots,\nu-1$$

β) Poisson

$$p_{k+1} = P\left[X=k+1\right] = \frac{\lambda}{k+1}\,p_k\,, \qquad k=0,1,2,\dots$$

γ) Ὑπολογίσατε τήν συνάρτησιν $b(k,\nu,p)$ διά $\nu=5$ $p=\frac{1}{3}$ τῇ βοηθείᾳ τῆς α).

15. Παραστήσατε γραφικῶς τήν σ. κ.

$$F(x) = 1-0{,}8\,e^{-x} \qquad x \geq 0$$

$$F(x) = 0 \qquad \text{διά } x<0$$

Εἶναι ἡ F συνεχής; Εὕρετε τήν μέσην τιμήν αὐτῆς

16. Μία κατανομή λέγεται συμμετρική περί σημεῖον α ἐάν ἡ συνάρτησις συχνότητος (πυκνότητος ἤ πιθανότητος) $f(x)$ αὐτῆς πληροῖ τήν

$$f(a+x) = f(a-x)$$

Δείξατε ὅτι ἐάν ἡ μέση τιμή τῆς κατανομῆς ὑπάρχῃ, τότε εἶναι ἴση μέ α. (Πρβλ. Ασκ. 5 καί 11*)

17. Δείξατε ὅτι $|E(X)| \leq E[|X|]$

18. Διά κάθε σύνολον A πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἔστω $I_A(x)$ ἡ κα-

λουμένη «συνοδεύουσα» ἢ «χαρακτηριστική» συνάρτησις τοῦ A; ὁριζομένη ὑπό τῆς

$$I_A(x) = 1 \text{ διά } x \in A\,, \quad I_A(x) = 0 \text{ διά } x \notin A$$

Δείξατε ὅτι διά τυχαίαν μεταβλητήν X

$$P\left[X \in A\right] = E\left[I_A(X)\right]$$

19. i) Ἐάν $E(X) = E(X^2) = 0$ τότε $P\left[X = 0\right] = 1$

ii) Ἐάν $\Delta(X) = 0$ τότε ὑπάρχει σταθερά c τοιαύτη ὥστε $P\left[X = c\right] = 1$

20. Ἐκφράσατε τήν ὑπεργεωμετρικήν μεταβλητήν ὡς ἄθροισμα ν μεταβλητῶν καί τῇ βοηθείᾳ τούτου εὕρετε τήν μέσην τιμήν αὐτῆς.

21. Εἰς τό παιγνίδι «dart» ὁ στόχος ἀποτελεῖται ἀπό 3 ὁμοκέντρους κύκλους ἀκτίνων $1/\sqrt{3}$, 1 καί $\sqrt{3}$. Δι' ἕκαστον κτύπημα (ὑπό βέλους) τοῦ ἐσωτερικοῦ κύκλου ὁ παίκτης λαμβάνει 3 πόντους τοῦ ἑπομένου δακτυλίου 2 πόντους καί τοῦ ἐξωτερικοῦ δακτυλίου 1 πόντον. Ἐάν κτυπήσῃ ἐκτός τοῦ στόχου (ἀστοχήσῃ) λαμβάνει μηδέν πόντους. Ἕνα παιγνίδι συνίσταται εἰς τρεῖς διαδοχικάς βολάς κατά τοῦ στόχου. Ἔστω X τό ἄθροισμα τῶν πόντων τούς ὁποίους λαμβάνει ὁ παίκτης μετά 3 βολάς. Ἐάν $8 \geq X > 5$, ὁ παίκτης κερδίζει ἀντικείμενον ἀξίας α δρχ, ἐάν δέ $X = 9$ κερδίζει ἀντικείμενον ἀξίας 30 δρχ. Δι' ἕν παιγνίδιον ὁ παίκτης πληρώνει 1 δρχ.

Ὑποτιθεμένου ὅτι ἡ ἀπόστασις R τοῦ κτυπήματος ἀπό τοῦ κέντρου τοῦ στόχου ἔχει πυκνότητα

$$f(r) = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{1+r^2}\,,$$

πῶς πρέπει νά ἐκλέξῃ τό α ὁ διαχειριστής τοῦ παιγνιδίου οὕτως ὥστε, τουλάχιστον νά μή ζημιοῦται (κατά μέσον ὅρον);

22. Ἡ λεγομένη Β-κατανομή μέ παραμέτρους $p>0$, $q>0$ ὁρίζεται ὑπό τῆς συναρτήσεως πυκνότητος

$$f(x) = \frac{1}{B(p,q)}\, x^{p-1}(1-x)^{q-1}, \qquad 0<x<1$$

ὅπου $B(p,q)$ εἶναι ἡ καλουμένη Β-συνάρτησις ὁριζομένη ὑπό τοῦ ὁλοκληρώματος Euler (α΄ εἴδους)

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Εὕρετε τήν ροπήν ν τάξεως τῆς κατανομῆς καί τήν διασποράν αὐτῆς.

23. Εὕρετε τήν ροπήν ν τάξεως καί τήν διασποράν τῆς Γ-κατανομῆς (Ἄσκ. ΙΙ 25)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΟΙ (ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΑΙ) ΚΑΤΑΝΟΜΑΙ

7.1 Παραδείγματα πολυμεταβλητῶν κατανομῶν

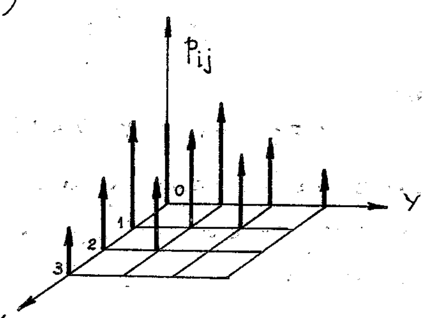
Ἐξάγομεν 3 παιγνιόχαρτα ἐκ συνήθους δέσμης 52 παιγνιοχάρτων. Ἔστω X ὁ ἀριθμός τῶν "σπαθιῶν" καί Y ὁ ἀριθμός τῶν "καρρό". Ἐνδιαφερόμεθα διά τήν κατανομήν πιθανότητος τῶν X καί Y συγχρόνως, ἰδιαιτέρως θέλομεν νά προσδιορίσωμεν τήν *ἀπό κοινοῦ (joint) συνάρτησιν πιθανότητος* τῶν X καί Y, ἤτοι τάς πιθανότητας (Σχ.1)

$$p_{ij} = P(X=i\,,\ Y=j) = \frac{\binom{13}{i}\binom{13}{j}\binom{26}{3-i-j}}{\binom{52}{3}}\,, \quad 0 \le i+j \le 3$$

Ἐάν π.χ. $i=2$, $j=0$ τότε

$$p_{2,0} = \frac{\binom{13}{2}\binom{13}{0}\binom{26}{1}}{\binom{52}{3}} = 0{,}092$$

Σημείωσις: Εἰς τό ἀνωτέρω παράδειγμα ἡ κατανομή εἶναι ἀπαριθμητή διότι τό ζεῦγος (X, Y) λαμβάνει πεπερασμένον πλῆθος τιμῶν (ζεύγη ἀριθμῶν ἤ σημείων εἰς τό ἐπίπεδον, ἕκαστον μετά θετικῆς πιθανότητος).



Σχ. 1

Ἐπί πλέον ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} p_{ij} = \sum_{0\le i+j\le 3} p_{ij} = 1$$

Ἄς θεωρήσωμεν τό παράδειγμα τῆς προσβολῆς στόχου ὑπό πυροβόλου ὅπλου (βλ. § 5.1). Ἔστω ὅτι ἡ X συμβολίζει τήν ὁριζοντίαν ἀπόκλισιν τοῦ σημείου κρούσεως ἀπό τοῦ κέντρου τοῦ στόχου καί Y τήν κατακόρυφον ἀπόκλισιν. Ἐδῶ τό τυχαῖον ζεῦγος (X,Y) ὁρίζει συνεχῆ μεταβλητήν, λαμβάνουσαν ὅλας τάς τιμάς $(x,y): \alpha\le x\le\beta$ $\gamma\le y\le\delta$ (ἔνθα $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ σταθεραί). Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην ἡ κατανομή τοῦ ζεύγους (X,Y) καθορίζεται ὑπό τῆς ***ἀπό κοινοῦ συναρτήσεως πυκνότητος*** $f(x,y)$ ὅπου

$$f(x,y)\,dx\,dy = P(x < X \le x+dx,\ y < Y \le y+dy),$$

ἤτοι ἡ συνάρτησις πυκνότητος

$$f(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{P(x < X \le x+\Delta x,\ y < Y \le y+\Delta y)}{\Delta x\,\Delta y}$$

Μέ ἄλλους λόγους, ἡ $f(x,y)$ εἶναι ἀνάλογος πρός τήν πιθανότητα ἵνα τό (X,Y) λάβῃ τιμάς (πέσῃ) εἰς μίαν "μικράν" περιοχήν τοῦ σημείου (x,y). Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην τῶν συνεχῶν μεταβλητῶν X καί Y ἔχομεν

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

Ἐπίσης

$$P(\alpha < X < \beta,\ \gamma < Y < \delta) = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\delta} f(x,y)\,dx\,dy$$

Ἐν γένει ἔχομεν τόν ἑξῆς ὁρισμόν:

Ὁρισμός: Μία ν-διάστατος τυχαία μεταβλητή εἶναι ἕν διάνυσμα ν τυχαίων μεταβλητῶν.

Διά $\nu=2$ ἡ ἀντίστοιχος κατανομή καλεῖται ***διδιάστατος*** ἤ ***διμεταβλητή***, διά $\nu=3$ ***τριδιάστατος*** ἤ ***τριμεταβλητή*** καί γενικῶς ***πολυδιάστατος*** ἤ ***πολυμεταβλητή***. Οὕτω, εἰς τήν περίπτωσιν τῆς διμεταβλητῆς αἱ τιμαί τῆς τυχαίας μεταβλητής (ζεύγος μεταβλητών) είναι σημεία (x,y) τοῦ ἐπιπέδου, εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς τριμεταβλητῆς αἱ τιμαὶ εἶναι σημεῖα (x,y,z) εἰς τὸν χῶρον τῶν τριῶν διαστάσεων κ.ο.κ

7.2 Διδιάστατοι κατανομαί

Ἡ κατανομὴ τυχαίου ζεύγους μεταβλητῶν X καὶ Y ὁρίζεται διὰ προσδιορισμοῦ τῆς ἀπὸ κοινοῦ συναρτήσεως πιθανότητος ὁριζομένης ὡς $p_{ij} = P(X = x_i\ ,\ Y = y_j)$ διὰ τὴν περίπτωσιν ἀπαριθμητῆς διμεταβλητῆς, λαμβανούσης τὰς τιμὰς (x_i, y_j), $i = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots$ (ἀριθμήσιμον τὸ πολὺ σύνολον τιμῶν) ἢ τῆς ἀπὸ κοινοῦ συναρτήσεως πυκνότητος $f(x,y)$ εἰς τὴν περίπτωσιν συνεχοῦς κατανομῆς (πρβλ. § 5.1) ὅτε

$$f(x,y)\,dx\,dy = P(x < X < x+dx\ ,\ y < \Psi < y+dy)$$

Αἱ ἐν λόγῳ συναρτήσεις p_{ij} καὶ $f(x,y)$ ἱκανοποιοῦν τὰς σχέσεις

$$\text{i)}\quad p_{ij} > 0 \quad , \quad f(x,y) \geq 0$$

$$\text{ii)}\quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1 \qquad \text{δι᾽ ἀπαριθμητὰς μεταβλητάς}$$

καὶ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \qquad \text{διὰ συνεχεῖς μεταβλητάς}$$

"Ἕτερος τρόπος προσδιορισμοῦ τῆς κατανομῆς τοῦ ζεύγους (X,Y) εἶναι ὁ διὰ προσδιορισμοῦ τῆς α.σ.κ., ἤτοι τῆς ***ἀπὸ κοινοῦ (ἀθροιστικῆς) συναρτήσεως κατανομῆς***.

Ὁρισμός: Ἡ ἀπὸ κοινοῦ συνάρτησις κατανομῆς $F(x,y)$ τῶν τυχαίων μεταβλητῶν X καὶ Y ἢ τοῦ ζεύγους (X,Y) ὁρίζεται ὑπὸ τῆς

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

Παρατήρησις: Οἱ ἀνωτέρω ὁρισμοὶ ἐπεκτείνονται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ν μεταβλητῶν $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ ἤτοι τὴν περίπτωσιν τοῦ ν-διαστάτου ***τυχαίου διανύσματος*** $(X_1, X_2, \ldots, X_\nu)$.

Ἰδιότητες τῆς $F(x,y)$

α) $F(+\infty, +\infty) = 1$

β) $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$ δι' ὅλα τά x, y

γ) (α) Διά κάθε y

$$F(\infty, y) = P(X \leq \infty, Y \leq y) = P(Y \leq y) = F_Y(y)$$

(β) Ὁμοίως διά κάθε x

$$F(x, \infty) = F_X(x)$$

δ) Ἡ $F(x,y)$ εἶναι μή φθίνουσα συνάρτησις δι' ἑκάστην τῶν μεταβλητῶν x καί y, ἤτοι

$$F(x_1, y) \geq F(x_2, y) \quad \text{ἐάν} \quad x_1 > x_2 \quad (\text{διά κάθε } y)$$

$$F(x, y_1) \geq F(x, y_2) \quad \text{ἐάν} \quad y_1 > y_2 \quad (\text{διά κάθε } x)$$

ε) $$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ \Delta x > 0,\ \Delta y > 0}} F(x+\Delta x, y+\Delta y) \equiv F(x+, y+) = F(x,y), \text{ δι' ὅλα τά } (x,y)$$

ἤτοι ἡ $F(x,y)$ εἶναι συνεχής ἐκ δεξιῶν καί ἐκ τῶν "ἄνω"

Σημ. Ἀντιστρόφως δύναται νά δειχθῇ ὅτι ἐάν μία συνάρτησις $F(x,y)$ πληροῖ τάς ὡς ἄνω συνθήκας (ἰδιότητας) καί ἐπί πλέον τήν συνθήκην: Διά κάθε $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geq 0$$

τότε ἡ F εἶναι συνάρτησις κατανομῆς ἑνός τυχαίου ζεύγους (X,Y). (1)

Ἡ (1) ἐκφράζει τήν πιθανότητα $P[x_1 < X \leq x_2,\ y_1 < Y \leq y_2]$ καί προφανῶς διά δοθέν τυχαῖον ζεῦγος (X,Y) ἡ ἀντίστοιχος σ.κ $F(x,y)$ πληροῖ ταύτην. Ἐνδέχεται ὅμως μία συνάρτησις $F(x,y)$ νά πληροῖ τάς συνθήκας α) ÷ ε) ἀλλ' ὄχι τήν (1) (ἰδέ Ασκ. 10)

Παρατήρησις: Εἰς τήν περίπτωσιν, καθ' ἥν ἡ $F(x,y)$ εἶναι συνεχής καί ἔχομεν συνάρτησιν πυκνότητος $f(x,y)$ εἰς ἕνα σημεῖον (x,y),

τότε

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

7.3 Μερικαί διδιάστατοι κατανομαί. Πολυωνυμική κατανομή

α) Ὁμαλή εἰς τό μοναδιαῖον τετράγωνον:

$$f(x,y)=1 \quad \text{διά} \quad 0\le x\le 1 \ , \ 0\le y\le 1$$

Τότε ἡ συνάρτησις κατανομῆς δίδεται ὑπό τῆς

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv=\int_{0}^{x}\int_{0}^{y} du\,dv = xy, \ 0\le x\le 1 \ , \ 0\le y\le 1$$

$$F(x,y)=1 \quad \text{ἐάν} \quad x\geqslant 1 \ , \ y\geqslant 1$$

$$F(x,y)=x \quad '' \quad y\geqslant 1 \ , \ F(x,y)=y \ \text{ἐάν} \ x\geqslant 1$$

$$F(x,y)=0 \quad \text{διά} \quad x\le 0 \ \text{ἤ} \ y\le 0$$

β) Ἐκθετική: Ἔχουσα συνάρτησιν πυκνότητος

$$f(x,y)=e^{-(x+y)}, \quad x>0 \ , \ y>0$$

καί συνάρτησιν κατανομῆς

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv=\int_{0}^{x}\int_{0}^{y} e^{-(u+v)}\,du\,dv$$

$$=\int_{0}^{x} e^{-u}\,du\int_{0}^{y} e^{-v}\,dv=(1-e^{-x})(1-e^{-y})$$

γ) Διδιάστατος κανονική. Λέγομεν ὅτι τό ζεῦγος $(X;Y)$ τῶν τυχαίων μεταβλητῶν X καί Y ἔχει τήν διδιάστατον κανονικήν κατανομήν ἐάν ἡ ἀπό κοινοῦ πυκνότης πιθανότητος τῶν X καί Y εἶναι τῆς μορφῆς

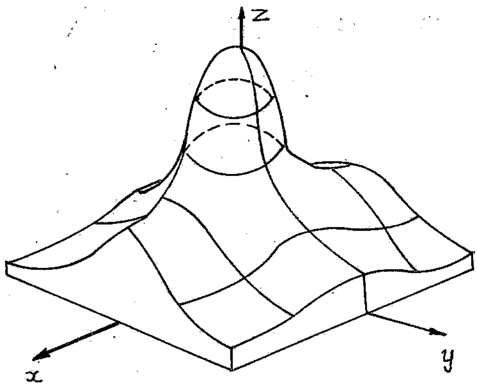
$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

Δύναται νά δειχθῇ ὅτι (Ἀσκ. 11) ἡ X, ὡς καί ἡ Y, εἶναι κανονική μέ

$$E(X)=\mu_1 \ , \ E(Y)=\mu_2 \ , \ \Delta(X)=\sigma_1^2 \ , \ \Delta(Y)=\sigma_2^2$$

Τό ρ ἰσοῦται μέ τόν καλούμενον συντελεστήν συσχετίσεως μεταξύ X καί Y ὁριζόμενον κατωτέρω (§ 7.5)

Ἡ ἐπιφάνεια $z = f(x, y)$ εἶναι κωδωνοειδοῦς σχήματος. Τό Σχ.1 παριστᾶ μίαν τοιαύτην ἐπιφάνειαν ὅταν $\mu_1 = \mu_2 = 0$.



Σχ.1. Διδιάστατος κανονική πυκνότης

δ) Διπλῆ ὑπεργεωμετρική.

Μια κάλπη περιέχει Ε ἐρυθράς, Μ μαύρας καί Λ λευκάς σφαίρας. Ἐξάγομεν διαδοχικῶς ἄνευ ἐπαναθέσεως ν σφαίρας. Ἔστω X ὁ ἀριθμός τῶν λευκῶν σφαιρῶν, αἱ ὁποῖαι ἐξάγονται καί Y ὁ ἀριθμός τῶν μαύρων σφαιρῶν. Ἡ ἀπό κοινοῦ κατανομή τῶν X καί Y ἤ τοῦ ζεύγους (X,Y) (ὁ ἀριθμός τῶν μαύρων εἶναι τότε ὡρισμένος, ν−X−Y) καλεῖται ***διπλῆ ὑπεργεωμετρική κατανομή***. Ἡ συνάρτησις πιθανότητος αὐτῆς εἶναι

$$p_{ij} = P(X=i\ ,\ Y=j) = \frac{\binom{\Lambda}{i}\binom{M}{j}\binom{E}{\nu-i-j}}{\binom{N}{\nu}} \qquad 0 \leq i+j \leq \nu \qquad (2)$$

ὅπου ἐτέθη

$$N = E + M + \Lambda$$

ε) Πολυωνυμική κατανομή

Θεωροῦμεν ν ἀνεξαρτήτους δοκιμάς, τοιούτας ὥστε εἰς ἑκάστην τούτων δύναται νά συμβῆ ἕν (καί μόνον) ἐκ k ($k \geq 2$) ἀσυμβιβάστων

καὶ μόνων δυνατῶν ἐνδεχομένων $A_1, A_2, \dots, A_k$.
Ἔστω X_i ὁ ἀριθμὸς ἐμφανίσεων τοῦ ἐνδεχομένου A_i εἰς ν δοκιμάς, $i=1,2,\dots k$. Ἡ ἀπὸ κοινοῦ κατανομὴ τῶν $X_1, X_2, \dots, X_k$ καλεῖται ***πολυωνυμικὴ κατανομή***. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ

$$P(A_i \text{ νὰ συμβῇ εἰς μίαν οἱανδήποτε δοκιμήν}) = p_i \quad , \quad i=1,2,\dots,k$$

ὅπου
$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$$
Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι, ἐπειδὴ τὸ ν εἶναι ὡρισμένον καὶ $X_1+X_2+\dots+X_k=\nu$ ἔχομεν $k-1$ ***συναρτησιακῶς ἀνεξαρτήτους*** τυχαίας μεταβλητάς ἔστω τὰς $X_1, X_2, \dots, X_{k-1}$ δεδομένου ὅτι $X_k = \nu - (X_1 + X_2 + \dots + X_{k-1})$.
Ἡ συνάρτησις πιθανότητος τῶν $X_1, \dots, X_{k-1}$ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$P(X_1=\nu_1, X_2=\nu_2, \dots, X_{k-1}=\nu_{k-1}) = \frac{\nu!}{\nu_1!\,\nu_2!\dots\nu_k!}\, p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \dots p_{k-1}^{\nu_{k-1}}\, p_k^{\nu} \qquad (3)$$

ὅπου
$$\nu_k = \nu - \nu_1 - \dots - \nu_{k-1} \quad , \quad p_k = 1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{k-1}$$
Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀνάλογος τῆς διωνυμικῆς.
Ὡς συνάρτησις πιθανότητος ἡ (3) πρέπει νὰ πληροῖ τὴν

$$\sum_{\nu_i} P\left[X_i = \nu_i \,,\ i=1,\dots,k\right] = 1$$

ἡ ὁποία εὐκόλως ἀποδεικνύεται τῇ βοηθείᾳ τοῦ ***τύπου τοῦ (ἀναπτύγματος) πολυωνύμου***

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^{\nu} = \sum_{\nu_1,\dots,\nu_k} \frac{\nu!}{\nu_1!\,\nu_2!\dots\nu_k!}\, x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_k^{\nu_k} \qquad (4)$$

ὅπου τὸ ἄθροισμα ἐκτείνεται ἐφ' ὅλων τῶν k-άδων $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k)$ τῶν ἀκεραίων $\nu_1, \dots, \nu_k$, οἱ ὁποῖοι πληροῦν τὰς $\nu_i \geq 0$ καὶ $\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_k=\nu$
Παράδειγμα: (***τριωνυμικῆς*** κατανομῆς). Ρίπτομεν ἕνα κύβον 10 φοράς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πιθανότης p_{34} νὰ φέρωμεν τρεῖς φορὰς "ἄσσον" καὶ τέσσαρας φορὰς "ἕξ".
Ἔστωσαν τὰ ἐνδεχόμενα

A_1: ἄσσος εἰς μίαν δοκιμήν

A_2: ἕξ " " "

A_3: ἕν τῶν 2, 3, 4, 5 εἰς μίαν δοκιμήν

Τότε ἔχομεν

$$P(A_1) = p_1 = \frac{1}{6} \ , \ P(A_2) = p_2 = \frac{1}{6} \ , \ P(A_3) = p_3 = \frac{2}{3}$$

καὶ $\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 4$, $(\nu_3 = 10 - 3 - 4 = 3)$. Ἄρα ἡ ζητουμένη πιθανότης

$$p_{34} = \frac{10!}{3!\,4!\,3!} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

7.4 Ἐπὶ μέρους (περιθώριοι) κατανομαί

Θεωροῦμεν δύο τυχαίας μεταβλητὰς X καὶ Y μὲ ἀπὸ κοινοῦ συνάρτησιν πυκνότητος $f(x,y)$. Αἱ ἐπὶ μέρους (ἀτομικαὶ) πυκνότητες τῶν X καὶ Y (κεχωρισμένως) δύνανται νὰ ληφθοῦν ἀπὸ τὴν πυκνότητα $f(x,y)$ ὡς ἑξῆς: Ἐὰν μὲ $f_1(x)$ συμβολίσωμεν τὴν πυκνότητα τῆς X καὶ $f_2(y)$ τὴν πυκνότητα τῆς Y, τότε λαμβάνομεν τὴν $f_1(x)$ ἐκ τῆς σχέσεως

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \quad (\text{δι' ἀπαριθμητὴν } f_1(x_i) = \sum_j f(x_i, y_j)) \tag{1}$$

καὶ τὴν $f_2(y)$ ἐκ τῆς

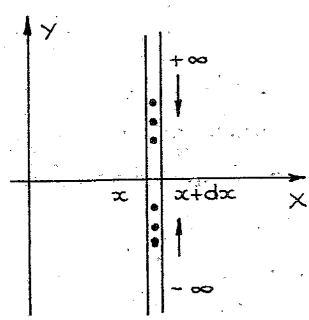
$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \quad (\text{δι' ἀπαριθμητὴν } f_2(y_j) = \sum_i f(x_i, y_j)) \tag{2}$$

ὅπου

$$f(x_i, y_j) = P\left[X = x_i \ , \ Y = y_j\right] = p_{ij}$$

εἶναι ἡ ἀπὸ κοινοῦ συνάρτησις πιθανότητος τῶν X, Y.

Ἡ (1) προκύπτει διὰ συσσωρεύσεως (ἄρα δι' ὁλοκληρώσεως ἢ ἀθροίσεως) ὅλων τῶν "μαζῶν πιθανότητος", αἱ ὁποῖαι κεῖνται εἰς τὴν ἀπέραντον λωρίδα (ζώνην), ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπὸ τῆς $X \in (x, x+dx)$, $-\infty < Y < +\infty$.



Σχ. 1.

Οὕτω προβάλλομεν ἐπί τοῦ ἄξονος τῆς X, τήν "μᾶζαν πιθανότητος" ἡ ὁποία κεῖται εἰς τό ἐπίπεδον, ὁπότε λαμβάνομεν τήν καλουμένην *ἐπί μέρους* ἤ *περιθώριον* (marginal) πυκνότητα τῆς X (Σχ.1).
Ὁμοίως διά τήν (2) προβάλλομεν ἐπί τοῦ ἄξονος τῆς Y τήν μᾶζαν ἵνα λάβωμεν τήν πυκνότητα τῆς Y.
Σημείωσις: Ὁ ὅρος "ἐπί μέρους ἤ περιθώριος" χρησιμοποιεῖται εἰς την περίπτωσιν καθ' ἥν θεωροῦμεν μίαν τυχαίαν μεταβλητήν ἐν συνδυασμῷ πρός ἄλλας μεταβλητάς, καί θέλομεν νά προσδιορίσωμεν τήν κατανομήν αὐτῆς ὡς αὕτη προκύπτει ἐκ τῆς ἀπό κοινοῦ συχνότητος ὅλων τῶν μεταβλητῶν. Ὁ ὅρος "περιθώριος" προέρχεται ἐκ τῆς διατάξεως μιᾶς διμεταβλητῆς κατανομῆς εἰς πίνακα ὡς ὁ κατωτέρω, ὅπου.

$$p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{\nu} p_{ij} \qquad , \qquad p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{k} p_{ij}$$

X \ Y	y_1	y_2	y_3	...	y_ν	Περιθώριος τῆς X
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	...	$p_{1\nu}$	$p_{1\cdot}$
x_2						$p_{2\cdot}$
x_3						$p_{3\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
x_k	p_{k1}	p_{k2}	p_{k3}	...	$p_{k\nu}$	$p_{k\cdot}$
Περιθώριος τῆς Y	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$p_{\cdot 3}$	...	$p_{\cdot \nu}$	1

Γενικῶς ἐάν ἔχωμεν ν μεταβλητάς $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ μέ ἀπό κοινοῦ πυκνότητα $f(x_1, \ldots, x_\nu)$, τότε ἡ περιθώριος πυκνότης $f_1(x)$ τῆς X_1 δίδεται ὑπό τῆς

$$f_1(x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2,\ldots,x_\nu)\,dx_2\ldots dx_\nu$$

Ὁμοίως δι' ὁλοκληρώσεως ὅλων τῶν μεταβλητῶν ἐξαιρέσει τῆς x_i λαμβάνομεν τὴν (περιθώριον) κατανομὴν τῆς X_i $(i=1,2,\ldots,\nu)$· δι' ὁλοκληρώσεώς τῶν x_1, x_2 λαμβάνομεν τὴν (περιθώριον) πυκνότητα τῶν $X_3,\ldots,X_\nu$ κ.ο.κ. Προφανῶς, ἐν τῇ περιπτώσει ἀπαριθμητῶν μεταβλητῶν τὰ ἀνωτέρω ὁλοκληρώματα ἀντικαθίστανται ὑπὸ ἀθροισμάτων.

Παράδειγμα: Ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν τὴν (ὑπεργεωμετρικὴν) κατανομὴν τοῦ ἀριθμοῦ X τῶν λευκῶν σφαιρῶν εἰς δεῖγμα ν σφαιρῶν ὡς αὕτη προκύπτει ἐκ τῆς διπλῆς ὑπεργεωμετρικῆς (βλ. § 7.3(δ)). Ἔχομεν τότε

$$P_k=P[X=k]=\sum_{0\le \nu_2\le \nu-k}\frac{\binom{\Lambda}{k}\binom{M}{\nu_2}\binom{E}{\nu-k-\nu_2}}{\binom{N}{\nu}} \qquad (1)$$

Τοῦτο συνδυαζόμενον μὲ τὸ ὅτι ἡ (περιθώριος) κατανομὴ πιθανότητος τῆς X εἶναι ἡ ὑπεργεωμετρικὴ (ἴδε § 4.2)

$$p_k=P[X=k]=\frac{\binom{\Lambda}{k}\binom{M+E}{\nu-k}}{\binom{N}{\nu}} \qquad (2)$$

δίδει τὴν ἑξῆς ταυτότητα ἐπὶ τῶν διωνυμικῶν συντελεστῶν

$$\sum_{\nu_2}\binom{M}{\nu_2}\binom{E}{\nu-k-\nu_2}=\binom{M+E}{\nu-k}$$

ἢ θέτοντες $\nu-k=s$, $M+E=A$

$$\sum_{\nu_2}\binom{M}{\nu_2}\binom{A-M}{s-\nu_2}=\binom{A}{s} \qquad (3)$$

Οὕτω ἔχομεν ἕνα παράδειγμα χρήσεως πιθανοθεωρητικῶν ἀποτελεσμάτων εἰς τὴν ἀπόδειξιν μαθηματικῶν ἐξαγομένων. Ἡ (3) προκύπτει καὶ ἀπ' εὐθείας ἐκ τῆς (2) καὶ ἐκ τοῦ ὅτι $\sum p_k=1$.

8.1 Συσκεδασμός. Συσχέτισις. Παλινδρόμησις

Θεωρήσωμεν τήν συνάρτησιν $g(X,Y)$ τῶν τυχαίων μεταβλητῶν X καί Y· τότε ἡ $Z = g(X,Y)$ εἶναι μία ἄλλη τυχαία μεταβλητή τῆς ὁποίας ἡ μέση τιμή δίδεται ὑπό τῆς

$$E(Z) = E\left\{g(X,Y)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{διά συνεχεῖς} \quad (1)$$

$$= \sum_i \sum_j g(x_i,y_j)\,p_{ij} \quad \text{δι' ἀπαριθμητάς}$$

(πρβλ. $g(X)$ τῆς § 6.6). Ὡς καί διά τήν $E(X)$ (§6.4), λέγομεν ὅτι ἡ $E\left\{g(X,Y)\right\}$ ὑπάρχει ἐάν ἡ σειρά ἤ τό ὁλοκλήρωμα εἰς τήν (1) συγκλίνη ἀπολύτως.

Ἰδιαιτέρου ἐνδιαφέροντος εἰς τήν στατιστικήν εἶναι ἡ περίπτωσις

$$g(x,y) = (x-\mu)(y-\nu), \quad \text{ὅπου } \mu = E(X) \text{ καί } \nu = E(Y)$$

Ὁρισμός: Ἡ $E\left[(X-\mu)(Y-\nu)\right]$ καλεῖται ***συνδιακύμανσις*** ἤ ***συσκεδασμός*** (covariance) (ἤ ***μικτή ροπή*** δευτέρας τάξεως) τῶν X καί Y καί σημειοῦται διά τοῦ $Cov(X,Y)$ ἤ διά τοῦ σ_{xy}.

Ἐάν ἡ σ_{xy} εἶναι θετική τοῦτο σημαίνει ὅτι ὅταν ἡ μία μεταβλητή αὐξάνη τότε καί ἡ ἄλλη κατά μέσον ὅρον αὐξάνει. Ἀντιθέτως ἐάν ἡ $\sigma_{xy} < 0$ τότε τῆς μιᾶς μεταβλητῆς αὐξανομένης ἡ ἑτέρα ἐλαττοῦται κατά μέσον ὅρον.

Πρότασις 1: $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY) - \mu\nu$

Ἀπόδειξις:

$$Cov(X,Y) = E\left[(X-\mu)(Y-\nu)\right] = E\left[XY - \nu X - \mu Y - \mu\nu\right]$$

$$= E(XY) - E(\nu X) - E(\mu Y) + \mu\nu = E(XY) - \nu E(X) - \mu E(Y) + \mu\nu$$

$$= E(XY) - \mu\nu$$

Εὐκόλως ἀποδεικνύονται καί αἱ ἀκόλουθοι προτάσεις

Πρότασις 2. $Cov(X+Y,Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)$

Πρότασις 3. α) $Cov(X,X) = \Delta(X)$ β) $\Delta(X+Y) = \Delta(X) + \Delta(Y) + 2\,Cov(X,Y)$

Πρότασις 4. $Cov(\alpha X+\beta, \gamma Y+\delta) = \alpha\gamma\, Cov(X,Y)$

Οὕτω ὁ συσκεδασμός ἀποτελεῖ μέτρον συσχετίσεως δύο μεταβλητῶν. Οὗτος ὅμως ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν μονάδων μετρήσεως τῶν μεταβλητῶν. Διά τοῦτο ἀντ' αὐτοῦ χρησιμοποιοῦμεν τόν λεγόμενον ***συντελεστήν συσχετίσεως*** (correlation coefficient) ἤ ἁπλῶς ***συσχέτισιν*** μεταξύ δύο μεταβλητῶν. Οὗτος εἶναι καθαρός ἀριθμός.

Ὁρισμός: Ὁ συντελεστής συσχετίσεως μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητῶν X καί Y, συμβολιζόμενος συνήθως διά τοῦ $\rho=\rho(X,Y)$, ὁρίζεται ὑπό τῆς

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x\,\sigma_y}$$

ὅπου σ_x καί σ_y εἶναι αἱ τυπικαί ἀποκλίσεις τῶν X καί Y, ἀντιστοίχως. Ἐάν $\rho(X,Y)=0$ αἱ μεταβληταί X καί Y λέγονται ***ἀσυσχέτιστοι*** ἤ ***ὀρθογώνιοι***.

Ἰδιότητες τοῦ ρ. (I) Ὁ συντελεστής συσχετίσεως παραμένει ***ἀναλλοίωτος ὑπό γραμμικούς μετασχηματισμούς*** τῶν μεταβλητῶν, ἤτοι δέν μεταβάλλεται ἐάν ἀλλάξῃ ἡ ἀρχή τῶν ἀξόνων ἤ ἡ μονάς μετρήσεως, δηλ. ἐάν

$$X^*=\alpha X+\beta \qquad Y^*=\gamma Y+\delta \qquad \text{καί} \quad \gamma\delta>0$$

τότε

$$\rho(X^*,Y^*)=\rho(X,Y)$$

δι' ὅλας τάς σταθεράς β,δ καί ὁμόσημα α,γ.

Πράγματι, δυνάμει καί τῆς Πρ. 4, ἔχομεν

$$\rho(X^*,Y^*)=\frac{Cov(X^*,Y^*)}{\sigma_{x^*}\,\sigma_{y^*}}=\frac{\alpha\gamma\,Cov(X,Y)}{|\alpha||\gamma|\sigma_x\,\sigma_y}=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x\,\sigma_y}=\rho(X,Y)$$

Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης σημαίνει ὅτι ὁ συντελεστής συσχετίσεως μεταξύ δύο μεταβλητῶν δέν ἐπηρεάζεται ἀπό ἀλλαγάς τῶν μέσων τιμῶν καί τῶν διασπορῶν τῶν μεταβλητῶν. Διά τοῦτο διά τόν ὑπολογισμόν του $\rho(X,Y)$ δυνάμεθα νά ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ μεταβληταί εἶναι ὡς λέγομεν, ***τυποποιημέναι***, ἤτοι ἔχουν μέσην τιμήν 0 καί διασποράν τήν 1.

Ὁρισμός: Δοθείσης μιᾶς μεταβλητῆς X μέ $E(X)=\mu$, $\Delta^2(X)=\sigma^2$, καλοῦμεν ἀντίστοιχον τυποποιημένην τῆς X, ἔστω X^*, τήν

$$X^{*}=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

Ἀποδεικνύομεν τώρα τὴν δευτέραν σημαντικὴν ἰδιότητα του ρ.

(II) $$-1\leq\rho\leq 1 \tag{2}$$

Ἀπόδειξις: Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἔστωσαν αἱ τυποποιημέναι μεταβληταὶ X^* και Y^*. Τότε βάσει καὶ τῆς προτάσεως 3 β)

$$\Delta(X^*\pm Y^*)=\Delta(X^*)+\Delta(Y^*)\pm 2\,Cov(X^*,Y^*)=1+1\pm 2\rho=2(1\pm\rho) \tag{3}$$

Ἀλλὰ ἡ διασπορὰ εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ μὴ ἀρνητική· ἄρα

$$\Delta(X^*\pm Y^*)\geqslant 0 \tag{4}$$

Ὅθεν καὶ ἐκ τῆς (3) ἕπεται ἡ (2)

Πόρισμα: $|\rho|=1$, ἤτοι ὁ ρ λαμβάνει τὰς ἄκρας τιμὰς αὐτοῦ ± 1, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ὑπάρχῃ γραμμικὴ σχέσις μεταξὺ τῶν δύο μεταβλητῶν.
Ἀπόδειξις: Παρατηροῦμεν ὅτι $|\rho|=1$ ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, εἰς τὴν (4) ἰσχύῃ ἡ

$$\Delta(X^*\pm Y^*)=0$$

Ἀλλὰ τοῦτο ἰσχύει τότε καὶ μόνον ὅταν (ἴδε Ἀσκ. III 19)

$$P\left[X^*\pm Y^*=C\right]=1$$

καθότι μόνον μία σταθερά, ἤτοι ἐκφυλισμένη τυχαία μεταβλητή, ἔχει διασποράν μηδέν. Ἐπὶ πλέον ἡ σταθερὰ C πρέπει νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν μέσην τιμὴν τῶν $X^*\pm Y^*$, ἤτοι μηδέν. Ἄρα μὲ πιθανότητα τὴν 1 ἔχομεν

$$X^*\pm Y^*=0$$

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι ἰσχύει ἡ

$$X^*+Y^*=0$$

ἤτοι, συναρτήσει τῶν ἀρχικῶν μεταβλητῶν X, Y, ἰσχύει ἡ

$$\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}+\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}=0$$

ἐάν καί μόνον $\rho=\rho(X,Y)=-1$. Ὁμοίως ἰσχύει ἡ

$$\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}-\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}=0$$

ἐάν καί μόνον $\rho=\rho(X,Y)=+1$. Οὕτως ἐδείχθη ὅτι

i) ἐάν $\rho(X,Y)=1$, τότε

$$Y=\mu_y+\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\mu_x) \tag{5}$$

ii) ἐάν $\rho(X,Y)=-1$, τότε

$$Y=\mu_y-\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\mu_x) \tag{6}$$

Οὕτω ἐάν $|\rho|=1$ ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι ἡ "μᾶζα πιθανότητος" τῆς διδιαστάτου κατανομῆς τῶν X καί Y συγκεντροῦται ἐπί μιᾶς εὐθείας, ἔστω,

$$Y=\alpha+\beta X \tag{7}$$

μέ πιθανότητα τήν 1.

Διά τοῦτο ὡς διάστασις τῆς κατανομῆς αὐτῆς λαμβάνεται ἡ μονάς, ἤτοι ἡ διάστασις τοῦ γραμμικοῦ χώρου ἐπί τοῦ ὁποίου συγκεντροῦται. Μία τοιαύτη κατανομή καλεῖται ***ἰδιάζουσα*** (singular).

Γενικώτερον ἔχομεν τόν ἑξῆς ὁρισμόν.

Ὁρισμός: Ἡ κατανομή τοῦ ν-διαστάτου τυχαίου διανύσματος $(X_1, X_2, \ldots, X_\nu)$ καλεῖται ἰδιάζουσα ἐάν ὑπάρχῃ γραμμικός ὑπο-χῶρος L_k τοῦ ν-διαστάτου Εὐκλειδίου χώρου L_ν οὕτω ὥστε ἡ κατανομή νά συγκεντροῦται εἰς τόν L_k, ἤτοι

$$P\left[(X_1, X_2, \ldots, X_\nu)\in L_k\right]=1 \qquad (k=0,1,2,\ldots,\nu-1)$$

(Ὁ δείκτης k τοῦ L_k δηλοῖ χῶρον k διαστάσεων). Ἄλλως ἡ κατανομή τοῦ $(X_1, X_2, \ldots, X_\nu)$ λέγεται ***μή ἰδιάζουσα*** (consingular).

'Εάν ἡ ἐλαχίστη διάστασις τοῦ L_k, εἰς τόν ὁποῖον συγκεντροῦται ἡ κατανομή, εἶναι d, τότε λέγομεν ὅτι ἡ κατανομή τοῦ $(X_1, \ldots, X_\nu)$ εἶναι *βαθμοῦ d*.

Παρατηρήσεις: Ἡ περίπτωσις $d=0$ ἀντιστοιχεῖ εἰς κατανομήν συγκεντρωμένην εἰς ἕν μόνον σημεῖον. Μή ἰδιάζουσα κατανομή ἔχει βαθμόν ν.

'Επιστρέφοντες εἰς τήν σημασίαν τῶν τιμῶν τοῦ $\rho=\rho(X,Y)$ δυνάμεθα νά εἴπωμεν ὅτι ἡ τιμή τοῦ $|\rho|$ ὁρίζει τόν βαθμόν τῆς γραμμικότητος τῆς σχέσεως μεταξύ τῶν δύο μεταβλητῶν, ἤτοι, τόν βαθμόν τῆς συγκεντρώσεως (τῶν "μαζῶν" πιθανότητος) τῆς κατανομῆς περί τινα εὐθεῖαν.

'Ακριβέστερον, ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νά προσεγγίσωμεν ἤ ἐκτιμήσωμεν (προβλέψωμεν) τήν Y διά γραμμικῆς συναρτήσεως τῆς X. 'Εάν $|\rho|<1$, κατά τό προηγούμενον πόρισμα δέν ἰσχύει πλέον ἡ σχέσις

$$Y=\alpha+\beta X$$

ὡς ἴσχυεν διά $|\rho|=1$ (μέ πιθανότητα τήν μονάδα) ἀλλά δυνάμεθα νά θέσωμεν

$$Y=\alpha+\beta X+\varepsilon$$

ὅπου ε παριστᾶ τό σφάλμα (τυχαία μεταβλητή) τῆς προσεγγίσεως καί $E(\varepsilon)=0$.

Κατ' ἀρχήν τίθεται τό πρόβλημα τῆς ἐκλογῆς κατά κάποιον ἄριστον τρόπον τῶν σταθερῶν α, β. Ὡς κριτήριον ἀρίστης ἐκλογῆς χρησιμοποιεῖται ἡ ἐλαχιστοποίησις τοῦ καλουμένου *μέσου τετραγωνικοῦ σφάλματος* (mean square error) ἤ *τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων*. Τοῦτο ὁρίζεται ὡς ἡ μέση τιμή τοῦ τετραγώνου τοῦ σφάλματος:

$$E(Y-\alpha-\beta X)^2=E(\varepsilon^2) \tag{8}$$

Σημειωτέον ὅτι τό ε μετρᾶ τήν κατακόρυφον (κατά μῆκος τοῦ ἄξονος τῶν y) ἀπόκλισιν ἑνός σημείου (τιμῆς) (x,y) τῆς (X,Y) ἀπό τήν προσεγγίζουσαν εὐθεῖαν $y=\alpha+\beta x$.

Διά τήν ἐλαχιστοποίησιν τοῦ $E(\varepsilon^2)$, ἔχομεν

$$E(Y-\alpha-\beta X)^2 = E\left[(Y-\mu_y)-\beta(X-\mu_x)+(\mu_y-\alpha-\beta\mu_x)\right]^2$$

$$= \sigma_y^2+\beta^2\sigma_x^2+(\mu_y-\alpha-\beta\mu_x)^2-2\sigma_{xy}\beta \qquad (9)$$

θέτοντες $\mu_y-\alpha-\beta\mu_x=0$, ἤτοι

$$\alpha=\mu_y+\beta\mu_x, \qquad (10)$$

καί τήν παράγωγον τῆς (9) ὡς πρός β ἴσην πρός τό μηδέν, λαμβάνομεν

$$\beta=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}=\rho\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x}.$$

Οὕτω ἡ ἀρίστη κατά μέσον τετραγωνικόν σφάλμα, γραμμική προσέγγισις τῆς Y διά τῆς X δίδεται ὑπό τῆς εὐθείας

$$y=\mu_y+\rho\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\,(x-\mu_x) \qquad (11)$$

Αὕτη καλεῖται ***εὐθεῖα παλινδρομήσεως*** (regression line) ***ἐλαχίστων τετραγώνων*** τῆς Y ἐπί τήν X διέρχεται δέ διά τοῦ κέντρου (μ_x,μ_y) τῆς κατανομῆς τῶν X,Y. Ἡ κλίσις

$$\beta=\rho\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \qquad (12)$$

τῆς εὐθείας ταύτης λέγεται ***συντελεστής παλινδρομήσεως*** τῆς Y ἐπί τήν X. Τό ἐλάχιστον τοῦ μέσου τετραγωνικοῦ σφάλματος $E(\varepsilon^2)$, ἤτοι

$$\min_{\alpha,\beta} E(Y-\alpha-\beta X)^2=\sigma_y^2(1-\rho^2) \qquad (13)$$

καλεῖται ***διασπορά γραμμικῆς παλινδρομήσεως*** τῆς Y ἐπί τήν X ἤ ***ὑπόλοιπον διασπορᾶς*** ἐκ παλινδρομήσεως τῆς Y ἐπί τήν X. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀρχική διασπορά σ_y^2 τῆς Y ἐλαττοῦται ὑπό τήν ἀναλογίαν

$(1-\rho^2):1$, ὅταν ἐκ τῆς Y ἀφαιρεθῇ ἡ ἀρίστη γραμμική ἐκτίμησις (πρόβλεψις) αὐτῆς διὰ τῆς X. Ἡ πρόβλεψις τῆς Y εἶναι τόσον καλυτέρα, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν μικροτέρου ὑπολοίπου διασπορᾶς, ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ $|\rho|$.

Τὰ ἀνωτέρω δικαιολογοῦν τὴν ἑρμηνείαν τοῦ $\rho(X,Y)$ ὡς μέτρου τῆς γραμμικότητος τῆς σχέσεως τῶν X καὶ Y. Τελεία γραμμικότης ἀντιστοιχεῖ, ὡς εἴδομεν, εἰς $|\rho|=1$. Ἐὰν $\rho(X,Y)=0$ τότε, δυνάμει τῆς (13), οὐδεμία ἐλάττωσις τῆς διασπορᾶς τῆς Y ἐπέρχεται κατόπιν γραμμικῆς παλινδρομήσεως ἐπὶ τὴν X. Τὰ αὐτὰ ἰσχύουν καὶ διὰ τὴν γραμμικὴν παλινδρόμησιν τῆς X ἐπὶ τὴν Y.

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται (Ἄσκ. 13) ὅτι ἡ εὐθεῖα παλινδρομήσεως τῆς X ἐπὶ τὴν Y δίδεται ὑπὸ τῆς

$$x=\mu_x+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_y) \tag{14}$$

8.2 Ροπαὶ πολυδιαστάτων κατανομῶν. Πίναξ διασπορᾶς. Βαθμὸς κατανομῆς.

Ἐὰν εἰς τὴν (1) τῆς § 8.1 λάβωμεν $g(x,y)=x^r y^s$, τότε ἡ $E[g(X,Y)]$ δίδει τὰς καλουμένας μικτὰς ροπάς.

Ὁρισμός: Ἡ ***μικτὴ ροπὴ*** τάξεως $r+s$ μιᾶς διμεταβλητῆς (X,Y) ἢ τῆς ἀντιστοίχου διδιαστάτου κατανομῆς καλεῖται ἡ

$$\mu'_{rs}=E(X^r Y^s)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^r y^s f(x,y)\,dx\,dy & \text{διὰ συνεχεῖς}\\[2ex] \displaystyle\sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1}x_i^r y_j^s\,p_{ij} & \text{δι' ἀπαριθμητάς}\end{cases}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ $r=1$, $s=0$ καὶ $r=0$, $s=1$ ἔχομεν

$$\mu'_{10}=E(XY^0)=E(X)=\mu_x$$

$$\mu'_{01}=E(X^0Y)=E(Y)=\mu_y$$

Ὁμοίως ἔχομεν διά τάς ροπάς δευτέρας τάξεως

$$\mu'_{20} = E(X^2) \quad , \quad \mu'_{02} = E(Y^2) \quad , \quad \mu'_{11} = E(XY)$$

Αἱ κεντρικαί ροπαί ὁρίζονται ὁμοίως:

Ὁρισμός: Ἡ *μικτή κεντρική ροπή* τάξεως $r+s$ τῆς (X,Y) ὁρίζεται ὡς

$$\mu_{rs} = E\left[(X-\mu_x)^r . (Y-\mu_y)^s\right]$$

Παρατηροῦμεν ὅτι

$$\mu_{10} = E(X-\mu_x) = 0 \quad , \quad \mu_{01} = E(Y-\mu_y) = 0$$

$$\mu_{20} = E(X-\mu_x)^2 = \Delta(X) \quad , \quad \mu_{02} = E(Y-\mu_y)^2 = \Delta(Y)$$

ἐνῶ ἡ μικτή ροπή δευτέρας τάξεως

$$\mu_{11} = E(X-\mu_x)(Y-\mu_y) = Cov(X,Y) = \mu'_{11} - \mu'_{10} \cdot \mu'_{01}$$

Προφανῶς ἡ ἔννοια τῶν μικτῶν ροπῶν δύναται νά ἐπεκταθῆ καί διά ν- διαστάτους κατανομάς. Ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον παρουσιάζει εἰς τήν λεγομένην Ἀνάλυσιν Πολυμεταβλητῶν (Multivariate Analysis) ὁ πίναξ (μήτρα) τῶν διακυμάνσεων καί συνδιακυμάνσεων τῶν μεταβλητῶν.

Ὁρισμός: Ἔστω τό τυχαῖον διάνυσμα $X = (X_1, \ldots, X_\nu)$ καί ἔστωσαν

$$\sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j)$$

$$\rho_{ij} = \rho(X_i, Y_j) = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}} \qquad i,j = 1,2,\ldots,\nu$$

Ὁ πίναξ $\Sigma = (\sigma_{ij})$ καλεῖται *πίναξ διακυμάνσεων - συνδιακυμάνσεων* ἤ ἁπλῶς πίναξ διασπορᾶς (dispersion matrix) τῆς μεταβλητῆς X (ἤ τῆς κατανομῆς αὐτοῦ). Ὁ πίναξ $P = (\rho_{ij})$ καλεῖται *πίναξ συσχετίσεων* τοῦ X.

Ὁ πίναξ Σ (ἢ P) καθορίζει τὸν βαθμὸν τῆς κατανομῆς, ὡς ὡρίσθη εἰς τὴν § 8.1. Δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι ἰσχύει ἡ:

Πρότασις: Ὁ βαθμὸς (rank) τῆς κατανομῆς τοῦ τυχαίου διανύσματος $X=(X_1,\dots,X_\nu)$ ἰσοῦται μὲ τὸν βαθμὸν τοῦ πίνακος Σ. Οὕτω ἐὰν ὁ βαθμὸς τοῦ Σ εἶναι μικρότερος τοῦ ν, τότε ἡ κατανομὴ εἶναι ἰδιάζουσα.

Ἀπόδειξις: Ἔστω $\mu_i = E(X_i)$. Τότε ἡ τετραγωνικὴ μορφὴ

$$Q(\lambda)=\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\lambda_i\lambda_j\sigma_{ij}=E\left[\sum_{i=1}^{\nu}\lambda_i(X_i-\mu_i)\right]^2\geq 0 \quad \text{διὰ κάθε } \lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_\nu) \quad (1)$$

ἤτοι εἶναι ***γνησίως μὴ ἀρνητική***. Ἐκ τῆς θεωρίας τῶν πινάκων, ἕπεται ὅτι ὁ βαθμὸς τοῦ πίνακος Σ ἰσοῦται μὲ $\nu-s$, ὅπου s εἶναι ὁ ἀριθμὸς γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων $(\lambda_1,\dots,\lambda_\nu)$ τὰ ὁποῖα πληροῦν τὴν

$$\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\lambda_i\lambda_j\sigma_{ij}=0$$

ἄρα καὶ τὴν (πρβλ. (4) τῆς § 7.5)

$$\sum_{i=1}^{\nu}\lambda_i(X_i-\mu_i)=0 \quad (2)$$

Ἀφ' ἑτέρου, ὁ βαθμὸς τοῦ Σ εἶναι ν, ἤτοι ὁ πίναξ εἶναι ***μὴ ἰδιάζων*** (ἀντιστρέψιμος) ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ἡ τετραγωνικὴ μορφὴ

$$Q(\lambda)=\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\lambda_i\lambda_j\sigma_{ij}>0 \quad \text{διὰ κάθε } \lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_\nu)\neq(0,\dots,0),$$

ἤτοι ἡ $Q(\lambda)$ εἶναι ***γνησίως θετικὴ*** (positive definite), καὶ ἐπομένως δὲν ὑπάρχει $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_\nu)\neq 0$ πληροῦν τὴν (2).

Δεδομένου ὅτι ἡ διάστασις k τοῦ ὑποχώρου L_k τοῦ L_ν εἰς τὸν ὁποῖον συγκεντροῦται ἡ κατανομὴ ἰσοῦται μὲ $\nu-s$, ἡ ἀπόδειξις εἶναι πλήρης.

Παράδειγμα: Διὰ $\nu=3$ καὶ $s=1$ ἡ κατανομὴ εἶναι ἰδιάζουσα βαθμοῦ $\nu-s=2$, περιοριζομένη (συγκεντρουμένη) εἰς ἐπίπεδον τοῦ τριδιαστάτου χώρου. Διὰ $\nu=3$ καὶ $s=2$ ἡ κατανομὴ συγκεντροῦται ἐπ' εὐθείας.

Παρατήρησις: Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι ὁ πίναξ διασπορᾶς Σ πολυδιαστάτου κατανομής είναι πάντοτε *γνησίως μή άρνητικός*, ήτοι πληροί τήν (1), εάν δέ ή κατανομή είναι μή ιδιάζουσα τότε ό Σ είναι γνησίως θετικός καί ή ορίζουσα $|\Sigma|>0$. Προφανώς ό Σ είναι συμμετρικός πίναξ, ώς καί ό P τοῦ όποίου τά διαγώνια στοιχεία $p_{ii}=1$, $i=1,\ldots,\nu$.

Δύναται νά δειχθῆ ότι

$$|\Sigma| \leq \prod_{i=1}^{\nu} \sigma_{ii} \quad \text{καί} \quad |P| \leq 1 \qquad (3)$$

επί πλέον δέ

$$\begin{aligned} &\max\ |P| = 1 \quad \text{εάν δι' όλα τά } i \neq j \quad \rho_{ij}=0 \\ &\min\ |P| = 0 \quad \text{'' τουλάχιστον ένα} \quad \rho_{ij}=1 \end{aligned} \qquad (4)$$

Διά ταῦτα, ή μέν ορίζουσα $|\Sigma|$, εισήχθη υπό τοῦ Wilks ώς μέτρον διασποράς τής ν-διαστάτου κατανομής καί καλεῖται ***γενικευμένη διασπορά*** (generalized variance), ή δε $\sqrt{|P|}$ καλεῖται ***συντελεστής διασποράς ή σκεδασμοῦ*** (scatter coefficient).

9.1 Δεσμευμέναι (ὑπό συνθήκην) κατανομαί.

Ἡ έννοια τής δεσμευμένης κατανομής είναι ανάλογος τής εννοίας τής δεσμευμένης πιθανότητος ενός ενδεχομένου δοθέντος ενός άλλου. Οὕτω ή δεσμευμένη συνάρτησις κατανομής μιάς μεταβλητής X δοθέντος ενός ενδεχομένου B μέ $P(B)>0$ ορίζεται υπό τής

$$F(x|B) = P\left[X \leq x | B\right] = \frac{P\left[X \leq x, B\right]}{P(B)}$$

Έστω τώρα ή διδιάστατος κατανομή τῶν X,Y μέ από κοινοῦ συνάρτησιν κατανομής $F(x,y)$ καί από κοινοῦ συνάρτησιν συχνότητος $f(x,y)$.

Ορισμός: Ἡ ***υπό συνθήκην ή δεσμευμένη συνάρτησις κατανομής*** τής X δοθέντος ότι ή $Y\in B$, όπου $P\left[Y\in B\right]>0$, ορίζεται υπό τής

$$F_X(x|Y\in B) = P\left[X \leq x | Y\in B\right] = \frac{P\left[X \leq x, Y\in B\right]}{P\left[Y\in B\right]} \qquad (1)$$

Ὁμοίως ἡ ὑπό συνθήκην ἤ δεσμευμένη συνάρτησις συχνότητος τῆς X δοθέντος ὅτι $Y \in B$, ὅπου $P[Y \in B] > 0$ ὁρίζεται ὑπό τῆς

$$f_X(x_i \mid Y \in B) = \frac{P[X = x_i \,, Y \in B]}{P[Y \in B]} \quad \text{ἐάν ἡ } X \text{ εἶναι ἀπαριθμητή} \quad (2)$$

$$f_X(x \mid Y \in B) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P[x < X \le x + \Delta x, Y \in B]}{\Delta x P[Y \in B]} \quad \text{ἐάν ἡ } X \text{ εἶναι συνεχής} \quad (3)$$

Εὐκόλως δεικνύεται ὅτι, ἡ $F(x \mid Y \in B)$ ἔχει ὅλας τάς ἰδιότητας συναρτήσεως κατανομῆς, αἱ δέ $f_X(x \mid Y \in B)$ εἶναι συναρτήσεις συχνότητος ἤτοι $f_X(x \mid B) \geq 0$ καί

$$\sum_i f_X(x_i \mid Y \in B) = 1 \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x \mid Y \in B)\, dx = 1$$

Ἐάν ἡ (X, Y) εἶναι ἀπαριθμητή καί $B = \{y_j\}$, ὅπου $P[Y = y_j] = q_j > 0$, τότε ἡ

$$f_X(x_i \mid Y = y_j) = \frac{P[X = x_i \,, Y = y_j]}{P[Y = y_j]} = \frac{p_{ij}}{q_j} \quad (3)$$

ὁρίζει τήν ***δεσμευμένην συνάρτησιν πιθανότητος*** τῆς X δοθέντος ὅτι $Y = y_j$.

Ἐάν ἡ (X, Y) εἶναι συνεχής καί ληφθῇ $B = (y, y + \Delta y)$ τότε τό ὅριον

$$\lim_{\Delta y \to 0} f(x \mid y < Y \le y + \Delta y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P[x < X \le x + \Delta x, y < Y \le y + \Delta y]}{\Delta x P[y < Y \le y + \Delta y]} ,$$

ἐάν ὑπάρχῃ, καλεῖται ***δεσμευμένη πυκνότης τῆς X*** δοθέντος ὅτι $Y = y$. Αὕτη σημειοῦται διά $f_X(x \mid Y = y)$, εἶναι δέ

$$f_X(x \mid Y = y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx} \quad (4)$$

ὅπου $f(x,y)$ εἶναι ἡ ἀπὸ κοινοῦ πυκνότης τῶν X καὶ Y καὶ f_Y παριστᾷ τὴν πυκνότητα τῆς Y. Ὁμοίως ἡ δεσμευμένη συνάρτησις κατανομῆς τῆς X δοθείσης τῆς $Y=y$ ὁρίζεται ὑπὸ τῆς

$$F_X(x|Y=y)=\frac{\int_{-\infty}^{x} f(t,y)dt}{f_Y(y)}=\frac{\int_{-\infty}^{x} f(t,y)dt}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx} \qquad (5)$$

Σημειωτέον ὅτι ἡ (3) γραφομένη ὡς

$$q_j f_X(x_i|Y=y_j)=p_{ij} \quad ,$$

καὶ λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι $\sum_j p_{ij}=p_i$, δίδει τὴν

$$P[X=x_i]=\sum_j P[X=x_i|Y=y_j]P[Y=y_j] \qquad (6)$$

Αὕτη ἀποτελεῖ ***γενίκευσιν τοῦ τύπου τῆς ὁλικῆς πιθανότητος*** (§ 3.7) δι' ἀπαριθμητὰς μεταβλητάς.

Ὁμοίως διὰ συνεχεῖς μεταβλητὰς λαμβάνομεν τὸν ἑξῆς τύπον τῆς ὁλικῆς πιθανότητος

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x|Y=y)f_Y(y)dy \qquad (7)$$

Τὸ ***θεώρημα τοῦ Bayes*** γενικεύεται ὁμοίως. Οὕτω διὰ συνεχεῖς μεταβλητάς

$$f_X(x|Y=y)=\frac{f_Y(y|X=x)f_X(x)}{f_Y(y)}=\frac{f_Y(y|X=x)f_X(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y|X=x)f_X(x)dx} \qquad (8)$$

Παραδείγματα: α) Ἐξάγομεν 5 παιγνιόχαρτα ἐκ δέσμης παιγνιοχάρτων. Ἔστω X ὁ ἀριθμὸς τῶν "ἄσσων" καὶ Y τῶν "βαλέδων" τοὺς ὁποίους ἐξάγομεν. Ἡ δεσμευμένη πιθανότης τοῦ X δοθέντος ὅτι $Y=2$ εἶναι

$$f_X(x|Y=2)=\frac{P[X=x,\,Y=2]}{P[Y=2]}=\frac{\binom{4}{x}\binom{4}{2}\binom{44}{5-x-2}\Big/\binom{52}{5}}{\binom{4}{2}\binom{48}{3}\Big/\binom{52}{5}}=\frac{\binom{4}{x}\binom{44}{3-x}}{\binom{48}{3}} \quad ,$$

Τοῦτο εὑρίσκεται καὶ ἀπ' εὐθείας, δεδομένου ὅτι ἡ $f_X(x|Y=2)$ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν ὑπεργεωμετρικὴν πιθανότητα νὰ ἔχωμεν x ἄσσους ὅταν ἐκλέξωμεν 3 παιγνιόχαρτα ἐκ τῶν 48 παιγνιοχάρτων, ἐκτὸς τῶν « βαλέδων».

β) Ἔστω ἡ ὁμοιόμορφος κατανομὴ εἰς τὸ τρίγωνον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν ἀξόνων καὶ τῆς εὐθείας $x+y=2$. Ἡ πυκνότης τοῦ (X,Y) εἶναι

$$f(x,y)=\frac{1}{2} \quad \text{διὰ} \quad x+y\leq 2, \quad x\geq 0, \quad y\geq 0$$

Τότε ἡ ὑπὸ συνθήκην πυκνότης τῆς X δοθέντος ὅτι $Y=y$ δίδεται ὑπὸ τῆς

$$f_X(x|Y=y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{1}{2}}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\int_0^{2-y} dx}=\frac{1}{2-y} \quad 0<x\leq 2-y,$$

ἤτοι ἡ ὑπὸ συνθήκην κατανομὴ τοῦ X δοθέντος τοῦ $Y=y$ εἶναι ὁμοιόμορφος εἰς τὸ διάστημα $(0,2-y)$.

Ἡ ἐπέκτασις τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν διὰ περισσοτέρας τῶν δύο μεταβλητὰς εἶναι εὐνόητος. Οὕτω διὰ τρεῖς μεταβλητὰς X_1, X_2, X_3 μὲ ἀπὸ κοινοῦ συνάρτησιν πυκνότητος $f(x_1,x_2,x_3)$, ἡ ὑπὸ συνθήκην πυκνότης τοῦ (X_1,X_2) δοθέντος ὅτι $X_3=x_3$, ὅπου $f_{X_3}(x_3)>0$, ὁρίζεται ὑπὸ τῆς

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2|X_3=x_3)=\frac{f(x_1,x_2,x_3)}{f_{X_3}(x_3)}=\frac{f(x_1,x_2,x_3)}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2}$$

Ἡ δεσμευμένη συνάρτησις κατανομῆς τῆς X_1 δοθέντος ὅτι $X_2=x_2, X_3=x_3$, ὅπου $f_{X_2,X_3}(x_2,x_3)>0$, δίδεται ὑπὸ τῆς

$$F_{X_1}(x_1|X_2=x_2, X_3=x_3)=\frac{\int_{-\infty}^{x_1} f(t,x_2,x_3)dt}{f_{X_2,X_3}(x_2,x_3)}$$

9.2 Υπό συνθήκην μέση τιμή και διασπορά. Καμπύλαι παλινδρομήσεως.

Έστω $g(X)$ μία συνάρτησις της τυχαίας μεταβλητής X και $f_X(x|Y=y)$ η δεσμευμένη συνάρτησις συχνότητος της X επί τη υποθέσει ότι $Y=y$, ως ωρίσθη αύτη εις την § 9.1. Κατ' αναλογίαν προς την $E[g(X)]$ (ίδε § 6.6) έχομεν:

Ορισμός: Η υπό συνθήκην ή δεσμευμένη τιμή της $g(X)$ επί τη υποθέσει ότι $Y=y$, όπου $f_Y(y)>0$, ορίζεται ως εξής:

Διά συνεχείς,

$$E[g(X)|Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x|Y=y)\,dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x,y)\,dx}{f_Y(y)}$$

Δι' απαριθμητάς

$$E[g(X)|Y=y_j] = \sum_i g(x_i) f(x_i|Y=y_j) = \sum_i \frac{g(x_i)p_{ij}}{q_j}$$

Ούτω, θέτοντες

$$g(X) = X^\nu$$

λαμβάνομεν τας *δεσμευμένας ροπάς* της X, ν τάξεως. Ειδικώς διά $\nu=1$, έχομεν την *δεσμευμένην μέσην τιμήν* της X διά $Y=y$, ήτοι

$$E[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x|Y=y)\,dx \quad \text{διά συνεχείς} \quad (1)$$

και δι' απαριθμητάς $E[X|Y=y_j] = \sum_i x_i f_X(x_i|Y=y_j) = \sum_i \dfrac{x_i p_{ij}}{q_j}$ (2)

Διά δοθείσαν τιμήν του $Y=y$, η δεσμευμένη μέση τιμή του X είναι σταθερά, εξαρτωμένη όμως εν γένει εκ του y, έστω $m_1(y)$, ήτοι

$$E(X|Y=y) = m_1(y)$$

Ορισμός: Η καμπύλη με εξίσωσιν

$$x = m_1(y) = E[X|Y=y] \tag{3}$$

καλεῖται *καμπύλη (μέσης) παλινδρομήσεως* (mean regression) *τῆς X ἐπί τήν Y*. Ἡ $x = m_1(y)$ καλεῖται **συνάρτησις παλινδρομήσεως** (ὡς πρός μέσον) τῆς X ἐπί τήν Y. Ὁμοίως ὁρίζεται ἡ συνάρτησις καί καμπύλη

$$y = m_2(x) = E[Y|X=x] \tag{4}$$

(μέσης) παλινδρομήσεως τῆς Y ἐπί τήν X.

Εἴδομεν (§ 8.1) ὅτι διά $\rho(X,Y) = \pm 1$ ὑπάρχει γραμμική σχέσις μεταξύ X καί Y

$$Y = \alpha + \beta X$$

Προφανῶς εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν, αἱ ἀνωτέρω δύο καμπύλαι παλινδρομήσεως συμπίπτουν μέ τήν εὐθεῖαν ταύτην. Ἐν γένει ὅμως αἱ δύο καμπύλαι

$$y = m_2(x) \quad , \quad x = m_1(y)$$

δέν συμπίπτουν οὔτε καί εἶναι εὐθεῖαι. Ἐάν ἡ

$$y = m_2(x) = \alpha + \beta x$$

εἶναι εὐθεῖα, τότε λέγομεν ὅτι ἡ ***παλινδρόμησις τῆς Y ἐπί τήν X εἶναι γραμμική***. Τοιοῦτον παράδειγμα παρέχει ἡ σημαντικωτάτη διά τήν στατιστικήν ἀνάλυσιν περίπτωσις τῆς διδιαστάτου κανονικῆς κατανομῆς.

Παράδειγμα: Ἔστω $f(x,y)$ ἡ ἀπό κοινοῦ πυκνότης τῆς διδιαστάτου κανονικῆς κατανομῆς τῶν X καί Y (§ 7.3 (1)). Θά δείξωμεν ὅτι ἡ δεσμευμένη πυκνότης τῆς Y διά $X = x$ εἶναι ἐπίσης (ὡς καί ἡ ἀδέσμευτος) κανονική μέ μέσην

$$m_2(x) = \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1) \tag{5}$$

καί διασποράν

$$\sigma^2_{y\cdot x} = \sigma^2_2 (1-\rho^2). \tag{6}$$

Πράγματι

$$f_Y(y|X=x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

ὅπου ἡ $f(x,y)$ δύναται νά γραφῆ ὡς

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\left[y-\mu_2-\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right]^2} \cdot \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

ἡ δέ $f_X(x)$ εἶναι $N(\mu_1, \sigma_1^2)$. Ἄρα λαμβάνομεν

$$f_Y(y|X=x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\left[y-\mu_2-\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right]^2}$$

ἤτοι $N(m_2(x), \sigma^2_{y\cdot x})$ ὅπου αἱ $m_2(x)$ καί $\sigma^2_{y\cdot x}$ δίδονται ὑπό τῶν (5) καί (6). Σημειωτέον ὅτι ἡ (δεσμευμένη) διασπορά $\sigma^2_{y\cdot x}$ τῆς Y διά $X=x$ δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τήν (δεσμεύουσαν) τιμήν x τῆς X, ἐνῶ ἡ μέση $m_2(x)$ ἐξαρτᾶται γραμμικῶς.

Αἱ (1) καί (2) δύνανται νά χρησιμοποιηθοῦν διά τήν ἔκφρασιν τῆς ἐπί μέρους μέσης τιμῆς μιᾶς μεταβλητῆς συναρτήσει τῆς δεσμευμένης μέσης τιμῆς της δοθείσης ἑτέρας μεταβλητῆς. Οὕτω διά συνεχῆ κατανομήν (X,Y), λαμβάνοντες τήν $E[m_1(Y)]$ ἔχομεν ἐκ τῆς (1)

$$E[m_1(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} m_1(y) f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x|Y=y)dx\right) f_Y(y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\right)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = E(X),$$

ἤτοι ἐδείχθη ἡ σχέσις

$$E\left[E(X|Y)\right] = E(X) \tag{7}$$

Ὁμοίως ἐκ τῆς (4) δύναται νά δειχθῆ ὅτι

$$E\left[E(Y|X)\right] = E(Y) \tag{8}$$

Ἡ ἀπόδειξις δι' ἀπαριθμητάς εἶναι ὁμοία.

Τῇ βοηθείᾳ τούτων δυνάμεθα νά ἀποδείξωμεν τήν ἑξῆς ἰδιότητα τῶν συναρτήσεων παλινδρομήσεως.

Πρότασις: Ἡ συνάρτησις $m_2(X)$ παλινδρομήσεως τῆς Y ἐπί τήν X, ἐξ ὅλων τῶν συναρτήσεων $g(X)$ διά τῶν ὁποίων δύναται νά ἐκτιμηθῇ (προβλεφθῇ) ἡ Y, εἶναι ἡ ἀρίστη ὑπό τήν ἔννοιαν τοῦ ἐλαχίστου μέσου τετραγωνικοῦ σφάλματος, ἤτοι

$$\min_{g(X)} E\left[Y-g(X)\right]^2 = E\left[Y-m_2(X)\right]^2 \tag{9}$$

Ἀπόδειξις: Διά κάθε $X=x$ (ἴδε Ἀσκ. III 1.)

$$\min_{g(x)} E\left[Y-g(x)\right]^2 = E\left[Y-m_2(x)\right]^2 \tag{10}$$

Δυνάμει τῆς (8)

$$E\left[Y-g(X)\right]^2 = E\left\{E\left[(Y-g(X))^2 \mid X=x\right]\right\} = E\left\{E\left[(Y-g(x))^2 \mid X=x\right]\right\}$$

ὅπου βάσει τῆς (10) διά κάθε x

$$\min_{g(x)} E\left\{(Y-g(x))^2 \mid X=x\right\} = E\left[Y-m_2(x)\right]^2$$

Ὅθεν ἕπεται ἡ (9).

Πόρισμα: Ἐάν ἡ $m_2(x)$ εἶναι γραμμική, τότε αὕτη συμπίπτει μέ τήν εὐθεῖαν παλινδρομήσεως ἐλαχίστων τετραγώνων (§ 8.1)

Ὁρισμός: Ἡ ***δεσμευμένη διασπορά*** τῆς Y διά $X=x$ ὁρίζεται ὑπό τῆς

$$\Delta(Y \mid X=x) = E\left\{(Y-m_2(x))^2 \mid X=x\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} (y-m_2(x))^2 f_Y(y \mid X=x)\,dy$$

Δι' ἀπαριθμητάς ὁρίζεται ὁμοίως.

Ὅπως καί διά τήν ἀδέσμευτον διασποράν τῆς Y, εὑρίσκομεν τήν ἀνάλογον σχέσιν

$$\Delta(Y \mid X=x) = E\left[(Y^2 \mid X=x)\right] - \left[E(Y \mid X=x)\right]^2 = E\left[(Y^2 \mid X=x)\right] - \left[m_2(x)\right]^2.$$

Διά ν-διαστάτους μεταβλητούς ἡ γενίκευσις τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν εἶναι ἄμεσος. Οὕτω περιοριζόμενοι εἰς συνεχεῖς μεταβλητάς, καλοῦμεν ***ἐπιφάνειαν ἢ συνάρτησιν (μέσης) παλινδρομήσεως τῆς*** X_1 ***ἐπί τάς*** $X_2,\ldots,X_\nu$ τήν ὁριζομένην ὑπό τῆς

$$x_1 = m_1(x_2,\ldots,x_\nu) = E\left[X_1 \mid X_2 = x_2,\ldots,X_\nu = x_\nu\right]$$

Ὡς καί εἰς τήν περίπτωσιν τῆς καμπύλης παλινδρομήσεως ἡ $m_1(x_1,\ldots,x_\nu)$ δύναται νά εἶναι γραμμική, ἤτοι

$$x_1 = \alpha + \sum_{i=2}^{\nu} \beta_i x_i \ , \tag{11}$$

ὅτε ἡ ἐπιφάνεια παλινδρομήσεως τῆς X_1 ἐπί τάς $X_2,\ldots,X_\nu$ εἶναι ***ὑπερεπίπεδον*** (μέ ἐξίσωσιν τήν (11)). Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἡ (11) θά συμπίπτη μέ τό ὑπερεπίπεδον ἐλαχίστων τετραγώνων

$$x_1 = \alpha^* + \sum_{i=2}^{\nu} \beta_i^* x_i \tag{12}$$

ὅπου (Πρβλ. § 8.1) τά $\alpha^*, \beta_2^*,\ldots,\beta_\nu^*$ ἐλαχιστοποιοῦν τό μέσον τετραγωνικόν σφάλμα

$$E(X_1 - \alpha - \beta_2 X_2 - \cdots - \beta_\nu X_\nu)^2 \tag{13}$$

τῆς γραμμικῆς ἐκτιμήσεως τῆς X_1 διά τῶν $X_2,\ldots,X_\nu$.
Ἐάν ἡ ἀπό κοινοῦ κατανομή τῶν $X_1,\ldots,X_\nu$ εἶναι ν-διάστατος κανονική, ἤτοι ἔχει πυκνότητα

$$f(x_1,\ldots,x_\nu) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{\nu}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}(x_i-\mu_i)(x_j-\mu_j)\sigma_{ij}^*} \tag{14}$$

ὅπου Σ εἶναι ὁ πίναξ διασπορᾶς αὐτῆς καί $\Sigma^{-1} = (\sigma_{ij}^*)$ ὁ ἀντίστροφος τοῦ Σ, τότε ἡ ἐπιφάνεια παλινδρομήσεως καί τό ὑπερεπίπεδον παλινδρομήσεως ἐλαχίστων τετραγώνων συμπίπτουν. Τοῦτο ἀποδεικνύεται ὡς καί ἡ (5) ἀνωτέρω.

Σημειωτέον ὅτι, τό ἀντίστοιχον τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως $\rho(X_1,X_2)$

εἰς τὴν ἀνωτέρω περίπτωσιν τῆς *πολλαπλῆς παλινδρομήσεως* τῆς X_1 ἐπὶ τὰς $X_2, \ldots, X_\nu$ συμφώνως τῆς (13) εἶναι ὁ καλούμενος *συντελεστὴς πολλαπλῆς συσχετίσεως* μεταξὺ X_1 καὶ τῶν $X_2, \ldots, X_\nu$, ὁριζόμενος ὑπὸ τῆς

$$\rho_{1\cdot 2\ldots\nu} = \rho\left(X_1, \sum_{i=2}^{\nu} \beta_i^* X_i\right) \tag{15}$$

Δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι ("Ασκ. 21)

$$\max_{\beta_2,\ldots,\beta_\nu} \rho\left(X_1, \sum_{i=2}^{\nu} \beta_i X_i\right) = \rho_{1\cdot 2\ldots\nu} \tag{16}$$

καὶ ἑπομένως $0 \le \rho_{1\cdot 2\ldots\nu} \le 1$ //

9.3. Ἀνεξάρτητοι τυχαῖαι μεταβληταί

Ἡ ἔννοια τῆς ἀνεξαρτησίας δύο ἢ περισσοτέρων τυχαίων μεταβλητῶν εἶναι ἀνάλογος τῆς στοχαστικῆς ἀνεξαρτησίας δύο ἢ περισσοτέρων ἐνδεχομένων.

Ὁρισμός: Δύο τυχαῖαι μεταβληταὶ X καὶ Y καλοῦνται *στατιστικῶς* ἢ *στοχαστικῶς ἀνεξάρτητοι*, ἤ, ἁπλῶς, *ἀνεξάρτητοι*, ἐὰν δι' ὅλα τὰ (μετρήσιμα) ὑποσύνολα (ἀριθμοσύνολα) A καὶ B τῆς εὐθείας ἰσχύει ἡ σχέσις (πρβλ. § 3.3)

$$P[X\in A,\ Y\in B] = P[X\in A]\, P[Y\in B] \tag{1}$$

Ὁ ὁρισμὸς οὗτος εἶναι ἰσοδύναμος μὲ ἑκάστην τῶν σχέσεων

$$F(x,y) = F_X(x)\, F_Y(y) \qquad \text{δι' ὅλα τὰ } (x,y) \tag{2}$$

$$f(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) \qquad \text{〃 〃 〃 〃} \tag{3}$$

ὅπου $F(x,y)$ εἶναι ἡ ἀπὸ κοινοῦ συνάρτησις κατανομῆς τῶν X καὶ Y, καὶ $f(x,y)$ ἡ ἀπὸ κοινοῦ συνάρτησις συχνότητος αὐτῶν. Οὕτω ἡ μὲν (2) προκύπτει ἐκ τῆς (1) ἐὰν ληφθῇ $A = (-\infty, x]$ $B = (-\infty, y]$, ἡ δὲ (3) ἐὰν ληφθῇ $A = (x, x+dx)$ $B = (y, y+dy)$ διὰ συνεχεῖς καί $A=\{x\}$, $B=\{y\}$ δι' ἀπαριθμητάς. Εὐκόλως ἀποδεικνύονται καί τά ἀντίστροφα τούτων.

Ἐπί πλέον ἑκάστη τῶν (1), (2) καί (3) ἰσοδυναμεῖ μέ τό ὅτι ἡ δεσμευμένη κατανομή τῆς Y διά $X=x$ εἶναι ἡ αὐτή ὡς ἡ ἀδέσμευτος. Οὕτω π.χ. (ἴδε § 9.1)

$$F_Y(y|X=x)=F_Y(y) \quad , \quad f_Y(y|X=x)=f_Y(y)$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ἐπίσης ὅτι αἱ δεσμευμέναι ροπαί τῆς μιᾶς διά δεδομένην τιμήν τῆς ἑτέρας εἶναι αἱ αὐταί ὡς αἱ ἀδέσμευτοι τοιαῦται, π.χ.

$$E[X|Y=y]=E(X)=\mu_x \quad , \quad E[Y|X=x]=E(Y)=\mu_y$$

οὕτως ὥστε εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην αἱ συναρτήσεις παλινδρομήσεως εἶναι σταθεραί (ἀνεξάρτητοι τῶν δεσμευουσῶν τιμῶν), αἱ δέ "καμπύλαι" παλινδρομήσεως εἶναι αἱ εὐθεῖαι

$$x=m_1(y)=\mu_x \quad , \quad y=m_2(x)=\mu_y ,$$

κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας καί διερχόμεναι διά τοῦ κέντρου (μ_x,μ_y) τῆς κατανομῆς.

Παράδειγμα: Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτησις πυκνότητος τῆς (X,Y) εἶναι

$$f(x,y)=\alpha\beta e^{-\alpha x-\beta y} \quad , \quad x>0 \quad , \quad y>0$$

Εἶναι αἱ X καί Y ἀνεξάρτητοι; Πρός τοῦτο ἐλέγχομεν κατά πόσον ἰσχύει, π.χ., ἡ (3).

Ἔχομεν:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}\alpha\beta e^{-\alpha x-\beta y}\,dy=\alpha e^{-\alpha x} \quad , \quad x>0.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$f_Y(y)=\beta e^{-\beta y} \quad , \quad y>0$$

Ἄρα ἡ (3) ἰσχύει, καὶ αἱ X, Y εἶναι ἀνεξάρτητοι.

Γενικώτερον, ἐὰν ὡς εἰς τὸ ἀνώτερω παράδειγμα ἡ $f(x,y)$ δύναται νὰ γραφῇ ὡς γινόμενον

$$f(x,y)=g_1(x)g_2(y)$$

ὅπου g_1 εἶναι συνάρτησις μόνον τοῦ x καὶ ἡ g_2 μόνον τοῦ y, τότε, δεικνύεται εὐκόλως ὅτι, αἱ X καὶ Y εἶναι ἀνεξάρτητοι (αἱ g_1 καὶ g_2 δὲν συμπίπτουν κατ' ἀνάγκην μὲ τὰς ἐπὶ μέρους πυκνότητας τῶν X καὶ Y, ἀντιστοίχως).

Εἰς μερικὰς περιπτώσεις εἶναι πλέον εὔχρηστος ἡ (1). Οὕτω διὰ νὰ διαπιστώσωμεν ὅτι δύο μεταβληταὶ εἶναι στατιστικῶς ἐξηρτημέναι ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν (τουλάχιστον) ἕνα ζεῦγος συνόλων A, B διὰ τὰ ὁποῖα δὲν ἰσχύει ἡ (1).

Παράδειγμα: Ἔστω ἡ ὁμοιόμορφος κατανομὴ τῶν (X,Y) εἰς τὸν μοναδιαῖον κύκλον, μὲ

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi}, \qquad 0\le x^2+y^2\le 1$$

Παρατηροῦμεν ὅτι

$$0=P\left[X>\frac{\sqrt{2}}{2},\ Y>\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\neq P\left[X>\frac{\sqrt{2}}{2}\right]P\left[Y>\frac{\sqrt{2}}{2}\right],$$

ἐφ' ὅσον

$$P\left[X>\frac{\sqrt{2}}{2}\right]>0 \qquad P\left[Y>\frac{\sqrt{2}}{2}\right]>0.$$

Ἄρα αἱ X καὶ Y δὲν εἶναι ἀνεξάρτητοι.

Ἀνεξαρτησία ν μεταβλητῶν. Αἱ ν τυχαῖαι μεταβληταὶ $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ καλοῦνται ***ἀμοιβαίως*** ἢ ***τελείως ἀνεξάρτητοι*** (στατιστικῶς ἢ στοχαστικῶς) ἐὰν δι' οἱαδήποτε ὑποσύνολα (μετρήσιμα ἀριθμοσύνολα) τῆς εὐθείας $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ ἰσχύῃ ἡ

$$P\left[X_1\in A_1, X_2\in A_2, \ldots, X_\nu\in A_\nu\right]=\prod_{i=1}^{\nu}P\left[X_i\in A_i\right] \qquad (4)$$

Αἱ ἀντίστοιχοι τῶν (2) καὶ (3), συναρτήσει τῆς ἀπὸ κοινοῦ κατανομῆς $F(x_1, \dots, x_\nu)$ καὶ ἀπὸ κοινοῦ συναρτήσεως συχνότητος $f(x_1, \dots, x_\nu)$ τῶν $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ γίνονται

$$F(x_1, \dots, x_\nu) = \prod_{i=1}^{\nu} F_{X_i}(x_i) \quad \text{δι' ὅλα τὰ } (x_1, x_2, \dots, x_\nu) \qquad (5)$$

$$f(x_1, \dots, x_\nu) = \prod_{i=1}^{\nu} f_{X_i}(x_i) \quad \text{'' '' '' '' ''} \qquad (6)$$

Παρατήρησις: Ἐὰν αἱ $X_1, \dots, X_\nu$ εἶναι τελείως ἀνεξάρτητοι τότε οἱονδήποτε ὑποσύνολον τούτων $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_s}$ $(2 \leq s \leq \nu,\ 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq \nu)$ εἶναι ἐπίσης σύνολον τελείως ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν.

Σημειωτέον ὅτι ἀνεξαρτησία ἀνὰ ζεύγη τῶν X_i, X_j $i \neq j$ δὲν συνεπάγεται τὴν τελείαν ἀνεξαρτησίαν τῶν $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ (πρβλ. ἀνεξαρτησίαν ν ἐνδεχομένων § 3.4)

Ἡ ἔννοια τῆς ἀνεξαρτησίας εἶναι θεμελιώδους σημασίας εἰς τὴν Στατιστικὴν Ἀνάλυσιν. Οὕτω π.χ. εἰς τὴν Στατιστικὴν Συμπερασματολογίαν ὅπου ἐκ τοῦ καλουμένου δείγματος ἐξ ἑνὸς πληθυσμοῦ (κατανομῆς) συνάγονται συμπεράσματα περὶ τοῦ συνόλου πληθυσμοῦ, αἱ παρατηρήσεις ἐπὶ μιᾶς μεταβλητῆς X (τὸ δεῖγμα) ὑποτίθενται κατὰ κανόνα ἀνεξάρτητοι.

Ὁρισμός: Σύνολον ν ἀνεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητῶν $X_1, \dots, X_\nu$ ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει τὴν αὐτὴν συνάρτησιν κατανομῆς F καλεῖται ***τυχαῖον δεῖγμα μεγέθους ν ἐκ τῆς κατανομῆς F***. Ἐὰν X εἶναι τυχαία μεταβλητὴ μὲ σ.κ. F τότε αἱ $X_1, \dots, X_\nu$ λέγονται καὶ ***ἀνεξάρτητοι παρατηρήσεις*** (ἐπὶ) τῆς X.

Ὁρισμός: Αἱ τυχαῖαι μεταβληταὶ $X_1, \dots, X_\nu$ (ἀνεξάρτητοι ἢ μὴ) καλοῦνται ***ἰσόνομοι*** ἐὰν ἀκολουθοῦν τὴν αὐτὴν κατανομὴν (νόμον πιθανότητος).

Λίαν εὔχρηστοι εἶναι αἱ κατωθι προτάσεις.

Πρότασις: Ἐὰν $X_1, \dots, X_\nu$ εἶναι (τελείως) ἀνεξάρτητοι τότε καὶ αἱ τυχαῖα μεταβληταὶ

$$Y_1 = g_1(X_1)\ ,\quad Y_2 = g_2(X_2)\ ,\ \dots,\ Y_\nu = g_\nu(X_\nu)$$

εἶναι (τελείως) ἀνεξάρτητοι δι' οἱασδήποτε συναρτήσεις $g_1, \dots, g_\nu$.

Ἀπόδειξις: Ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι ἰσχύει ἡ

$$P\left[X_1 \in A_1,\ Y_2 \in A_2,\ \dots,\ Y_\nu \in A_\nu\right] = \prod_{i=1}^{\nu} P\left[Y_i \in A_i\right]$$

δι' ὅλα τά (μετρήσιμα) ἀριθμοσύνολα. Πρός τοῦτο ἔστωσαν $A_1^*,\ A_2^*, \dots, A_\nu^*$ τά ἀντίστροφα εἴδωλα (σύνολα) τῶν $A_1, \dots, A_\nu$, ἀντιστοίχως, ἤτοι

$$A_i^* = \left\{x_i : g(x_i) \in A_i\right\}\quad ,\quad i = 1, \dots, \nu.$$

Τότε ἔχομεν λόγῳ τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν $X_1, \dots, X_\nu$

$$P\left[Y_1 \in A_1,\ Y_2 \in A_2, \dots, Y_\nu \in A_\nu\right] = P\left[X_1 \in A_1^*,\ X_2 \in A_2^*, \dots, X_\nu^* \in A_\nu^*\right] = \prod_{i=1}^{\nu} P\left[X_i \in A_i^*\right]$$

$$= \prod_{i=1}^{\nu} P\left[Y_i \in A_i\right].$$

Πρότασις 2: Ἐάν αἱ $X_1, \dots, X_\nu$ εἶναι τελείως ἀνεξάρτητοι, τότε ἡ μέση τιμή τοῦ γινομένου $X_1 \cdot X_2 \cdots X_\nu$ ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τῶν ἀντιστοίχων μέσων τιμῶν αὐτῶν, ἤτοι

$$E\left[X_1 X_2 \dots X_\nu\right] = E\left[X_1\right] E\left[X_2\right] \dots E\left[X_\nu\right] \tag{7}$$

ὑποτιθεμένου, φυσικά, ὅτι αἱ $E[X_1], \dots, E[X_\nu]$ ὑπάρχουν.

Ἀπόδειξις: Ἀποδεικνύομεν τοῦτο διά συνεχεῖς μεταβλητάς. Δι' ἀπαριθμητάς ἡ ἀπόδειξις εἶναι ὁμοία. Ἔχομεν

$$E(X_1, \dots, X_\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \dots x_\nu\, f(x_1, \dots, x_\nu)\, dx_1 \dots dx_\nu$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \dots x_\nu\, f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_\nu}(x_\nu)\, dx_1 \dots dx_\nu = \prod_{i=1}^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} x_i f_{X_i}(x_i)\, dx_i$$

$$= \prod_{i=1}^{\nu} E(X_i)$$

ὅπου λόγῳ τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν $X_1, \dots, X_\nu$ ἡ ἀπό κοινοῦ συνάρτησις πυκνότητος τῶν $X_1, \dots, X_\nu$

$$f(x_1,\ldots,x_\nu) = \prod_{i=1}^{\nu} f_{X_i}(x_i)$$

Πόρισμα: Δύο ἀνεξάρτητοι μεταβληταί εἶναι ἀσυσχέτιστοι (ὀρθογώνιοι).

Ἀπόδειξις: Παρατηροῦμεν ὅτι

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = E[X]E[Y] - E[X]E[Y] = 0$$

Ὅθεν καί $\rho(X,Y) = 0$.

Παρατήρησις: Τό ἀντίστροφον δέν ἰσχύει ἐν γένει, δηλ., $\rho(X,Y)=0$ δέν συνεπάγεται ὅτι αἱ X,Y εἶναι κατ' ἀνάγκην ἀνεξάρτητοι. Διά τήν διδιάστατον κανονικήν § 7.3, ἐάν $\rho(X,Y)=0$ τότε αἱ X,Y εἶναι ἀνεξάρτητοι (Ἄσκ. 11 §14).

Πρότασις 3: Δι' οἱασδήποτε τυχαίας μεταβλητάς $X_1,\ldots,X_\nu$.

$$\Delta(X_1+X_2+\ldots+X_\nu) = \sum_{i=1}^{\nu}\Delta(X_i) + 2\sum_{i<j} Cov(X_i,X_j) \qquad (8)$$

Ἀπόδειξις: Ἔστω $\mu_i = E[X_i]$. Τότε

$$\Delta\left(\sum_{i=1}^{\nu} X_i\right) = E\left[\sum_{i=1}^{\nu} X_i - E\left(\sum_{i=1}^{\nu} X_i\right)\right]^2 = E\left[\sum_{i=1}^{\nu}(X_i-\mu_i)\right]^2 =$$

$$= E\left\{\sum_{i=1}^{\nu}(X_i-\mu_i)^2 + 2\sum_{i<j}(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{\nu} E(X_i-\mu_i)^2 + 2\sum_{i<j} E(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)$$

Ὅθεν ἕπεται ἡ (8).

Πόρισμα 1: Ἔστω ὅτι αἱ $X_1, X_2,\ldots,X_\nu$ εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταβληταί. Τότε

$$\Delta(X_1+X_2+\ldots+X_\nu) = \sum_{i=1}^{k}\Delta(X_i) \qquad (9)$$

ἤτοι ἡ διακύμανσις τοῦ ἀθροίσματος ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν διακυμάνσεων τούτων.

Πόρισμα 2. Ἐάν αἱ $X_1,\ldots,X_\nu$ εἶναι ἀνά δύο ὀρθογώνιοι τότε $\Delta\left(\sum_{i=1}^{\nu} X_i\right) = \sum_{i=1}^{\nu}\Delta X_i$.

Παρατήρησις: Δέον νά σημειωθῇ ὅτι ἡ μέση τιμή ἀθροίσματος τυχαίων μεταβλητῶν εἶναι πάντοτε (εἴτε αὗται εἶναι ἀνεξάρτητοι εἴτε ὄχι) ἴση πρός τό ἄθροισμα τῶν μέσων τιμῶν αὐτῶν.

Ἐφαρμογή τῆς (9): Διακύμανσις τῆς "διωνυμικῆς".

Ἔστω X τό πλῆθος τῶν ἐπιτυχιῶν εἰς ν δοκιμάς Bernoulli. Ὁρίζομεν τάς τυχαίας μεταβλητάς μηδέν - ἕνα :

$$X_i = 1 \quad \text{ἐάν ἡ } i \text{ δοκιμή δίδη ἐπιτυχίαν}$$

$$X_i = 0 \quad \text{ἐάν ἡ } i \text{ δοκιμή δίδη ἀποτυχίαν}$$

Τότε $X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$ ὅπου αἱ $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ εἶναι ἀνεξάρτητοι τυχαῖαι μεταβληταί, διότι ἡ X_i σχετίζεται μόνον μέ τήν i δοκιμήν καί αἱ ν δοκιμαί εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, ἀνεξάρτητα πειράματα.

Ἄρα ἐκ τῆς (9) ἔχομεν :

$$\Delta(X) = \Delta\left(\sum_{i=1}^{\nu} X_i\right) = \sum_{i=1}^{\nu} \Delta(X_i) = \nu p q$$

διότι

$$\Delta(X_i) = E\left[X_i^2\right] - \left\{E(X_i)\right\}^2 = p - p^2 = pq$$

ἐφ' ὅσον

$$E\left[X_i^2\right] = 1^2\, P\left[X_i = 1\right] + 0^2\, P\left[X_i = 0\right] = p.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Κύβος ρίπτεται 12 φοράς. α) Ποία ἡ πιθανότης ἵνα ἑκάστη ἕδρα αὐτοῦ ἐμφανισθῇ δύο φοράς; β) Ἔστω X ὁ ἀριθμός ἐμφανίσεων τοῦ 6 καί Y ὁ ἀριθμός ἐμφανίσεων τοῦ 1. Ποία εἶναι ἡ ἀπό κοινοῦ συνάρτησις πιθανότητος τῶν X καί Y;

2. Ἐκ συνήθους δέσμης 52 παιγνιοχάρτων σύρομεν 13 παιγνιόχαρτα. Νά δοθῇ ἡ συνάρτησις πιθανότητος τῶν ἀριθμῶν τῶν παιγνιοχάρτων ἑκάστου τῶν 4 εἰδῶν.

3. Δείξατε ὅτι ἡ πλέον πιθανή τιμή $(\nu_1^0, \nu_2^0, \ldots, \nu_k^0)$ πολυωνυμικῆς κατανομῆς πληροῖ τάς σχέσεις

$$\nu p_i < \nu_i^{\circ} \le (\nu+k-1)\, p_i \qquad i=1,2,\ldots,k$$

Ὑπόδειξις. Δείξατε ὅτι

$$p_i \nu_j^{\circ} \le p_j (\nu_i^{\circ}+1) \quad \text{διά} \quad i \neq j \;, \; i\,, j = 1,2,\ldots,k$$

4. *Πολλαπλῆ κατανομή Poisson.* Ἐάν ὁ ἀριθμός τῶν δοκιμῶν ν εἶναι μεγάλος καί τά p_i μικρά ὥστε τά $\nu p_i = \lambda_i$ εἶναι μέτρια, δείξατε ὅτι ἡ πολυωνυμική κατανομή δύναται νά προσεγγισθῇ ὑπό τῆς καλουμένης *πολλαπλῆς κατανομῆς Poisson*

$$e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k)} \frac{\lambda_1^{\nu_1} \cdot \lambda_2^{\nu_2} \cdots \lambda_k^{\nu_k}}{\nu_1!\, \nu_2! \cdots \nu_k!}$$

† 5. Ἐάν ἡ πυκνότης τῶν X καί Y εἶναι

$$f(x,y) = e^{-(x+y)} \qquad x>0 \;,\; y>0$$

νά εὑρεθοῦν αἱ πιθανότητες

α) $P[X>1]$ β) $P[1<X+Y<2]$ γ) $P[X>Y|X>1]$

† 6. Δεδομένου ὅτι ἡ πυκνότης τῶν X καί Y εἶναι

$$f(x,y) = \frac{2}{(1+x+y)^3} \qquad x>0 \;,\; y>0$$

νά εὑρεθῇ α) ἡ $F(x,y)$ β) ἡ $f_X(x)$ γ) ἡ $f_Y(y|X=x)$
Εἶναι αἱ X καί Y ἀνεξάρτητοι;

7. Εὕρετε τήν σ.κ. $F(x,y)$ ὁμοιομόρφου κατανομῆς εἰς τό τετράγωνον μέ κορυφάς τά σημεῖα $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(-1,0)$. Εἶναι αἱ μεταβληταί X καί Y ἀνεξάρτητοι;

† 8. Ἡ ἀπό κοινοῦ πυκνότης τῶν μεταβλητῶν X, Y, Z εἶναι

$$f(x,y,z) = 8xyz \qquad 0 < x, y, z < 1$$

Νά εὑρεθῆ ἡ

$$P[X < Y < Z]$$

9. Δι' ἑκάστην τῶν κάτωθι πυκνοτήτων $f(x,y)$ εὕρετε τάς $F(x,y)$, $F_X(x)$, $F_Y(y)$, $f_X(y)$, $f_Y(y)$, $f_X(x|Y=y)$, $f_Y(y|X=x)$.

α) $f(x,y) = 4xy \qquad 0 < x, y < 1$

β) $f(x,y) = \frac{1}{8}(x^2 - y^2)e^{-x} \qquad 0 < x < \infty \;, \quad |y| < x$

10.* ***Κατανομή τῶν ἄκρων παρατηρήσεων τυχαίου δείγματος.*** Δείξατε ὅτι αἱ συναρτήσεις κατανομῆς τῶν $\xi = \max(X_1, \ldots, X_\nu)$, $\eta = \min(X_1, \ldots, X_\nu)$ δίδονται ὑπό τῶν

$$F_\xi(x) = \{F(x)\}^\nu$$

$$F_\eta(x) = 1 - \{1 - F(x)\}^\nu$$

ὅπου F ἡ κοινή κατανομή τῶν x_i

11. Διά τήν κατανομήν (1) τῆς § 7.3, δείξατε τά κάτωθι:

α) Αἱ ἐπί μέρους κατανομαί τῶν X καί Y εἶναι κανονικαί καί

$$E(X) = \mu_1 \;, \quad E(Y) = \mu_2 \;, \quad Var(X) = \sigma_1^2 \;, \quad Var(Y) = \sigma_2^2$$

β) Ὁ συντελεστής συσχετίσεως τῶν X, Y ἰσοῦται μέ τήν σταθεράν ρ.

γ) Ἐάν $\rho = 0$, τότε αἱ X καί Y εἶναι ἀνεξάρτητοι.

δ) Ἐάν $p = P[X > \mu_1, Y > \mu_2]$, τότε $p = \frac{1}{4} + \frac{\arcsin \rho}{2\pi}$

12. Αἱ X καί Y ἔχουν τήν διδιάστατον κανονικήν κατανομήν τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως. Νά εὑρεθῆ ὁ συντελεστής συσχετίσεως τῶν μεταβλητῶν

$$\xi = aX + \beta Y \;, \quad \eta = aX - \beta Y$$

Ποίαν σχέσιν πρέπει νά πληροῦν αἱ σταθεραί α, β οὕτως ὥστε αἱ μεταβληταί ξ καί η νά εἶναι ἀνεξάρτητοι; (Δύναται νά ἀποδειχθῆ ὅτι αἱ ξ καί η ἔχουν τήν διδιάστατον κανονικήν κατανομήν).

† **13.** Δείξατε ὅτι:

α) Ἡ εὐθεῖα παλινδρομήσεως τῆς X ἐπί τήν Y δίδεται ὑπό τῆς (12) τῆς § 7.5.

β) Ἐάν $\rho(X,Y)=0$, τότε αἱ εὐθεῖαι παλινδρομήσεως (τῆς Y ἐπί τήν X καί τῆς X ἐπί τήν Y) εἶναι κάθετοι, ἐάν δέ $\rho=\pm 1$ αὗται συμπίπτουν.

γ) Αἱ εὐθεῖαι παλινδρομήσεως τέμνονται εἰς τό σημεῖον (μ_x, μ_y).

† **14.** Δύο ἀσυσχέτιστοι μεταβληταί δέν εἶναι κατ' ἀνάγκην ἀνεξάρτητοι (σημαντική ἐξαίρεσις εἶναι ἡ διδιάστατος κανονική, ἴδε Ἄσκ. 11). Ἔστω ἡ διδιάστατος ἀπαριθμητή κατανομή $p_{ij}=P[X=i\ ,\ Y=j]$ ὁριζομένη ὑπό τῆς

$$p_{0,1}=p_{1,0}=p_{-1,0}=\frac{1}{3}$$

Δείξατε ὅτι ἐνῶ $\rho(X,Y)=0$, αἱ X καί Y δέν εἶναι ἀνεξάρτητοι.

15. ***Τυχαία τοποθέτησις ν σφαιριδίων εἰς k κληρωτίδας (κελλία)***

Θεωρήσωμεν ν σφαιρίδια ἕκαστον τῶν ὁποίων τοποθετεῖται (ρίπτεται) τυχαίως εἰς ἕν τῶν k κελλίων, οὕτως ὥστε ἡ πιθανότης τοποθετήσεως οἱουδήποτε σφαιριδίου εἰς οἱονδήποτε κελλίον εἶναι $1/k$. Ἔστω X_i ὁ ἀριθμός σφαιριδίων, τά ὁποῖα τοποθετοῦνται (πίπτουν) εἰς τό κελλίον i, $i=1,2,\dots,k$.

Νά εὑρεθῆ

α) Ἡ ἀπό κοινοῦ συνάρτησις πιθανότητος τῶν $X_1, X_2, \dots, X_k$.

β) Πόσα σφαιρίδια ἀναμένονται εἰς ἕκαστον κελλίον;

γ) Δείξατε ὅτι $\rho(X_i, Y_j) = -\frac{1}{k-1}$ (Χρησιμοποιήσατε τό ὅτι $X_1+X_2+\dots+X_k=\nu=$ σταθερά).

16. Θεωρήσωμεν ἐπίπεδον τεμάχιον μετάλλου σχήματος τετραγώνου πλευρᾶς 30 cm περιέχοντος 10 γραμμὰς καὶ 10 στήλας κυκλικῶν ὀπῶν διαμέτρου 3 cm, τοιούτων ὥστε τὸ κέντρον ἑκάστης ὀπῆς νὰ ἀπέχῃ 3 cm ἐκ τοῦ κέντρου ἑκάστης γειτονικῆς ὀπῆς. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πιθανότητες ἵνα:

α) Κόκκος ἄμμου ριπτόμενος τυχαίως ἀπὸ τοῦ τετραγώνου πέσῃ εἰς ὀπὴν καὶ οὕτω διέλθῃ δι' αὐτῆς.

β) Σφαιρίδιον διαμέτρου 1,5 cm πίπτον ἐπὶ τοῦ μετάλλου διέλθῃ δι' ὀπῆς χωρὶς νὰ ἐγγίσῃ τὸ μέταλλον.

17. Δείξατε ὅτι δι' οἱασδήποτε μεταβλητὰς X καὶ Y ἔχομεν

$$\Delta(X) = E\left[\Delta(X|Y)\right] + \Delta\left[E(X|Y)\right]$$

18.* Ἐργαζόμενοι ὡς καὶ εἰς τὴν § 6.7., δείξατε ὅτι ἐὰν αἱ X καὶ Y εἶναι ἀνεξάρτητοι καὶ

$$E(X) = \mu_x \quad , \quad E(Y) = \mu_y \quad , \quad \Delta(X) = \sigma_x^2 \; , \; \Delta(Y) = \sigma_y^2 \; ,$$

τότε ἡ μέση τιμὴ καὶ διασπορὰ τῆς

$$Z = g(X, Y)$$

δίδονται κατὰ προσέγγισιν ὑπὸ τῶν

$$E(Z) \approx g(\mu_x, \mu_y) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\,\sigma_x^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\,\sigma_y^2\right),$$

$$\Delta(Z) \approx \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 ,$$

ὅπου ὅλαι αἱ μερικαὶ παράγωγοι ὑπολογίζονται εἰς τὸ (μ_x, μ_y)

†19. Ἔστω $X_1, \ldots, X_\nu$ τυχαῖον δεῖγμα ἐκ τῆς κατανομῆς F μὲ μέσην τιμὴν μ καὶ διασπορὰν σ^2.

Δείξατε ὅτι

$$E[\bar{X}] = \mu \quad , \quad \Delta(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{\nu}$$

ὅπου $\bar{X} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i$ εἶναι ὁ μέσος (ὅρος) τοῦ δείγματος.

20. Εἰς τὰς δειγματοληπτικὰς ἐρεύνας ἐνδιαφέρει ἡ ***ἐκτίμησις*** τοῦ λόγου δύο παραμέτρων, ἔστω $\lambda = \frac{\mu_x}{\mu_y}$ ὅπου μ_x ἡ μέση τιμὴ κατανομῆς F_X καὶ μ_y ἡ μέση τιμὴ κατανομῆς F_Y. Συνήθως ὡς "***ἐκτιμήτρια***" συνάρτησις του λ λαμβάνεται ὁ λόγος

$$\hat{\lambda} = \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} X_i / \nu_1}{\sum_{i=1}^{\nu_2} Y_j / \nu_2}$$

τῶν μέσων δείγματος ἐξ ἑκάστου πληθυσμοῦ. Εὕρετε, τῇ βοηθείᾳ τῆς Ἀσκ. 18, τὴν κατὰ προσέγγισιν μέσην τιμὴν καὶ διασπορὰν τοῦ $\hat{\lambda}$, δεδομένου ὅτι $\Delta(X) = \sigma_x^2$, $\Delta(Y) = \sigma_y^2$.

21. Δείξατε τὴν (16) τῆς § 9.2.

22.* Ἔστωσαν

$$x_1 = \alpha_{01} + \sum_{i=3}^{\nu} \beta_{1i} x_i \quad , \quad x_2 = \alpha_{02} + \sum_{i=3}^{\nu} \beta_{2i}$$

τὰ ὑπερεπίπεδα ἐλαχίστων τετραγώνων (ἴδε (12) τῆς § 9.2) τῶν X_1 καὶ X_2 ἐπὶ τὰς $X_3, \ldots, X_\nu$, καὶ ἔστωσαν

$$X_1^* = X_1 - \alpha_{01} - \sum_{i=3}^{\nu} \beta_{1i} X_i \quad , \quad X_2^* = X_2 - \alpha_{02} - \sum_{i=3}^{\nu} \beta_{2i} X_i \, .$$

Ὁ συντελεστὴς συσχετίσεως

$$\rho(X_1^*, X_2^*) = \frac{E(X_1^* X_2^*)}{E(X_1^{*2}) E(X_2^{*2})}$$

καλεῖται ***συντελεστὴς μερικῆς συσχετίσεως*** τῶν X_1 καὶ X_2 ἐπὶ τὰς (ἢ ὡς πρὸς τὰς) μεταβλητὰς $X_3, \ldots, X_\nu$, συμβολιζόμενος διὰ $\rho_{12.3\ldots\nu}$. Οὗτος ἀποτελεῖ μέτρον τῆς συσχετίσεως τοῦ X_1 καὶ X_2 κατόπιν ἀ-παλινδρομήσεως τῆς ἐπιδράσεως τῶν $X_3, \ldots, X_\gamma$.

Δείξατε ὅτι

$$\rho_{12\cdot 3} = \frac{\rho_{12} - \rho_{13}\,\rho_{23}}{(1-\rho_{23}^2)(1-\rho_{13}^2)}$$

ὅπου $\rho_{ij} = \rho(X_i, X_j)$.

23. Ἡ ἀπὸ κοινοῦ συνάρτησις $p(x_i, y_j)$ τῶν X καὶ Y δίδεται εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα

$x \backslash y$	-1	0	1	2	$p(x_i)$
-1	0,1	0,15	0	0,1	0,35
0	0,15	0	0,1	0,2	0,45
1	0,05	0,05	0	0,1	0,20
$p(y_j)$	0,3	0,2	0,1	0,4	1,00

α) Ὑπολογίσατε καὶ κατασκευάσατε τὰς εὐθείας παλινδρομήσεως ἐλαχίστων τετραγώνων τῆς X ἐπὶ τὴν Y καὶ τῆς Y ἐπὶ τὴν X.

β) Ἐὰν δύνασθε νὰ παρατηρήσητε μόνον τὴν X, ποία εἶναι ἡ καλυτέρα ἐκτίμησις τῆς Y συναρτήσει τῆς X ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ἐλαχίστου τετραγωνικοῦ σφάλματος;

Συγκρίνατε τὰ ἀποτελέσματα τῶν α) καὶ β).

24. Δείξατε ὅτι δύο ἀπαριθμηταὶ μεταβληταὶ X καὶ Y μὲ ἀπὸ κοινοῦ συνάρτησιν πιθανότητος $p_{ij} = P[X = x_i, Y = y_j]$ εἶναι ἀνεξάρτητοι ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ὁ πίναξ πιθανοτήτων $P = (p_{ij})$ ἔχῃ βαθμὸν τὴν 1.

25. Ἡ ἀπὸ κοινοῦ συνάρτησις συχνότητος τῶν X καὶ Y δίδεται ὑπὸ τῆς

$$f(x, y) = x + y \qquad \text{διὰ} \quad 0 \le x \le 1 \quad \text{καὶ} \quad 0 \le y \le 1$$

Εὕρετε τὰς (περιθωρίους) συναρτήσεις συχνότητος τῶν X καὶ Y. Εἶναι αὗται ἀνεξάρτητοι;

26. *Πρόβλημα τηλεπικοινωνιών*. Τό κανάλι ἑνός τηλεπικοινωνιακοῦ συστήματος δύναται νά θεωρηθῆ ὡς πομπός μιᾶς ἀκολουθίας παλμῶν (pulses). Ἕκαστος παλμός δύναται νά ἔχη τέσσαρα πλάτη ἀντιστοιχοῦντα εἰς τά ψηφία (σύμβολα) 0, 1, 2, 3. Ἔστω T τό ἐκπεμπόμενον (εἰσερχόμενον) σύμβολον καί R τό λαμβανόμενον (ἐξερχόμενον) σύμβολον. Τό κανάλι ἔχει τά ἑξῆς χαρακτηριστικά.

$$
\begin{aligned}
P\left[T=j \mid R=i\right] &= 0 && \text{ἐάν} \quad i \geqslant j+2 && \text{διά} \quad j=0,1\\
&= \frac{1}{4} && \quad " \quad i=j+1 && \quad " \quad j=0,1,2\\
&= \frac{1}{4} && \quad " \quad i=j-1 && \quad " \quad j=1,2,3\\
&\ 0 && \quad " \quad i\leq j-2 && \quad " \quad j=2,3
\end{aligned}
$$

Γνωστοῦ ὅτι $P[R=0]=0{,}3$, $P[R=1]=0{,}4$, $P[R=2]=0{,}2$ νά εὑρεθοῦν

α) ἡ πιθανότης μεταδόσεως ἑκάστου συμβόλου

β) ἡ πιθανότης λήψεως τοῦ i ὅταν ἐκπέμπεται τό j, δι' ὅλα τά i, j.

γ) ἡ πιθανότης σφάλματος (εἰς τήν λῆψιν) δι' ἕκαστον ἐκπεμπόμενον σύμβολον.

27. Παριστῶντες τήν Pascal ὡς ἄθροισμα γεωμετρικῶν μεταβλητῶν, εὕρετε τήν μέσην τιμήν καί διασποράν αὐτῆς.

δ 28. Δείξατε ὅτι διά κάθε ἐνδεχόμενον A μέ $P(A)>0$

$$E^2[X-c \mid A] \leqq E[(X-c)^2 \mid A]$$

ὅπου c σταθερά.

29. Δείξατε ὅτι διά κάθε σταθεράν c.

$$E[c-X] = E[c-X \mid X \leqq c]\cdot P(X\leqq c) + E[c-X \mid X>c]\cdot P(X>c)$$

30. Ἔστω $E[X]=0$ καί $\Delta(X)=\sigma^2$. Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις κατανομῆς $F(x)$ τῆς X πληροῖ τάς ἀνισότητας:

$$F(c) \geqslant \frac{c^2}{\sigma^2+c^2} \quad \text{διά} \quad c>0$$

$$F(c) \leqq \frac{\sigma^2}{\sigma^2+c^2} \quad \text{διά} \quad c<0$$

31. Δείξατε ὅτι δύο ὀρθογώνιοι δίτιμοι μεταβληταί Bernoulli εἶναι ἀνεξάρτητοι.

32. Δείξατε ὅτι, ἐάν ὁ πίναξ συσχετίσεων $P=(\rho_{ij})$ μιᾶς ν-διαστάτου κανονικῆς (§ 9.2) εἶναι διαγώνιος, δηλ. $\rho_{ij}=0$, $i\neq j$, τότε αἱ μεταβληταί εἶναι ἀνεξάρτητοι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΓΕΝΝΗΤΡΙΑΙ - ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ἡ μελέτη τῶν κατανομῶν τυχαίων μεταβλητῶν, ἰδίως τοῦ ἀθροίσματος ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, διευκολύνεται τὰ μέγιστα διὰ τῆς χρήσεως τῶν καλουμένων γεννητριῶν καί, κατ' ἐξοχήν, τῶν χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων. Οὕτω δοθείσης μιᾶς τῶν συναρτήσεων τούτων, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν διὰ παραγωγίσεως τὰς ῥοπὰς μιᾶς κατανομῆς. Ἀφ' ἑτέρου ἡ δύναμις τῆς χαρακτηριστικῆς συναρτήσεως μιᾶς τυχαίας μεταβλητῆς ἔγκειται εἰς τὸ ὅτι καθορίζει μονοσημάντως τὴν κατανομήν.

10.1 Γεννήτριαι πιθανοτήτων

Εἰς τὴν μελέτην μιᾶς ἀπαριθμητῆς μεταβλητῆς λαμβανούσης ἀκεραίας τιμὰς $k = 0, 1, 2, \ldots$, λίαν χρήσιμος εἶναι ἡ καλουμένη γεννήτρια πιθανοτήτων.

Ὁρισμός: Ἔστω ἡ ἀπαριθμητὴ μεταβλητὴ X μὲ συνάρτησιν πιθανότητος

$$p_k = P\left[X = k\right] \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Καλεῖται ***γεννήτρια πιθανοτήτων*** τῆς X ἡ συνάρτησις

$$P(S) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k S^k = E(S^X)$$

Αὕτη συγκλίνει ἀπολύτως τουλάχιστον διὰ $|S| \leq 1$.

Ὁ ἀνωτέρω ὁρισμὸς εἶναι μερικὴ περίπτωσις τοῦ ὁρισμοῦ τῆς γεννητρίας μιᾶς ***ἀκολουθίας ἀριθμῶν***.

Ὁρισμός: Δοθείσης μιᾶς ἀκολουθίας $\{a_\nu\}$ $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ πραγματικῶν ἀριθμῶν, καλοῦμεν γεννήτριαν αὐτῆς, ἔστω, $\gamma(S)$ τὴν σειρὰν

$$\gamma(s)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu s^\nu$$

ὑπό τόν ὅρον ὅτι συγκλίνει εἰς ἕνα διάστημα $|s|<\delta$

Παραδείγματα: α) Ἡ συνάρτησις

$$e^s=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{s^\nu}{\nu!}$$

εἶναι ἡ γεννήτρια τῆς ἀκολουθίας $\left\{\frac{1}{\nu!}\right\}$.

β) Ἡ $(1+s)^{-1}$ παράγει τήν ἀκολουθίαν $\{1,-1,1,-1,\ldots\}$.

Αἱ γεννήτριαι ἀποτελοῦν ἰσχυρόν μέσον διά τήν λύσιν πολλῶν προβλημάτων συνδυαστικῆς, ὡς δεικνύει τό κατωτέρω.

Παράδειγμα: Δοχεῖον περιέχει N σφαιρίδια ἠριθμένα ἀπό 1 ἕως N. Ἐξάγομεν μετ' ἐπαναθέσεως k σφαιρίδια. Ἔστω X_ν ὁ ἀριθμός τοῦ ν-οστοῦ ἐξαχθέντος σφαιριδίου. Νά εὑρεθῆ ἡ πιθανότης, ἔστω $p_n(k)$ ἵνα τό ἄθροισμα

$$Y=\sum_{\nu=1}^{k}X_\nu=n \tag{1}$$

Πρέπει νά εὕρωμεν κατά πόσους τρόπους (σημεῖα τοῦ δειγματοχώρου) δύναται νά πραγματοποιηθῆ ἡ (1). Πρός τοῦτο ἔστω $a_{k,n}$ ὁ ζητούμενος ἀριθμός καί

$$\gamma_k(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{k,n}s^n$$

ἡ γεννήτρια τῆς $\{a_{k,n}\}$.

Διά $k=1$ προφανῶς $a_{1,n}=1$ διά $n=1,2,\ldots,N$ καί ἑπομένως

$$\gamma_1(s)=\sum_{n=1}^{N}s^n$$

Βάσει τῆς κατωτέρω Προτάσεως 1, ἐπειδή αἱ $X_1,\ldots,X_\nu$ εἶναι ἀνεξάρτητοι, ἡ γεννήτρια τῆς Y εἶναι τό γινόμενον τῶν γεννητριῶν τῶν $X_1,\ldots,X_k$. Ἀφ' ἑτέρου αἱ $X_1,\ldots,X_k$ εἶναι ἰσόνομοι. Ἄρα

$$\gamma_k(s)=[\gamma_1(s)]^k=(s+s^2+\ldots+s^N)^k=s^k(1+s+\ldots+s^{N-1})^k \tag{2}$$

Τὸ ζητούμενον $\alpha_{k,n}$ εἶναι ὁ συντελεστὴς τοῦ s^{n-k} εἰς τὴν

$$(1+s+\dots+s^{N-1})^k = \left(\frac{1-s^N}{1-s}\right)^k = (1-s^N)^k (1-s)^{-k}$$

Ἀναπτύσσομεν τὴν $(1-s)^{-k}$ κατὰ τὸ θεώρημα τῆς σειρᾶς τοῦ διωνύμου, ἤτοι διὰ $|t|<1$ καὶ κάθε ἀριθμὸν α ἔχομεν τὸ ἀνάπτυγμα

$$(1+t)^\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} t^\nu$$

Οὕτω λαμβάνομεν

$$(1-s)^{-k} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-k}{\nu} (-1)^\nu s^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{k+\nu-1}{\nu} s^\nu$$

καὶ ἑπομένως

$$\gamma_k(s) = (1-s^N)^k (1-s)^{-k} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{k+\nu-1}{\nu} s^\nu \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i s^{Ni}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{k}{i} (-1)^i s^{Ni} \binom{\nu-Ni-1}{\nu-k-Ni} s^{\nu-k-Ni}$$

Εὑρίσκομεν λοιπὸν

$$\alpha_{k,n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{k}{i} (-1)^i \binom{n-Ni-1}{n-k-Ni} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n-Ni-1}{k-1} \quad (3).$$

καὶ ἡ ζητουμένη πιθανότης

$$p_n(k) = \frac{\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n-Ni-1}{k-1}}{N^k}$$

Ἐφαρμογὴ τῆς (3). Κατὰ τὴν ρῖψιν δύο κύβων ($k=2$) τὸ ἄθροισμα $n=10$ δύναται νὰ προκύψῃ κατὰ

$$\alpha_{2,n} = \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \binom{2}{i} \binom{10-6i-1}{2-1} = \binom{2}{0}\binom{9}{1} - \binom{2}{1}\binom{3}{1} = 3$$

τρόπους ($N=6$).

Πρότασις 1. Ἔστωσαν $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ ν ἀνεξάρτητοι τυχαῖαι μεταβληταὶ καὶ

$$Y = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$$

Τότε

$$P_Y(s) = \prod_{i=1}^{\nu} P_{X_i}(s)$$

'Απόδειξις : Δυνάμει τῆς Προτάσεως 2, § 9.3. ἔχομεν

$$P_Y(S) = E\left(S^{\sum_{i=1}^{\nu} X_i}\right) = E\left(\prod_{i=1}^{\nu} S^{X_i}\right) = \prod_{i=1}^{\nu} E(S^{X_i}) = \prod_{i=1}^{\nu} P_{X_i}(S).$$

Πρότασις 2: Ἡ παραγοντικὴ ροπὴ Π_ν ν τάξεως τῆς X δίδεται ὑπὸ τῆς

$$\Pi_\nu = P_X^{(\nu)}(1) \qquad \nu = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

ὅπου $P^{(\nu)}(S)$ παριστᾶ τὴν ν-οστὴν παράγωγον τῆς $P(S)$, καὶ

$$\Pi_\nu = E\left[(X)_\nu\right] \equiv E\left[X(X-1)\ldots(X-\nu+1)\right]$$

'Απόδειξις: Ἐὰν ἡ Π_ν ὑπάρχῃ, ἤτοι, ὑπάρχουν αἱ πρῶται ν ροπαί, τότε

$$\frac{d^\nu}{ds^\nu} P_X(s) = \frac{d^\nu}{ds^\nu} E\left(S^X\right) = E\,\frac{d^\nu}{ds^\nu}\left(S^X\right) = E\left[X(X-1)\ldots(X-\nu+1)S^{X-\nu+1}\right] \tag{5}$$

ἤτοι δυνάμεθα νὰ ἐναλλάξωμεν τὴν τάξιν τῆς παραγωγίσεως καὶ ἀθροίσεως.

Θέτοντες $S=1$ λαμβάνομεν τὴν (4)

Ὡς πόρισμα τοῦ ἀνωτέρω διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς μέσης τιμῆς καὶ διασπορᾶς μιᾶς μεταβλητῆς λαμβάνομεν τὰς σχέσεις

$$E(X) = P'(1), \quad \Delta(X) = P''(1) + P'(1) - \left[P'(1)\right]^2 \tag{6}$$

Γενικώτερον, εὐκόλως δεικνύεται ὅτι αἱ πρῶται ν παραγοντικαὶ ροπαὶ καθορίζουν τὰς πρώτας ν συνήθεις ροπὰς καὶ ἀντιστρόφως. Οὕτω ἡ P δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ ὡς ῥοπογεννήτρια (ἐμμέσως) τῶν συνήθων ροπῶν.

Παραδείγματα: α) Ἔστω ἡ *διωνυμικὴ* X ἡ ὁποία δύναται νὰ γραφῇ (ἴδε § 9.3) ὡς

$$X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$$

ὅπου αἱ X_i εἶναι ἀνεξάρτητοι καὶ ἰσόνομοι δίτιμοι μεταβληταὶ Bernoulli μέ $P[X_i = 1] = p$ $P[X_i = 0] = 1 - p = q$. Ἔχομεν

$$P_{X_i}(s) = s^1 p + s^0 q = ps + q$$

καὶ δυνάμει τῆς Προτάσεως 2

$$P_X(s) = (ps + q)^{\nu} \tag{7}$$

Ἐφαρμόζοντες τὴν (4), ἔχομεν

$$P'(s) = \nu p (ps + q)^{\nu - 1} \quad , \quad P''(s) = \nu(\nu - 1) p^2 (ps + q)^{\nu - 2}.$$

Ὅθεν

$$E(X) = P'(1) = \nu p \quad , \quad \Pi_2 = EX(X-1) = P''(1) = \nu(\nu - 1) p^2$$

καὶ ἐκ τῆς (6)

$$\Delta(X) = \nu(\nu - 1) p^2 + \nu p - (\nu p)^2 = \nu p q .$$

β) Γεωμετρική καὶ Pascal

Ἔστω ἡ γεωμετρική μεταβλητή X μέ συνάρτησιν πιθανότητος

$$p_k = p q^{k-1} \quad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

καὶ ἡ Pascal Y, ὅπου Y ὁ ἀριθμός δοκιμῶν μέχρι καὶ τῆς ν-οστῆς ἐπιτυχίας. Τότε

$$Y = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$$

ὅπου X_i εἶναι ἀνεξάρτητοι καὶ ἰσόνομοι γεωμετρικαὶ μεταβληταὶ μέ κατανομήν τήν (8). Ἔχομεν λοιπόν

$$P_Y(s) = \prod_{i=1}^{\nu} P_{X_i}(s) = \left[P_X(s)\right]^{\nu}$$

ὅπου ἡ γεννήτρια P_X τῆς (8) δίδεται ὑπό τῆς

$$P_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k s^k = p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} s^k = \frac{ps}{1 - qs}$$

Ἄρα ἔχομεν

$$P_Y(s)=\left(\frac{ps}{1-ps}\right)^{\nu} \tag{9}$$

καί δυνάμει τῆς (6) λαμβάνομεν (ἴδε καί Ἄσκησιν IV.27)

$$E(X)=\frac{1}{p},\quad \Delta(X)=\frac{q}{p^2},\quad E(Y)=\frac{\nu}{p},\quad \Delta(X)=\frac{\nu q}{p^2}$$

Ἡ P_X χρησιμεύει ἐπί πλέον διά τόν ὑπολογισμόν τῆς συναρτήσεως πιθανότητος $\{p_\nu\}$ τῆς X, ἐξ οὗ καί ὁ ὅρος "γεννήτρια πιθανοτήτων".

Πρότασις 3: Ἡ πιθανότης

$$p_\nu = P\left[X=\nu\right]=\frac{1}{\nu!}P_X^{(\nu)}(0)\quad,\quad \nu=0,1,2,\dots \tag{10}$$

Ἀπόδειξις: Ἔχομεν ἐκ τῆς (5)

$$P_X^{(\nu)}(s)=E\left[(X)_\nu s^{X-\nu+1}\right]=\sum_{k\geq 0}p_k(k)_\nu s^{k-\nu+1}=\nu!\,p_\nu+\sum_{i=1}^{\infty}(\nu+i)_\nu\, p_{\nu+i}\, s^{i}$$

θέτοντες $s=0$ λαμβάνομεν τήν (10).

10.2 Ἄθροισμα τυχαίου ἀριθμοῦ μεταβλητῶν. Σύνθετοι κατανομαί

Μία ἐνδιαφέρουσα ἐφαρμογή τῶν γεννητριῶν εἶναι εἰς τήν μελέτην τῆς κατανομῆς τοῦ ἀθροίσματος

$$Y(N)=X_1+X_2+\dots+X_N \tag{1}$$

ὅπου ὁ ἀριθμός N τῶν τυχαίων μεταβλητῶν $X_1,\dots,X_N$ εἶναι ἐπίσης τυχαία μεταβλητή.

Θεώρημα 1: Ἔστωσαν αἱ ἰσόνομοι καί ἀνεξάρτητοι μεταβληταί $X_1,\dots,X_\nu$ μέ συνάρτησιν πιθανότητος

$$p_k=P\left[X=k\right]\quad,\quad k=0,1,2,\dots$$

Ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ N εἶναι (στοχαστικῶς) ἀνεξάρτητος τῶν X_i καί ἔστω

$$f_\nu=P\left[N=\nu\right]\quad,\quad \nu=0,1,2,\dots$$

Τότε ἡ ρ. σ. $P_{Y(N)}(s)$ τοῦ $Y(N)$ εἶναι ἡ σύνθετος συνάρτησις τῆς $P_N(s)$ καὶ $P_X(s)$, ἤτοι

$$P_{Y(N)}(s) = P_N\left(P_X(s)\right) \tag{2}$$

Ἀπόδειξις: Δυνάμει τοῦ γενικευμένου θεωρήματος τῆς ὁλικῆς πιθανότητος (§9.1) ἔχομεν

$$P_{Y(N)}(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[P_{Y(N)}(s) \mid N=\nu\right]P\left[N=\nu\right] = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_{Y(\nu)}(s) f_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu P_X^{\nu}(s) = P_N\left(P_X(s)\right)$$

καθότι λόγῳ τῆς ἀνεξαρτησίας τοῦ N καὶ τῶν X_i, βάσει τῆς προτάσεως 1, § 10.1,

$$\left\{P_{Y(N)}(s) \mid N=\nu\right\} = P_{Y(\nu)}(s) = \left[P_X(s)\right]^{\nu}$$

Σύνθετος κατανομὴ Poisson. Ἐὰν ἡ N ἔχῃ τὴν κατανομὴν Poisson τότε λέγομεν ὅτι ἡ $Y(N)$ ἔχει τὴν σύνθετον κατανομὴν Poisson.

Ἡ γεννήτρια $P_\lambda(s)$ τῆς Poisson μὲ παράμετρον λ εἶναι

$$P(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} s^{\nu} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{\nu}}{\nu!} = e^{-\lambda}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\lambda s)^{\nu}}{\nu!} = e^{-\lambda}e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)} \tag{3}$$

Ὅθεν ἡ γεννήτρια τῆς συνθέτου Poisson εἶναι, βάσει τῆς (2),

$$P(s) = e^{\lambda\left(P_X(s)-1\right)}$$

Παράδειγμα: Ἔστω ὅτι αἱ X_i εἶναι αἱ δίτιμοι Bernoulli,

$$P\left[X_i=1\right] = p \quad , \quad P\left[X_i=0\right] = 1-p = q ,$$

ὅτε

$$P_X(s) = ps+q$$

Ἡ γεννήτρια τῆς (1) βάσει τῶν (2) καὶ (3) εἶναι

$$P(s) = e^{\lambda\left(P_X(s)-1\right)} = e^{\lambda(ps+q-1)} = e^{\lambda p(s-1)}$$

ἤτοι, ἡ $Y(N)$ εἶναι Poisson μὲ μέσην τιμὴν λp.

Τοῦτο δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ ἀπ' εὐθείας ὡς ἑξῆς:

$$P[Y(N)=k]=\sum_{\nu=1}^{\infty} P[Y(N)=k|N=\nu]\,P[N=\nu]=\sum_{\nu\geq 1} P[Y(\nu)=k]\;P[N=\nu]$$

Ἀλλά διά κάθε σταθερόν ν ἡ $Y(\nu)=X_1+\ldots+X_\nu$ εἶναι διωνυμική. Ἄρα ἔχομεν

$$P[Y(N)=k]=\sum_{\nu\geq 1}\binom{\nu}{k}p^k q^{\nu-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^\nu}{\nu!}=\sum_{\nu=k}^{\infty}\binom{\nu}{k}p^k q^{\nu-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^\nu}{\nu!}=$$

$$=e^{-\lambda}p^k\lambda^k\sum_{\nu=k}^{\infty}\frac{\nu!\,q^{\nu-k}}{k!(\nu-k)!}\,\frac{\lambda^{\nu-k}}{\nu!}=e^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}\sum_{\nu=k}^{\infty}\frac{(q\lambda)^{\nu-k}}{(\nu-k)!}=$$

$$=e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{q\lambda}=e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}$$

Ὅσον ἀφορᾷ τήν μέσην τιμήν τοῦ ἀθροίσματος $Y(N)$ ἔχομεν τό ἑξῆς:

Θεώρημα 2. Ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ $X_1, X_2, \ldots, X_\nu, \ldots$ εἶναι ἀνεξάρτητοι καί

$$\sum_{k=1}^{\infty} Q_k E(|X_k|)<\infty \tag{4}$$

ὅπου ἐτέθη

$$Q_k=P[N\geq k]$$

Τότε ἡ μέση τιμή τῆς $Y(N)$ ὑπάρχει καί

$$E[Y(N)]=\sum_{k=1}^{\infty} Q_k E(X_k) \tag{5}$$

Ἀπόδειξις: Ἐκ τοῦ γενικευμένου θεωρήματος τῆς ὁλικῆς πιθανότητος (§§ 9.1, 9,2)

$$E[Y(N)]=\sum_{\nu=1}^{\infty} E[Y(N)|N=\nu]\,P[N=\nu]=\sum_{\nu=1}^{\infty} P[N=\nu]\sum_{k=1}^{\nu} E(X_k)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} E(X_k)\sum_{\nu\geq k} P[N=\nu]\sum_{k=1}^{\infty} E(X_k)Q_k$$

Παρατήρησις: Ἐάν αἱ X_i εἶναι ἰσόνομοι καί $E(X)$ τοῦ X_i ὑπάρχῃ τότε ἡ (4) πληροῦται καί ἐκ τῆς (5) (ἴδε καί Ἄσκ. 6) λαμβάνομεν

$$E[Y(N)]=E(X)\sum_{k=1}^{\infty} Q_k=E(X)\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu P[N=\nu]=E(X)\,E(N) \tag{6}$$

Αὕτη δύναται νά δειχθῆ καί ἐπί τῇ βάσει τῆς (2) καί τῆς (6) § 10.1. Ἔχομεν

$$P'_{Y(N)}(S) = P'_N\left(P_X(S)\right) P'_X(s)$$

Θέτοντες $s=1$ λαμβάνομεν

$$E\left[Y(N)\right] = P'_{Y(N)}(1) = P'_N\left(P_X(1)\right) P'_X(1) = P'_N(1)\, P'_X(1) = E(N)\, E(X)$$

10.3 Ροπογεννήτριαι

Αἱ συνήθεις ῥοπαί $\mu'_\nu = E(X^\nu)$ μιᾶς μεταβλητῆς X δύνανται νά ὑπολογισθοῦν ἐκ τῶν ἀντιστοίχων παραγώγων ν τάξεως τῆς καλουμένης *ῥοπογεννητρίας* (συναρτήσεως).

Ὁρισμός: Ἡ ῥοπογεννήτρια, ἔστω $M_X(t)$, μιᾶς μεταβλητῆς X ἤ τῆς κατανομῆς αὐτῆς ὁρίζεται ὑπό τῆς

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum\limits_k p_k e^{tk} & \text{δι' ἀπαριθμητάς} \\ \int e^{tx} f(x)dx & \text{διά συνεχεῖς} \end{cases}$$

ὅπου t πραγματική παράμετρος.

Ἡ $M_X(t)$ ἐνδέχεται νά μήν ὑπάρχῃ, δηλ., νά μήν ὑπάρχῃ $t \neq 0$ τοιοῦτον ὥστε νά συγκλίνῃ ἀπολύτως ἡ ἀνωτέρω σειρά ἤ τό ὁλοκλήρωμα. Πλήν ὅμως, ὅπως καί αἱ γεννήτριαι πιθανοτήτων, διευκολύνουν τόν ὑπολογισμόν τῶν ῥοπῶν καί μάλιστα τόσον δι' ἀπαριθμητάς ὅσον καί διά συνεχεῖς μεταβλητάς ἔχουν δέ ἀναλόγους ἰδιότητας ὡς αἱ κατωτέρω.

Πρότασις 1. Ἔστω $Y = aX+\beta$. Ἐάν ἡ $M_X(t)$ ὑπάρχῃ, τότε

$$M_Y(t) = e^{\beta t} M_X(at) \tag{1}$$

Ἀπόδειξις: Ἔχομεν

$$M_Y(t) = E\left(e^{tY}\right) = E\left(e^{atX+\beta t}\right) = E\left(e^{\beta t} e^{atX}\right) = e^{\beta t} E\left(e^{atX}\right) = e^{\beta t} M_X(at)$$

Πρότασις 2. Ἐάν αἱ $X_1, \ldots, X_\nu$ εἶναι ἀνεξάρτητοι καί

$$Y = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$$

τότε

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{\nu} M_{X_i}(t) \qquad (2)$$

Ἀπόδειξις: Ὁμοία τῆς Προτ. 1 διά τάς γεννητρίας πιθανοτήτων.

Δύναται ἐπίσης νά δειχθῆ τό ἑξῆς:

Θεώρημα: Ἐάν $M_X(t)$ ὑπάρχη διά μίαν περιοχήν τοῦ 0, δηλ. διά $|t| \leq \delta$, $(\delta > 0)$, τότε ὅλαι αἱ ῥοπαί τῆς X ὑπάρχουν καί δίδονται ὑπό τῆς

$$E(X^{\nu}) = M_X^{(\nu)}(0) \quad , \quad \nu = 1, 2, \ldots \qquad (3)$$

ὅπου $M^{(\nu)}(t)$ παριστᾶ τήν ν-οστήν παράγωγον τῆς $M(t)$.

Ἀπόδειξις: (Περιληπτική). Ἡ $M_X(t)$ δύναται νά ἀναπτυχθῆ ὡς δυναμοσειρά

$$M_X(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} E(X^{\nu}) \frac{t^{\nu}}{\nu!}$$

διά $|t| < \delta$. Ἐπί πλέον δυνάμεθα τότε νά παραγωγίσωμεν οἱονδήποτε ἀριθμόν φορῶν τήν $M_X(t)$ ἐναλλάσσοντες τάς πράξεις τῆς παραγωγίσεως καί τῆς E (ὁλοκληρώσεως ἤ ἀθροίσεως), λαμβάνοντες οὕτω τήν (3)

Ἡ κατωτέρω πρότασις χρησιμεύει εἰς τήν εὕρεσιν τῆς ῥοπογεννητρίας M_X ἐκ τῆς γεννητρίας P_X πιθανοτήτων

Πρότασις 3. Ἐάν ἡ $M_X(t)$ ὑπάρχη, τότε

$$M_X(t) = P_X(e^t) \qquad \text{καί} \qquad P_X(t) = M_X(\log t) \qquad (4)$$

Παράδειγμα: Ἡ ῥοπογεννήτρια τῆς διωνυμικῆς X δυνάμει τῆς (4) καί τῆς (7) § 10.1. εἶναι

$$M_X(t) = P_X(e^t) = (pe^t + q)^{\nu}.$$

Ὁμοίως ἡ ῥοπογεννήτρια τῆς κατανομῆς Pascal εἶναι ἐκ τῆς (9), §10.1,

$$M_Y(t) = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^{\nu}$$

Ροπογεννήτρια τῆς κατανομῆς $X : N(\mu, \sigma^2)$. Ἔχομεν

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$

$$= e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y - t\sigma)^2} dy = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \qquad (5)$$

Ἐκ ταύτης διά $\mu = 0$ εὑρίσκομεν (προβλ. Ἀσκ. III 12) τάς ροπάς τῆς $N(0, \sigma^2)$

$$\mu'_{2k-1} = E(X^{2k+1}) = 0$$

$$\mu'_{2k} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \quad (2k-1)\sigma^{2k} \qquad \text{διά } k = 1, 2, \ldots$$

Ροπογεννήτρια τῆς Poisson. Ἔχομεν

$$M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k e^{tk} = \sum_{k \geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{tk} = e^{-\lambda} \sum_{k=0} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)} \qquad (6)$$

Ὅθεν καί ἐκ τῆς (4) ἡ γεννήτρια παραγοντικῶν ροπῶν τῆς Poisson εἶναι

$$P(t) = M(\log t) = e^{\lambda(t-1)}$$

Ὡς ἀνεφέρθη ἡ ροπογεννήτρια συνάρτησις μιᾶς κατανομῆς δέν ὑπάρχει πάντοτε. Ἐπί πλέον καί ἄν ὑποτεθῇ ὅτι ὑπάρχει δέν καθορίζει μονοσημάντως τήν κατανομήν· ἐνδέχεται δηλ. δύο διάφοροι κατανομαί νά ἔχουν τήν αὐτήν ροπογεννήτριαν (ἄρα καί τάς αὐτάς ροπάς). Εἰς μερικάς περιπτώσεις, ἡ ροπογεννήτρια $M(t)$ προσδιορίζει πλήρως τήν κατανομήν. Οὕτω δύναται νά δειχθῇ ὅτι ἐάν ἡ $M(t)$ εἶναι συνεχής εἰς μίαν περιοχήν $|t| < \varepsilon$ τοῦ μηδενός, τότε καθορίζει πλήρως τήν κατανομήν. Ἑτέρα ἱκανή συνθήκη εἶναι ἡ ἑξῆς, ἀναφερομένη ὡς

Πρόβλημα τῶν ροπῶν. Ἔστω $\mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_\nu, \ldots$ μία ἀκολουθία ροπῶν μιᾶς τυχαίας μεταβλητῆς X. Ἐν γένει αἱ ροπαί αὗται δέν καθορίζουν μονοσημάντως μίαν κατανομήν. ***Ἱκανή συνθήκη*** πρός τοῦτο εἶναι ὅπως ἡ σειρά

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu'_i}{i!} t^i \qquad (7)$$

συγκλίνῃ ἀπολύτως διά κάποιο $t > 0$.

Διά τάς συνήθεις κατανομάς π.χ. Poisson, κατανομήν, Γ ή ροπογεννήτρια Μ καθορίζει τήν κατανομήν.

Σημειωτέον ότι ή συνθήκη (7) δέν είναι άναγκαία. Ούτω, ένώ αί ροπαί τής μεταβλητής $Z = X \log(1+Y)$, όπου X καί Y είναι έκθετικαί άνεξάρτητοι μέ πυκνότητας e^{-x} καί e^{-y}, καθορίζουν τήν κατανομήν τής Z (μονοσημάντως), ή συνθήκη (7) δέν πληρούται.

10.4 Χαρακτηριστικαί συναρτήσεις

Ἡ σημασία τής χαρακτηριστικής συναρτήσεως (γνωστής είς τήν άνάλυσιν ύπό τό όνομα μετασχηματισμός Fourier) έγκειται είς τό ότι, έν άντιθέσει πρός τήν ροπογεννήτριαν, αύτη ύπάρχει διά κάθε μεταβλητήν X καί έπί πλέον, όπερ καί σπουδαιότερον, ***καθορίζει μονοσημάντως*** (χαρακτηρίζει) τήν κατανομήν τής X. Ούτω ή χ.σ., έχουσα τάς ίδιότητας (1) καί (2) τής ροπογεννητρίας $M(t)$ (§10.3) καθίσταται ίσχυρότατον έργαλείον, είς τήν μελέτην τής κατανομής τού άθροίσματος άνεξαρτήτων μεταβλητών.

Ὁρισμός: Ἡ χαρακτηριστική συνάρτησις (χ.σ), έστω $\varphi(t)$ μιάς τυχαίας μεταβλητής X όρίζεται διά κάθε πραγματικήν τιμήν τής παραμέτρου t ύπό τής

$$\varphi(t) = E(e^{itX}) \qquad (1)$$

όπου $i = \sqrt{-1}$.

Δι' άπαριθμητάς μεταβλητάς μέ $p_k = P[X = x_k]$ ή $\varphi(t)$ γράφεται

$$\varphi(t) = \sum_k e^{itx_k} p_k \qquad (2)$$

ένώ διά συνεχείς μέ πυκνότητα $f(x)$ έχομεν

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx \qquad (3)$$

Δι' είσαγωγής τού καλουμένου όλοκληρώματος Stieltjes (ΐδε Συμπλήρωμα) αί (2) καί (3) (ώς καί γενικώτερον δι' οίανδήποτε κατανομήν ή $\varphi(t)$) δύνανται νά γραφούν ύπό τήν μορφήν

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x)$$

ὅπου F ἡ συνάρτησις κατανομῆς.

Κατ' ἀρχὴν ἡ χ.σ. πάντοτε ὑπάρχει διότι (κατά τόν τύπον τοῦ Euler)

$$\left|e^{itx}\right|=\left|\sigma\upsilon\nu x+i\eta\mu x\right|=1$$

Ἰδιότητες τῆς φ.

Πρότασις 1. Ἡ χαρακτηριστική συνάρτησις φ πληροῖ τάς

$$\varphi(0)=1\,,\ |\varphi(t)|\leq 1 \qquad \delta\iota\acute{\alpha} \quad -\infty<t<\infty$$

Ἀπόδειξις: Πράγματι

$$\varphi(0)=E(e^{i0X})=\int_{-\infty}^{\infty} 1\, dF(x)=1$$

καί

$$|\varphi(t)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx\right|\leq \int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{itx}\right| f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} dF(x)=1$$

Πρότασις 2. Ἡ $\varphi(t)$ εἶναι ὁμαλῶς συνεχής διά $t\in(-\infty,\infty)$.

Ἀπόδειξις: Διά κάθε t ἔχομεν

$$|\varphi(t+h)-\varphi(t)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}(e^{ix(t+h)}-e^{itx})\,dF(x)\right|=\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}(e^{ihx}-1)\,dF(x)\right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{itx}(e^{ixh}-1)\right| dF(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{ixh}-1\right| dF(x) \qquad (i)$$

Δοθέντος ἑνός $\varepsilon>0$, ἔστω M ἀρκούντως μεγάλον ὥστε

$$P\left[|X|>M\right]=\int_{|x|>M} dF(x)<\varepsilon$$

καί h ἀρκούντως μικρόν ὥστε διά $|x|\leq M$

$$\left|e^{ixh}-1\right|<\varepsilon$$

Τότε

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{ixh}-1\right|dF(x)=\int_{-M}^{M}\left|e^{ixh}-1\right|dF(x)+\int_{|x|>M}\left|e^{ixh}-1\right|dF(x)$$

$$\leq \varepsilon\int_{-M}^{M}dF(x)+2\int_{|x|>M}dF(x)\leq \varepsilon+2\varepsilon=3\varepsilon \tag{ii}$$

ἐφ' ὅσον $\left|e^{ixh}-1\right|\leq 2$.

Ἐκ τῶν ἀνισοτήτων (i) καί (ii) ἕπεται ἡ Πρότασις.

Πρότασις 3. Διά κάθε πραγματικόν t καί κάθε μεταβλητήν X

$$\varphi_X(-t)=\overline{\varphi_X(t)}$$

ὅπου $\bar{\alpha}$ παριστᾶ τόν συζυγῆ μιγαδικόν τοῦ α.

Ἀπόδειξις: Ἐκ τοῦ ὅτι διά μιγαδικήν μεταβλητήν $Z=X+iY$ ἔχομεν

$$E(Z)=E(X)+i\,E(Y)$$

καί

$$E(\bar{Z})=E(X-iY)=E(X)-i\,E(Y)=\overline{E(Z)}$$

ἔχομεν

$$\varphi_X(-t)=E(e^{-itX})=\overline{E(e^{itX})}=\overline{\varphi_X(t)}$$

Ἐργαζόμενοι ὡς καί διά τάς ροπογεννητρίας δυνάμεθα νά ἀποδείξωμεν τάς ἑξῆς προτάσεις.

Πρότασις 4. Ἐάν α καί β εἶναι σταθεραί καί $Y=\alpha X+\beta$ τότε

$$\varphi_Y(t)=e^{i\beta t}\varphi_X(\alpha t)$$

Πρότασις 5. Ἐάν αἱ $X_1,\dots,X_\nu$ εἶναι ἀνεξάρτητοι τότε ἡ χ.σ. τοῦ ἀθροίσματος $Y=X_1+\dots+X_\nu$ αὐτῶν ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τῶν χ.σ. ἑκάστης τούτων, ἤτοι

$$\varphi_Y(t)=\prod_{i=1}^{\nu}\varphi_{X_i}(t) \tag{3}$$

Εἰς τήν ἰδιότητα (3) καί τό γεγονός ὅτι ἡ χ.σ. καθορίζει μονοσημάντως τήν κατανομήν ὀφείλεται ἡ δύναμις τῶν χ.σ. εἰς τήν μελέτην τῆς κατανομῆς ἀθροίσματος ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν.

Παρατήρησις: Τό ἀντίστροφον τῆς Προτ. 5 δέν ἰσχύει. Οὕτω ἐκ τῆς

$$\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\,\varphi_Y(t) \qquad (4)$$

δέν ἕπεται ὅτι αἱ X καί Y εἶναι ἀνεξάρτητοι (Ἴδε Ἄσκ. 13)

Ἡ χαρακτηριστική συνάρτησις ὡς ῥοπογεννήτρια

Πρότασις 6. Ἐάν ἡ X ἔχῃ ῥοπήν ν τάξεως, τότε ἡ χ.σ. τῆς X ἔχει παράγωγον ν τάξεως καί διά $k\le \nu$

$$\varphi^{(k)}(0)=i^k E(X^k)=i^k\mu'_\nu \qquad (5)$$

Ἀπόδειξις: Ἔχομεν διά $k\le\nu$

$$\left|\int x^k e^{itx}\,dF(x)\right|\le\int |x|^k\,dF(x)$$

τό ὁποῖον ἐξ ὑποθέσεως ($E(X^\nu)<\infty \Longrightarrow E(X^k)<\infty$) συγκλίνει. Ἄρα τό ὁλοκλήρωμα

$$\int x^k e^{itx}\,dF(x)$$

συγκλίνει ὁμαλῶς ὡς πρός t καί ἡ παραγώγισις

$$\varphi^{(k)}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^k}{dt^k}e^{itx}\,dF(x)=\int_{-\infty}^{\infty} i^k x^k e^{itx}\,dF(x)$$

ἐπιτρέπεται. Θέτοντες $t=0$ λαμβάνομεν τήν (5)

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως καί τοῦ ἀναπτύγματος κατά Taylor προκύπτει τό

Θεώρημα: Ἐάν ἡ $E(X^\nu)$ ὑπάρχῃ, τότε ἡ $\varphi(t)$ ἀναπτύσσεται εἰς σειράν Taylor:

$$\varphi(t)=\sum_{k=0}^{\nu}\frac{(it)^\nu\mu'_k}{k!}+o(t^\nu)$$

ὅπου $o(t^\nu)$ παριστᾷ ποσότητα τοιαύτην ὥστε ὅταν τό $t\to 0$

$$\frac{o(t^\nu)}{t^\nu}\longrightarrow 0$$

Ἡμιαναλλοίωτοι ἢ ἀθροιστικαί (παράμετροι). Ἡ συνάρτησις

$$\psi_X(t) = \log \varphi_X(t)$$

καλεῖται ***γεννήτρια ἀθροιστικῶν*** παραμέτρων ἢ δευτέρα χαρακτηριστική συνάρτησις τῆς X.

Ἐάν $E(X^\nu)$ ὑπάρχη τότε ἡ $\psi_X(t)$ δύναται νά ἀναπτυχθῆ εἰς σειράν Taylor

$$\psi_X(t) = \sum_{j=0}^{\nu} K_j \frac{(it)^j}{j!} + o(t^\nu) \qquad (6)$$

ὅπου αἱ K_j καλοῦνται ***ἡμιαναλλοίωτοι ἢ ἀθροιστικαί*** (παράμετροι) τῆς X.

Ἐκ τῆς σχέσεως

$$\varphi(t) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu'_j}{j!}(it)^j = e^{\sum_{j=0}^{\infty} K_j \frac{(it)^j}{j!}}$$

διά συγκρίσεως τῶν συντελεστῶν τοῦ $(it)^j$ προκύπτουν αἱ σχέσεις μεταξύ ἡμιαναλλοιώτων K_j καί ροπῶν μ'_j!. Οὕτω λαμβάνομεν, π.χ.

$$K_1 = \mu'_1 = \mu$$

$$K_2 = \mu'_2 - \mu^2 = \sigma^2$$

$$K_3 = \mu'_3 - 3\mu\mu'_2 + 2\mu^3.$$

Ὁ ὅρος "ἡμιαναλλοίωτοι" (semi - inuariants) προέρχεται ἀπό τό ὅτι αἱ K_j, ἐκτός τῆς K_1, δεν μεταβάλλονται ὑπό μετασχηματισμούς ***μεταφορᾶς*** (ἀλλαγῆς τῆς ἀρχῆς μετρήσεως) τῆς X, δηλ.

$$X \longrightarrow X + c = Y$$

ὅπου c σταθερά. Πράγματι

$$\varphi_Y(t) = e^{ict}\varphi_X(t)$$

καί

$$\psi_Y(t) = ict + \psi_X(t)$$

οὕτως ὥστε μόνον ὁ συντελεστὴς τοῦ it, ἤτοι ἡ μέση τιμή $\mu = K_1$, μεταβάλλεται ὑπό τόν ἐν λόγῳ μετασχηματισμόν. Ἀφ' ἑτέρου ὁ ὅρος "ἀθροιστικαί" (cumulants) προέρχεται ἀπό τήν ἑξῆς ἰδιότητα.

Πρότασις 6. Ἐάν αἱ $X_1, \dots, X_\nu$ εἶναι ἀνεξάρτητοι καί $Y = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$, τότε ἡ ἀθροιστική K_j τάξεως j τοῦ ἀθροίσματος τούτων Y ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν ὁμοταξίων ἀθροιστικῶν τῶν $X_1, \dots, X_\nu$.

Ἀπόδειξις: Δυνάμει τῆς Προτ. 5 ἔχομεν

$$\psi_Y(t) = \log \varphi_Y(t) = \log \prod_{i=1}^{\nu} \varphi_{X_i}(t) = \sum_{i=1}^{\nu} \log \varphi_{X_i}(t) = \sum_{i=1}^{\nu} \psi_{X_i}(t)$$

Ὅθεν καί ἐκ τῆς (6) ἕπεται ἡ Πρότασις.

Παραδείγματα χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων.

1. ***Κανονική*** $N(\mu, \sigma^2)$. Ἐκ τῆς σχέσεως μεταξύ ῥοπογεννητριῶν καί χ.σ.

$$\varphi_X(t) = M_X(it)$$

καί τῆς (5) τῆς § 10.3 λαμβάνομεν τήν χ.σ. τῆς $N(\mu, \sigma^2)$

$$\varphi(t) = e^{i\mu t - \frac{1}{2} t^2 \sigma^2} \tag{7}$$

Ὅθεν ἡ δευτέρα χ.σ. τῆς $N(\mu, \sigma^2)$ εἶναι $\psi(t) = i\mu t - \frac{1}{2} t^2 \sigma^2$· οὕτω ὅλαι αἱ ἡμιαναλλοίωτοι τῆς κανονικῆς εἶναι μηδέν πλήν τῆς $K_1 = \mu$ καί $K_2 = \sigma^2$. Τοῦτο χαρακτηρίζει τήν κανονικήν κατανομήν.

2. ***Ἐκθετική.*** Ἔχομεν

$$\varphi(t) = \int_0^{\infty} \lambda e^{itx} e^{-\lambda x} dx = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-1}$$

Ἐξ αὐτῆς, δυνάμει τῆς Προτ. 5 λαμβάνομεν τήν χ.σ. τῆς Γ κατανομῆς μέ παραμέτρους ν καί λ, ἡ ὁποία εἶναι ἄθροισμα ν ἀνεξαρτήτων ἰσονόμων ἐκθετικῶν μεταβλητῶν (Ἴδε Ἄσκ. II 25). Οὕτω ἔχομεν

$$\varphi_\Gamma(t) = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-\nu} \tag{8}$$

3. ***Poisson.*** Χρησιμοποιοῦντες τήν εὑρεθεῖσαν $M(t)$ εἰς τήν (6) τῆς § 10.3, λαμβάνομεν

$$\varphi_X(t) = M_X(it) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

4. *Ὁμοιόμορφος εἰς τό (α,β).* Ἔχομεν

$$\varphi(t) = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} e^{itx}dx = \frac{e^{i\beta t} - e^{i\alpha t}}{(\beta-\alpha)it}$$

Διά τήν ὁμοιόμορφον εἰς τό $(-\alpha,\alpha)$ ἔχομεν τήν χ.σ.

$$\varphi(t) = \frac{e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t}}{2\alpha i t} = \frac{\sin \alpha t}{\alpha t}$$

Δοθείσης τῆς γεννητρίας παραγοντικῶν ροπῶν $P_X(t)$ δυνάμεθα νά ὑπολογίσωμεν τήν χ.σ. $\varphi_X(t)$ ἐκ τῆς σχέσεως

$$\varphi_X(t) = P_X(e^{it})$$

Οὕτω ἐκ τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς §10.1 ἔχομεν τάς χ.σ. τῶν κάτωθι ἀπαριθμητῶν κατανομῶν.

5. **Διωνυμική.** Ἐκ τῆς (7) τῆς §10.1 λαμβάνομεν

$$\varphi(t) = (pe^{it}+q)^{\nu} \qquad (9)$$

6. **Pascal.** Ἐκ τῆς (9) τῆς §10.1 θέτοντες e^{it} ἀντί s, ἔχομεν

$$\varphi(t) = \left(\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}\right)^{\nu}$$

Διά $\nu=1$ ἔχομεν τήν χ.σ. τῆς γεωμετρικῆς.

10.5 Θεώρημα ἀντιστροφῆς καί συνεχείας διά χαρακτηριστικάς συναρτήσεις

Ὡς ἤδη ἀνεφέρθη ἡ σπουδαιότης τῶν χ.σ. ἔγκειται εἰς τό ὅτι ἡ χ.σ. μιᾶς μεταβλητῆς X καθορίζει μονοσημάντως τήν κατανομήν τῆς X, ἤτοι, ὑφίσταται ἀμφιμονοσήμαντος σχέσις μεταξύ τῆς χ.σ. $\varphi(t)$ τῆς X καί τῆς συναρτήσεως συχνότητος $f(x)$ τῆς X. Ἐπί πλέον ἡ εἰσαγωγή τῆς χ.σ. ὑπό τοῦ P. Levy ἀπέβη ἰσχυρότατον ἐργαλεῖον εἰς τήν μελέτην τῆς ἀσυμπτωτικῆς συμπεριφορᾶς ἑνός ἀθροίσματος τυχαίων μεταβλητῶν (Νόμος τῶν Μεγάλων Ἀριθμῶν καί Κεντρικόν Ὁριακόν Θεώρημα, Κεφ. VII). Ταῦτα ἐκφράζονται εἰς τά κατωτέρω θεμελειώδη Θεωρήματα τῶν ὁποίων τήν ἀπόδειξιν, λόγῳ τοῦ πολυπλόκου καί ἐξειδικευμένου αὐτῆς, δίδομεν εἰς τό Συμπλήρωμα.

Θεώρημα (τύπος) τῆς ἀντιστροφῆς (Levy 1932). Ἔστω $F(x)$ ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῆς X καί $\varphi(t)$ ἡ χ. σ. αὐτῆς. Ἐάν τά $x+h$, $x-h$ ($h>0$) εἶναι σημεῖα συνεχείας τῆς F, τότε ἔχομεν

$$F(x+h)-F(x-h)=\lim_{c\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}\frac{\sin ht}{t}\,e^{-itx}\,\varphi(t)\,dt \qquad (1)$$

Ἐξ αὐτοῦ προκύπτει ὅτι ἡ σ. κ. $F(x)$ ὁρίζεται πλήρως ὑπό τῆς $\varphi(t)$ διά κάθε σημεῖον συνεχείας καί ἑπομένως διά κάθε x, διότι ἐάν δύο σ. κ. συμπίπτουν εἰς τά σημεῖα συνεχείας τότε θά συμπίπτουν (εἶναι ἴσαι) παντοῦ (ἴδε Ἄσκ. 14), δεδομένου ὅτι τά σημεῖα ἀσυνεχείας (πηδήματα) τῆς F ἀποτελοῦν τό πολύ ἀριθμήσιμον σύνολον. Οὕτω ἔχομεν τό

Πόρισμα: Ὑπάρχει ἀμφιμονοσήμαντος σχέσις μεταξύ κατανομῶν καί χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων, ἤτοι δοθείσης τῆς κατανομῆς F καί τῆς χ. σ αὐτῆς $\varphi(t)$ δέν ὑπάρχει ἄλλη κατανομή πλήν τῆς F μέ χ. σ. τήν φ. Εἰδικῶς ἐάν ἡ $\varphi(t)$ εἶναι ἀπολύτως ὁλοκληρώσιμος εἰς τό $(-\infty,\infty)$, τότε τό ὁλοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ht}{t}\,e^{-itx}\,\varphi(t)\,dt$$

ὑπάρχει καί δεδομένου ὅτι

$$\left|\frac{\sin ht}{ht}\right|\leq 1$$

ἔχομεν

$$\lim_{h\to 0}F(x+h)-F(x-h)=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ht}{ht}\,e^{-itx}\,\varphi(t)\,dt=0$$

ἤτοι, ἡ F εἶναι συνεχής. Ἐπὶ πλέον ἐπειδὴ ὑπάρχει τό

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ht}{ht} e^{-itx} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t)\,dt,$$

θὰ ὑπάρχῃ καὶ τό

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h} = f(x)$$

Ἄρα ἐὰν ἡ $f(t)$ εἶναι (ἀπολύτως) ὁλοκληρώσιμος εἰς $(-\infty,\infty)$, τότε ἔχομεν τὸν τύπον ἀντιστροφῆς

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t)\,dt \qquad (2)$$

Οὕτως ἡ f εἶναι ὁ μετασχηματισμὸς ἢ τὸ ὁλοκλήρωμα Fourier τῆς φ.

Παράδειγμα: Ἔστω ὅτι ἡ χ.σ. τῆς X δίδεται ὑπὸ τῆς

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

θὰ εὕρωμεν τὴν ἀντίστοιχον πυκνότητα (ἡ $\varphi(t)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμος εἰς $(-\infty,\infty)$). Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t+ix)^2-(ix)^2}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}x^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t+ix)^2}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ἤτοι ἡ κατανομὴ εἶναι τυποποιημένη κανονικὴ $N(0,1)$, ὡς ἀνεμένετο ἐκ τῆς (7) τῆς § 10.4.

Ἐν γένει διὰ κάθε σημεῖον x συνεχείας τῆς $F(x)$, αὐτὴ δίδεται διὰ τῆς χ.σ. $\varphi(t)$ ὑπὸ τοῦ ἑξῆς τύπου

$$F(x) = \lim_{a\to-\infty}\lim_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\left(1-\frac{|t|}{A}\right)\frac{e^{-ita}-e^{-itx}}{it}\varphi(t)\,dt \qquad (3)$$

Δι᾽ ἀπαριθμητὴν μεταβλητὴν X ἔχομεν

$$p_k = P[X=x_k] = F(x_k)-F(x_k-) = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A} e^{-ix_k t}\varphi(t)\,dt \qquad (4)$$

Ἀντ' αὐτῆς ἐκ τῶν σχέσεων

$$\varphi(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{ikt}, \qquad e^{-itk^*}\varphi(t)=\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq k^*}}^{\infty} p_k e^{it(k-k^*)}+p_{k^*}$$

καί

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{it(k-k^*)}dt=0 \quad \text{διά κάθε } k\neq k^* \tag{5}$$

λαμβάνομεν διά κάθε $k^*=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$

$$p_{k^*}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk^*}\varphi(t)dt \tag{6}$$

Παράδειγμα: ***Διωνυμική***. Ἔστω ἡ χ.σ

$$\varphi(t)=(pe^{it}+q)^{\nu}$$

Ἐκ τῆς (6) ἔχομεν

$$p_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(pe^{it}+q)^{\nu}e^{-itk}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{s=0}^{\nu}\binom{\nu}{s}p^s e^{ist}q^{\nu-s}e^{-itk}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{s=0}^{\nu}\binom{\nu}{s}p^s q^{\nu-s}e^{it(s-k)}dt$$

Ὅθεν δυνάμει τῆς (5) λαμβάνομεν

$$p_k=\frac{1}{2\pi}\binom{\nu}{k}p_k^k q^{\nu-k}\int_{-\pi}^{\pi}dt=\binom{\nu}{k}p^k q^{\nu-k}$$

Ἄς χρησιμοποιήσωμεν τό Πόρισμα διά νά δείξωμεν τήν ἑξῆς θεμελιώδη ἰδιότητα τῆς κανονικῆς κατανομῆς καί τῆς κατανομῆς Poisson.

Πρότασις 1. Ἐάν αἱ $X_1,\ldots,X_\nu$ εἶναι ἀνεξάρτητοι κανονικαί τότε καί τό ἄθροισμά των εἶναι κανονική

Ἀπόδειξις: Ἔστω ὅτι ἡ X_i εἶναι $N(\mu_i,\sigma_i^2)$, $i=1,\ldots,\nu$ καί

$$Y=\sum_{i=1}^{\nu}X_i$$

Ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι ἡ χ.σ. τῆς Y εἶναι τῆς μορφῆς (7) τῆς §10.4.

Δυνάμει τῆς Προτ. 5, § 10.4 ἔχομεν

$$\varphi_Y(t) = \prod_{i=1}^{\nu} \varphi_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{\nu} e^{i\mu_i t - \frac{1}{2}\sigma_i^2 t^2} = e^{it\sum_{i=1}^{\nu}\mu_i - \frac{1}{2}t^2\sum_{i=1}^{\nu}\sigma_i^2}$$

Ὅθεν ἡ Y εἶναι $N(\mu, \sigma^2)$ μέ $\mu = \sum_{i=1}^{\nu} \mu_i$, $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{\nu} \sigma_i^2$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται διά τήν Poisson ἡ

Πρότασις 2. Ἐάν αἱ $X_1, \ldots, X_\nu$ εἶναι ἀνεξάρτητοι Poisson, τότε καί ἡ $Y = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$ εἶναι Poisson.

Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότητος τῆς κανονικῆς καί Poisson ἀναφέρεται ὡς ἡ ***ἀναπαραγωγική*** ἰδιότης αὐτῶν.

Ἐπί πλέον αἱ μορφαί τῶν χ.σ. τῆς κανονικῆς καί Poisson ὁδηγοῦν ἀμέσως εἰς τό ἑξῆς συμπέρασμα.

Πρότασις. Μία κανονική μεταβλητή ἤ μία μεταβλητή Poisson δύναται διά κάθε φυσικόν ἀριθμόν ν νά θεωρηθῆ ὡ ἄθροισμα ν ἀνεξαρτήτων καί ἰσονόμων μεταβλητῶν.

Μεταβληταί (ἤ κατανομαί) ἔχουσαι τήν ἰδιότητα ταύτην λέγονται ***ἐπ' ἄπειρον διαιρεταί*** (infinitely divisible).

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου μιᾶς ἐπ' ἄπειρον διαιρετῆς κατανομῆς προκύπτει ὅτι ἡ χ.σ. $\varphi(t)$ αὐτῆς δύναται νά γραφῆ ὑπό τήν μορφήν

$$\varphi(t) = \left[\varphi_\nu(t)\right]^\nu \qquad \text{διά } \nu = 1, 2, \ldots$$

ὅπου $\varphi_\nu(t)$ εἶναι κάποια χ.σ.

Ἡ κανονική καί ἡ Poisson δέν εἶναι αἱ μόναι ἀπείρως διαιρεταί κατανομαί. Τό κατωτέρω θεώρημα, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόδειξις εἶναι πέραν τῶν σκοπῶν τοῦ παρόντος, χαρακτηρίζει τήν οἰκογένειαν τῶν ἐπ' ἄπειρον διαιρετῶν κατανομῶν.

Θεώρημα (Levy – Kolmogorov). Μία κατανομή εἶναι ἐπ' ἄπειρον διαιρετή ἐάν, καί μόνον ἐάν, ἡ δευτέρα χ.σ. αὐτῆς $\psi(t)$ ἔχη τήν μορφήν

$$\psi(t) = i\gamma t + \int (e^{itx} - 1 - itx)\,\frac{1}{x^2}\, dG(x)$$

ὅπου γ πραγματική σταθερά καί $G(x)$ μή φθίνουσα συνάρτησις πεπερασμένης μεταβολῆς (ἴδε ὁρισμόν εἰς τό Συμπλήρωμα).

Ἡ τεραστία χρησιμότης τῶν χ.σ. εἰς τήν μελέτην τῆς ἀσυμπτωτικῆς συμπεριφορᾶς μιᾶς ἀκολουθίας τυχαίων μεταβλητῶν ἐκφράζεται εἰς τό λεγόμενον θεώρημα τῆς συνεχείας διά τάς χαρακτηριστικάς συναρτήσεις. Πρός διατύπωσιν τούτου ἀπαιτεῖται ὁ ἑξῆς.

Ὁρισμός: Μία ἀκολουθία συναρτήσεων κατανομῶν $\{F_\nu(x)\}$ τῶν τυχαίων μεταβλητῶν $\{X_\nu\}$ καλεῖται ***συγκλίνουσα***, ἐάν ὑπάρχη μία συνάρτησις κατανομῆς $F(x)$ τοιαύτη ὥστε

$$\lim_{\nu\to\infty} F_\nu(x) = F(x) \qquad \text{διά κάθε σημεῖον } x \text{ συνεχείας τῆς } F$$

Ἡ $F(x)$ καλεῖται τότε ὅριον (ὁριακή συνάρτησις κατανομῆς) τῆς $\{F_\nu(x)\}$.

Θεώρημα τῆς συνεχείας (Lévy - Cramér). Ἔστω ἡ ἀκολουθία $\{X_\nu\}$ τυχαίων μεταβλητῶν καί $\{F_\nu(t)\}$, $\{\varphi_\nu(t)\}$ αἱ ἀντίστοιχοι ἀκολουθίαι τῶν συναρτήσεων κατανομῶν καί τῶν χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων. Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ἵνα ἡ $\{F_\nu(x)\}$ συγκλίνη πρός μίαν συνάρτησιν κατανομῆς $F(x)$ εἶναι ὅπως ἡ $\{\varphi_\nu(t)\}$ συγκλίνη διά κάθε t πρός μίαν συνάρτησιν $\varphi(t)$ συνεχῆ διά $t=0$. Τότε ἡ ὁριακή χ.σ. $\varphi(t)$ εἶναι ἡ χ.σ. τῆς ὁριακῆς συναρτήσεως κατανομῆς $F(x)$.

Ἐφαρμογάς τούτου θά δώσωμεν εἰς τό Κεφ. VII

10.6 Γεννήτριαι καί χαρακτηριστικαί συναρτήσεις πολυδιαστάτων κατανομῶν.

Αἱ ἔννοιαι τῶν γεννητριῶν, ροπογεννητριῶν καί χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων δύνανται νά ἐπεκταθοῦν καί εἰς τήν περίπτωσιν τυχαίων διανυσμάτων $\xi = (X_1, \ldots, X_\nu)$. Ἐάν εἰς τούς δοθέντας ὁρισμούς τό t (ἤ s) ἀντικατασταθῆ ὑπό τοῦ διανύσματος $u = (t_1, \ldots, t_\nu)$ καί τό γινόμενον tX διά τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου

$$u'\xi = t_1X_1 + t_2X_2 + \ldots + t_\nu X_\nu ,$$

ἔχομεν τότε τόν ἀντίστοιχον ὁρισμόν διά τήν ν-διάστατον κατανομήν.

Οὕτω ἡ χ.σ. $\varphi(t_1, t_2)$ τοῦ τυχαίου ζεύγους (X_1, X_2) ὁρίζεται ὑπὸ τῆς

$$\varphi(t_1, t_2) = E\left[e^{i(t_1 X_1 + t_2 X_2)}\right]$$

Δι' ἀπαριθμητὰς μεταβλητὰς X καὶ Y μὲ ἀπὸ κοινοῦ συνάρτησιν πιθανότητος

$$p_{jk} = P\left[X = x_j \ , Y = y_k\right] \ , \ j, k = 0, 1, 2, \dots$$

ἡ (ἀπὸ κοινοῦ) γεννήτρια πιθανοτήτων

$$p(t_1, t_2) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_{jk} t_1^j t_2^k$$

Ἀναφέρομεν, ἄνευ ἀποδείξεως, μερικὰς ἰδιότητας.

α) $\varphi(0,0) = 1$, $|\varphi(t_1, t_2)| \leq 1$ $\quad \varphi(-t_1, -t_2) = \overline{\varphi(t_1, t_2)}$

β) $\varphi_{X_1}(t_1) = \varphi(t_1, 0)$, $\varphi_{X_2}(t_2) = \varphi(0, t_2)$

γ) Ἡ χ.σ. τοῦ $X_1 + X_2$ εἶναι $\varphi(t, t)$

δ) Αἱ X_1, X_2 εἶναι ἀνεξάρτητοι ἐάν, καὶ μόνον ἐάν,

$$\varphi(t_1, t_2) = \varphi_{X_1}(t_1)\varphi_{X_2}(t_2) \text{ δι' ὅλα τὰ } t_1, t_2.$$

ε) Ἡ κατανομὴ τοῦ (X_1, X_2) ὁρίζεται πλήρως ὑπὸ τῆς χ.σ. $\varphi(t_1, t_2)$. Οὕτω διὰ συνεχεῖς κατανομάς, ἡ πυκνότης $f(x_1, x_2)$ δίδεται ὑπὸ τοῦ ***τύπου ἀντιστροφῆς***

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(t_1 x_1 + t_2 x_2)} \varphi(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2 .$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἐκ τῶν γεννητριῶν παραγοντικῶν ροπῶν νά ὑπολογισθοῦν αἱ κεντρικαί ροπαί 3ης καί 4ης τάξεως τῶν κάτωθι κατανομῶν
α) Διωνυμικῆς β) Poisson γ) Γεωμετρικῆς δ) Pascal

2. Ἐκ τῶν ροπογεννητριῶν νά ὑπολογισθοῦν αἱ κεντρικαί ροπαί μέχρι 4ης τάξεως τῶν κατανομῶν:
α) Ὁμοιομόρφου εἰς τό (α, β) β) Κανονικῆς $N(\mu, \sigma^2)$ γ) Ἐκθετικῆς
δ) Γ- κατανομῆς

3. Δείξατε ὅτι ἡ γεννήτρια πιθανοτήτων διά τόν ἀριθμόν τῶν συναντήσεων εἰς τό πρόβλημα τῶν rencontres ("Ασκ. 24 Κεφ. I) δίδεται ὑπό τῆς

$$P(s) = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{1}{k!} (s-1)^k$$

4. Ἐάν $M(t_1, t_2)$ εἶναι ἡ ροπογεννήτρια τοῦ ζεύγους (X_1, X_2), δηλ.

$$M(t_1, t_2) = E\left[e^{t_1 X_1 + t_2 X_2}\right]$$

δείξατε ὅτι

α) $E(X_1) = \dfrac{\partial}{\partial t_1} M(0,0)$, $E(X_2) = \dfrac{\partial}{\partial t_2} M(0,0)$

β) $E(X_1^2) = \dfrac{\partial}{\partial t_1^2} M(0,0)$, $E(X_2^2) = \dfrac{\partial}{\partial t_2^2} M(0,0)$, $E(X_1 X_2) = \dfrac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} M(0,0)$

5. Δείξατε ὅτι ἡ ροπογεννήτρια τῆς διδιαστάτου κανονικῆς μέ πυκνότητα

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[x^2 - 2\rho x y + y^2\right]}$$

δίδεται ὑπό τῆς

$$M(t,u) = e^{\frac{1}{2}(t^2+2\rho tu+u^2)}$$

6.* Ἔστω ἡ ἀπαριθμητή μεταβλητή X μέ

$$p_k = P[X=k] \quad , \quad k=0,1,2,\ldots$$

καί P(s) ἡ γεννήτρια αὐτῆς. Δείξατε ὅτι ἡ γεννήτρια Q(s) τῆς ἀκολουθίας $\{q_\nu\}$, ὅπου

$$q_k = p_{k+1} + p_{k+2} + \ldots = P[X>k]$$

πληροῖ διά $|s|<1$ τήν

$$Q(s) = \frac{1-P(s)}{1-s}$$

Ἐξ αὐτῆς συμπεράνατε ὅτι

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k = Q(1) \quad , \quad \Delta(X) = 2Q'(1)+Q(1)-Q^2(1)$$

(πρβλ. μέ Ἄσκ. III 4)

7. Ἔστω P(s) ἡ γεννήτρια τῆς X = 0, 1, 2, ... Νά εὑρεθοῦν αἱ γεννήτριαι τῶν

α) $Y = X+1$ β) $Y = 2X$

8. Ὁ ἀριθμός αὐτοκινητιστικῶν δυστυχημάτων καθ' ἕκαστον Σαββατοκυρίακον εἰς μίαν πόλιν ἀκολουθεῖ τήν κατανομήν Poisson μέ μέσην τιμήν 10. Ἐκ τῶν δυστυχημάτων 20%, κατά μέσον ὅρον, προκαλοῦν σωματικάς βλάβας εἰς τόν ὁδηγόν. Δι' ἕν Σαββατοκυρίακον

i) νά εὑρεθοῦν αἱ πιθανότητες ἵνα

α) Οὐδεμία σωματική βλάβη προκληθῇ ἐκ δυστυχήματος εἰς ὁδηγόν.

β) Τό πολύ δύο σωματικαί βλάβαι ὁδηγῶν παρουσιασθοῦν

ii) Πόσοι ὁδηγοί ἀναμένονται νά τραυματισθοῦν;

9. Δείξατε ὅτι ἐάν ὁ N εἰς τήν (1) § 10.2 , εἶναι γεωμετρική μεταβλητή καί αἱ X_i εἶναι δίτιμοι Bernoulli , τότε καί ἡ $Y(N)$ εἶναι γεωμετρική.

10. Ἀεροπλάνον βομβαρδίζει στόχον μέ πιθανότητα ἐπιτυχίας 0.1. Ἑκάστη βόμβα ριπτομένη ἐκρήγνυται μετά πιθανότητος 0.8. Ὁ βομβαρδισμός σταματᾶ ὅταν ὁ στόχος κτυπηθῇ μίαν φοράν. Νά εὑρεθῇ ἡ πιθανότης ἐκρήξεως k βομβῶν μετά τήν λῆξιν τοῦ βομβαρδισμοῦ. Πόσαι, κατά μέσον ὅρον, βόμβαι ἐκρήγνυνται μετά τήν λῆξιν τοῦ βομβαρδισμοῦ ;

11. Δείξατε ὅτι ἐάν εἰς τό Θεώρημα 2, § 10.2, ἡ ὑπόθεσις τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν X_i καί τοῦ N ἀντικατασταθῇ ὑπό τῆς ἀνεξαρτησίας τοῦ ἐνδεχομένου $N=\nu$ καί τῶν μεταβλητῶν X_k διά $k>\nu$, τότε τό συμπέρασμα τοῦ θεωρήματος παραμένει ἀληθές (Kolmogorov - Prohorov).

12. Μία κατανομή εἶναι συμμετρική περί τήν ἀρχήν ἐάν, καί μόνον ἐάν , ἡ χ.σ. $\varphi(t)$ αὐτῆς εἶναι πραγματική συνάρτησις.

13. Ἔστω $X_1=X_2=X$ ὅπου ἡ X εἶναι μεταβλητή Cauchy. Δείξατε ὅτι ἡ

$$\varphi_{X_1+X_2}(t)=\varphi_{X_1}(t)\,\varphi_{X_2}(t)$$

πληροῦται (ἤτοι ἡ (4) , § 10.4) ἐνῷ , προφανῶς, αἱ X_1 καί X_2 εἶναι ἐξηρτημέναι.

14. Ἐάν δύο σ.κ. $F_1(x)$, $F_2(x)$ εἶναι ἴσαι εἰς πάντα τά σημεῖα συνεχείας αὐτῶν , τότε συμπίπτουν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Πολλάκις, τόσον εἰς τὴν πιθανοθεωρητικὴν ὅσον καὶ εἰς τὴν στατιστικὴν μελέτην ἑνὸς τυχαίου φαινομένου, δίδεται ἢ ὑποτίθεται γνωστὴ ἡ κατανομὴ μιᾶς μεταβλητῆς X καὶ ἀπαιτεῖται ἡ εὕρεσις τῆς κατανομῆς ἑτέρας μεταβλητῆς $Y = g(X)$, ἡ ὁποία εἶναι συνάρτησις τῆς X. Γενικώτερον, τὸ πρόβλημα συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς κατανομῆς k συναρτήσεων $Y_1 = g_1(X_1, \ldots, X_\nu)$, $Y_2 = g_2(X_1, \ldots, X_\nu), \ldots, Y_k = g_k(X_1, \ldots, X_\nu)$ τῶν μεταβλητῶν $X_1, \ldots, X_\nu$, αἱ ὁποῖαι ἔχουν δεδομένην ἀπὸ κοινοῦ κατανομήν.

11.1 Συνάρτησις μιᾶς τυχαίας μεταβλητῆς. Συνήθως ἐνδιαφερόμεθα διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς κατανομῆς τῆς

$$Y = g(X) \tag{1}$$

ὅταν ἡ X εἶναι συνεχὴς μεταβλητὴ καὶ ἡ ἀντίστοιχος διὰ τῆς (1) ὁριζομένη μεταβλητὴ Y εἶναι ἐπίσης συνεχής. Ἡ εὕρεσις τῆς κατανομῆς τῆς Y ἐκ τῆς κατανομῆς τῆς X ἐπιτυγχάνεται ἐν γένει, εὐκολώτερον, δι' εὑρέσεως πρῶτον τῆς ἀθροιστικῆς συναρτήσεως κατανομῆς τῆς Y. Ἐκ ταύτης τότε διὰ παραγωγίσεως εὑρίσκεται ἡ πυκνότης τῆς Y, ὑποτιθεμένου ὅτι ἡ Y εἶναι ἐπίσης συνεχής.

Παράδειγμα: Ἔστω ἡ συνάρτησις

$$Y = \rho \cos\theta$$

ὅπου τὸ πλάτος (κύματος) ρ εἶναι θετικὴ σταθερά, ἡ δὲ φάσις θ εἶναι τυχαία μεταβλητὴ ἀκολουθοῦσα τὴν ὁμοιόμορφον κατανομὴν εἰς τὸ διάστημα $[0, \pi)$, ἤτοι

$$F_\theta(x) = \frac{x}{\pi} \qquad 0 \le x \le \pi$$

Ἔχομεν

$$F_Y(y) = P\left[\rho\cos\theta \le y\right] = P\left[\cos\theta \le \frac{y}{\rho}\right]$$

$$= P\left[\theta \geq \arccos\frac{y}{\rho}\right] = 1 - P\left[\theta < \arccos\frac{y}{\rho}\right]$$

$$= 1 - F_\theta\left(\arccos\frac{y}{\rho}\right) = 1 - \frac{1}{\pi}\arccos\frac{y}{\rho}$$

Ὅθεν ἡ πυκνότης $f_Y(y)$ δίδεται ὑπό τῆς

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\rho^2 - y^2}}, \qquad |y| \le \rho.$$

Εἰς τό ἀνωτέρω παράδειγμα ἡ $g(\theta) = \rho\cos\theta$ εἶναι συνεχής καί ἀμφιμονοσήμαντος (φθίνουσα) συνάρτησις οὕτως ὥστε καί ἡ μεταβλητή $Y = \rho$ συνθ εἶναι συνεχής. Τοῦτο ὅμως δέν εἶναι, ἐν γένει, ἀληθές, καθότι εἶναι δυνατόν ἡ X νά εἶναι συνεχής χωρίς νά εἶναι τοιαύτη ἡ $Y = g(X)$. Οὕτω ἐνῶ ἡ μεταβλητή X εἶναι $N(\mu, \sigma^2)$, ἡ μεταβλητή

$$Y = g(X) = \begin{cases} 1 & \text{ἐάν } X \geq \mu \\ 0 & \text{ἐάν } X < \mu \end{cases}$$

εἶναι προφανῶς διακριτή καί δή ἁπλῆ (δίτιμος) μεταβλητή Bernoulli μέ παράμετρον

$$p = P[Y = 1] = \frac{1}{2}, \qquad q = P[X = 0] = \frac{1}{2}$$

Ἡ κατωτέρω πρότασις δίδει συνθήκας τάς ὁποίας πληροῦσα ἡ g ἐξασφαλίζει τήν συνέχειαν τῆς $Y = g(X)$ (ὅταν ἡ X εἶναι συνεχής).

Πρότασις 1. Ἐάν ἡ μεταβλητή X εἶναι συνεχής, ἡ δέ συνάρτησις $y = g(x)$ εἶναι παραγωγίσιμος διά κάθε x μέ παράγωγον, ἡ ὁποία δέν ἀλλάζει σημεῖον ($g'(x) < 0$ ἤ $g'(x) > 0$ διά κάθε x), οὕτως ὥστε ἡ g εἶναι μονότονος καί ἔχη ἀντίστροφον $x = g^{-1}(y) = g^*(y)$, τότε ἡ $Y = g(X)$ εἶναι συνεχής μέ πυκνότητα

$$f_Y(y) = f_X(g^*(y))\left|g^{*\prime}(y)\right| = f_X(g^*(y))\,\frac{1}{|g'(x)|} \qquad (2)$$

Ἀπόδειξις: Ἔχομεν

$$F_Y(y) = P[g(X) \le y] = \begin{cases} P(X \le g^*(y)) & \text{διά } g'>0 \\ P(X \ge g^*(y)) & \text{διά } g'<0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} F_X(g^*(y)) & \text{διά } g'>0 \\ 1-F_X(g^*(y)) & \text{διά } g'<0 \end{cases}$$

Διά παραγωγίσεως τῆς F_Y προκύπτει ἡ (2).

Γενικώτερον, ἐάν ἡ g δέν εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος δύναται νά δειχθῇ ἡ

Πρότασις 2. Ἐάν ἡ X εἶναι συνεχής ἡ δέ ἐξίσωσις

$$y = g(x)$$

ἔχῃ τό πολύ ἀριθμήσιμον πλῆθος ριζῶν $x_1, x_2, \dots, x_\nu, \dots$, ἤτοι

$$y = g(x_1) = g(x_2) = \dots = g(x_\nu) = \dots$$

ἐπί πλέον δέ αἱ παράγωγοι

$$g'(x_1) \ne 0,\ g'(x_2) \ne 0, \dots, g'(x_\nu) \ne 0, \dots$$

τότε ἡ $Y = g(X)$ ἔχει πυκνότητα

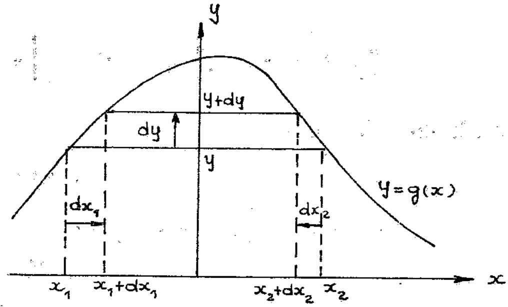
$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1(y))}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2(y))}{|g'(x_2)|} + \dots + \frac{f_X(x_\nu(y))}{|g'(x_\nu)|} + \dots \qquad (3)$$

Πρός ὑπόδειξιν τῆς γενικῆς ἀποδείξεως, θεωροῦμεν τήν μερικήν περίπτωσιν καθ' ἥν διά δεδομένον $y = g(x)$ ὑπάρχουν δύο ρίζαι x_1, x_2, ἤτοι $y = g(x_1) = g(x_2)$ ὡς δεικνύεται εἰς τό παρατιθέμενον σχῆμα. Ἐξ ὁρισμοῦ τῆς πυκνότητος, ἔχομεν

$$f_Y(y)dy = P[y < Y < y+dy]dy = P[x_1 < X < x_1+dx_1] + P[x_2+dx_2 < X < x_2] =$$
$$= f_X(x_1)dx_1 + f_X(x_2)|dx_2|$$

Ἐπειδή δέ

$$g'(x_1)\,dx_1 = dy \;,\quad g'(x_2)\,dx_2 = dy$$



λαμβάνομεν

$$f_Y(y)dy = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|}dy + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|}dy$$

Ὅθεν

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|} = f_X(x_1)\left|\frac{dx_1}{dy}\right| + f_X(x_2)\left|\frac{dx_2}{dy}\right| \qquad (4)$$

Πρός ἐφαρμογήν ταύτης, θεωρήσωμεν τήν συνάρτησιν

$$y = g(x) = |x|$$

Διά κάθε $y>0$ ἔχομεν δύο λύσεις τῆς $y=|x|$, τάς

$$x_1 = y \;,\quad x_2 = -y$$

Δυνάμει τῆς (4) λαμβάνομεν

$$f_Y(y) = f_{|X|}(y) = \frac{f_X(x_1)}{1} + \frac{f_X(x_2)}{|-1|} = f_X(y) + f_X(-y)$$

Κατανομή γραμμικῆς συναρτήσεως τῆς X. Ἁπλῆ καί ἐνδιαφέρουσα περίπτωσις τῆς (1) εἶναι ὅταν ἡ $g(x) = \alpha x + \beta$, ὅτε ἡ $Y = \alpha X + \beta$ προκύπτει ἐκ τῆς X δι' ἀλλαγῆς τῆς ἀρχῆς (μεταφορᾶς) καί ἀλλαγῆς τῆς μονάδος μετρήσεως (τῆς κλίμακος). Ἔχομεν

$$F_Y(y) = P[Y \le y] = P[\alpha X + \beta \le y] = P[\alpha X \le y - \beta]$$

$$= \begin{cases} P\left[X \le \dfrac{y-\beta}{\alpha}\right], & \text{διά } \alpha > 0 \\[2ex] P\left[X \ge \dfrac{y-\beta}{\alpha}\right], & \text{διά } \alpha < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} F_X\left(\dfrac{y-\beta}{\alpha}\right), & \alpha > 0 \\[2ex] 1 - F_X\left(\dfrac{y-\beta}{\alpha}\right) + P\left[X = \dfrac{y-\beta}{\alpha}\right], & \alpha < 0 . \end{cases}$$

'Εάν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ X εἶναι συνεχὴς μὲ πυκνότητα, τότε ἡ πυκνότης $f_Y(y)$ τῆς Y εἶναι

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\begin{cases} F_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) & , \quad \alpha > 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) & , \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

$$= \left.\begin{cases} \frac{1}{\alpha} f_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right), & \text{ἐάν} \quad \alpha > 0 \\ -\frac{1}{\alpha} f_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right), & \text{ἐάν} \quad \alpha < 0 \end{cases}\right\} = \frac{1}{|\alpha|} f_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)$$

Οὕτως ἐδείξαμεν ὅτι ἐάν ἡ X ἔχῃ πυκνότητα f_X, τότε ἡ

$$Y = \alpha X + \beta$$

ἔχει πυκνότητα

$$f_Y(y) = \frac{1}{|\alpha|} f_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) \qquad (5)$$

Παραδείγματα: α) 'Εάν ἡ X εἶναι $N(\mu, \sigma^2)$ τότε ἡ $Y = \alpha X + \beta$ εἶναι $N(\mu^*, \sigma^2)$, ὅπου $\mu^* = \alpha\mu + \beta$, $\sigma^{*2} = \alpha^2\sigma^2$.

'Απόδειξις: 'Η πυκνότης τῆς $N(\mu, \sigma^2)$ εἶναι

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

'Εκ τῆς (5) λαμβάνομεν

$$f_Y(y) = \frac{1}{|\alpha|} f_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) = \frac{1}{|\alpha|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{y-\beta}{\alpha}-\mu\right)^2}$$

$$= \frac{1}{|\alpha|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\beta-\alpha\mu)^2}{2\alpha^2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma^*\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu^*)^2}{2\sigma^{*2}}}$$

β) "Εστω $Y = g(X) = X^2$, X μὲ πυκνότητα $f_X(x)$.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) =$$

$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

'Η πυκνότης τῆς Y εἶναι

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy}\left[F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y}) \qquad (6)$$

Ἡ (6) δύναται νά εὑρεθῆ καί ἀπ' εὐθείας δι' ἐφαρμογῆς τῆς (4). Πράγματι διά δοθέν $y>0$, ἔχομεν

$$x_1 = \sqrt{y}\ , \quad x_2 = -\sqrt{y}\ , \quad \frac{dx_1}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\ , \quad \frac{dx_2}{dy} = -\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

καί δυνάμει τῆς (4)

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y})$$

Πόρισμα: Ἐάν ἡ X εἶναι συμμετρική περί τήν ἀρχήν τότε ἡ πυκνότης τῆς $Y = X^2$ εἶναι

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) \qquad (7)$$

Ἐφαρμογαί τῆς (7). i) Ἔστω ἡ $X : N(0,1)$. Ἡ $Y = X^2$ ἔχει πυκνότητα

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{1}{2}y}\ , \qquad y>0 \qquad (8)$$

ii) Ἐάν ἡ X ἔχῃ τήν κατανομήν Cauchy μέ πυκνότητα

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\ \frac{1}{1+x^2}\ ,$$

τότε ἡ $Y = X^2$ ἔχει πυκνότητα

$$y_Y(y) = \frac{1}{\pi}\ \frac{1}{\sqrt{y}\,(1+y)}\ , \qquad y>0\ .$$

11.2 Συνάρτησις δύο τυχαίων μεταβλητῶν. Συνέλιξις

Ἡ πλέον ἐνδιαφέρουσα περίπτωσις μιᾶς συναρτήσεως $g(X,Y)$ δύο τυχαίων μεταβλητῶν εἶναι τό ἄθροισμα τούτων, ἤτοι ἡ

$$Z = g(X,Y) = X+Y$$

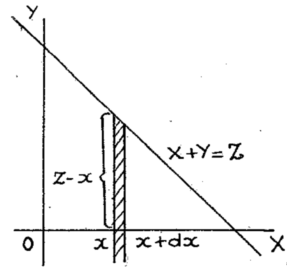
καί ἰδιαιτέρως ὅταν αἱ X καί Y εἶναι ἀνεξάρτητοι. Τότε θέλομεν τήν κατανομὴν τοῦ $Z = X+Y$ ὅταν γνωρίζωμεν τὴν κατανομὴν τῶν X καὶ Y.

Θεωροῦμεν τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν αἱ X καὶ Y εἶναι συνεχεῖς μὲ ἀντιστοίχους πυκνότητας τὰς f_X καὶ f_Y. Ἔχομεν

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X+Y \le z) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P\left[X+Y \le z \mid X = x\right] f_X(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P\left[Y \le z - x\right] f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(z-x) f_X(x)\,dx$$



Ὁμοίως λαμβάνομεν

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(z-y) f_Y(y)\,dy$$

Ἡ $F_Y(z-x)\,dx$ ἰσοῦται μὲ τὴν στοιχειώδη πιθανότητα, ἡ ὁποία εἶναι συγκεντρωμένη εἰς τὴν "κατακόρυφον" ἀπέραντον λωρίδα ἀπὸ τοῦ $y = z - x$ μέχρι τοῦ $y = -\infty$, ὡς δεικνύεται εἰς τὸ παρατιθέμενον σχῆμα. Συγκεντροῦντες, ἤτοι ὁλοκληροῦντες, ὅλας τὰς πιθανότητας (δι' ὅλα τὰ x) λαμβάνομεν τὴν $F_Z(z)$ = πιθανότης συγκεντρωμένη εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον $X+Y \le z$. Ἡ πυκνότης f_Z τῆς Z δίδεται ὑπὸ τῶν

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z-x) f_X(x)\,dx \\ \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,dy \end{cases} \qquad (1)$$

Συνέλιξις : Ἡ f_Z ὁριζομένη ὡς ἀνωτέρω (ἐκ τῆς (1)) διὰ τῶν συναρτήσεων f_X καὶ f_Y καλεῖται ***συνέλιξις*** (convolution) τῶν f_X καὶ f_Y καὶ σημειοῦται διὰ $f_Z = f_X * f_Y$.

Προφανῶς ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετικὴ καὶ προσεταιριστικὴ ἰδιότης, ἤτοι

$$f_X * f_Y = f_Y * f_X \,, \quad f_X * (f_Y * f_Z) = (f_X * f_Y) * f_Z = f_X * f_Y * f_Z$$

α) Συνέλιξις κανονικῶν. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ X εἶναι $N(0,1)$, καὶ ἡ Y εἶναι $N(0,1)$ καὶ ὅτι αἱ X, Y εἶναι ἀνεξάρτητοι. Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμά των $Z = X+Y$ εἶναι ἐπίσης κανονικὴ $N(0,2)$ (ἴδε καὶ §10.5).

Ἀπόδειξις: Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(z-x)f_X(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(z-x)^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=$$

$$=\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x^2-zx+\frac{z^2}{4})+\frac{z^2}{4}}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\frac{z}{2})^2}dx=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}$$

Πόρισμα: Ἐκ τοῦ ὅτι γραμμική συνάρτησις κανονικῆς μεταβλητῆς εἶναι ἐπίσης κανονική ἕπεται ὅτι, ἐάν X καί Y εἶναι ἀνεξάρτητοι κανονικαί, τότε ἡ $\alpha X+\beta Y$ (α,β σταθεραί) εἶναι ἐπίσης κανονική. Γενικῶς, οἱοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός

$$L=\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\dots+\alpha_\nu X_\nu$$

ἀνεξαρτήτων κανονικῶν μεταβλητῶν $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ εἶναι ἐπίσης κανονική.

β) Συνέλιξις ἐκθετικῶν κατανομῶν. Ἔστωσαν X καί Y ἀνεξάρτητοι μεταβληταί, ἑκάστη μέ πυκνότητα

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x} \qquad x>0 \qquad (2)$$

Ἡ πυκνότης f_Z τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν

$$Z=X+Y$$

εἶναι δυνάμει τῆς (1)

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z-x)f(x)\,dx=\lambda^2\int_0^z e^{-\lambda(z-x)}e^{-\lambda x}dx$$

$$=\lambda^2 z e^{-\lambda z} \qquad \text{διά} \quad z>0 \qquad (2)^*$$

Αὕτη εἶναι μερική περίπτωσις τῆς Γ- κατανομῆς

Ἡ κατανομή Erlang προκύπτει διά ν- πλῆς συνελίξεως τῆς ἐκθετικῆς

(2), δυναμένη νά θεωρηθῆ ὡς ἡ κατανομή τοῦ χρόνου T_ν ἀναμονῆς μέχρι καί τοῦ ν-οστοῦ γεγονότος εἰς μίαν διαδικασίαν Poisson.

γ) Ἡ κατανομή χ^2. Εἰς τήν στατιστικήν ἀνάλυσιν σπουδαιότατον ρόλον παίζει ἡ κατανομή τοῦ ἀθροίσματος

$$Y = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\mu)^2,$$

ὅπου αἱ $X_1, \ldots, X_\nu$ εἶναι τυχαῖον δεῖγμα ἀπό τήν $N(\mu, \sigma^2)$. Ἡ κατανομή τῆς Y καλεῖται ***χ^2-κατανομή μέ ν βαθμούς ἐλευθερίας***. Δεδομένου ὅτι ἐάν ἡ X_i εἶναι $N(\mu, \sigma^2)$ τότε ἡ $Y_i = (X_i-\mu)/\sigma$ εἶναι τυποποιημένη κανονική $N(0,1)$ (Παράδειγμα (α), § 11.1), ἡ χ^2-κατανομή ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

Ὁρισμός: "Εστωσαν $X_1, \ldots, X_\nu$ ἀνεξάρτητοι καί ἰσόνομοι τυποποιημέναι κανονικαί μεταβληταί. Ἡ κατανομή τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν $X_1, \ldots, X_\nu$, ἤτοι, τῆς μεταβλητῆς

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_\nu^2 \qquad (3)$$

καλεῖται χ^2-κατανομή μέ ν βαθμούς ἐλευθερίας, συμβολιζομένη, ὡς καί ἡ μεταβλητή, διά τοῦ χ^2_ν.

Πρός εὕρεσιν τῆς κατανομῆς τῆς Y, παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη εὑρέθη διά $\nu=1$, ἔχουσα πυκνότητα τήν (8), § 11.1. Ἀλλά ἡ (8) εἶναι Γ-κατανομή μέ παραμέτρους $p=1$, $\lambda=\frac{1}{2}$, εἴδομεν δέ εἰς τήν § 10.4 ὅτι αὕτη ἔχει τήν ***ἀναπαραγωγικήν ἰδιότητα***, ἤτοι τό ἄθροισμα ν-ἀνεξαρτήτων Γ-μεταβλητῶν μέ παραμέτρους $p_1, \ldots, p_\nu$ καί τήν αὐτήν παράμετρον λ εἶναι ἐπίσης Γ-μεταβλητή μέ παραμέτρους $p = p_1 + \ldots + p_\nu$ καί λ. Ὅθεν ἡ Y, ὡς ἄθροισμα ἀνεξαρτήτων καί ἰσονόμων Γ-μεταβλητῶν, ἔχει τήν κατανομήν Γ μέ παραμέτρους

$$p = \frac{\nu}{2} \qquad \text{καί} \qquad \lambda = \frac{1}{2}$$

῎Αρα ἡ πυκνότης αὐτῆς, ἔστω f_γ, δίδεται ὑπὸ τῆς

$$f_\gamma(x) = \frac{1}{2^{\frac{\gamma}{2}}\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} x^{\frac{\gamma}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x>0 . \tag{4}$$

Αὕτη δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ ὡς ν-πλῆ συνέλιξις τῆς

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x>0$$

ἐκ τῆς (8), § 11.1.

Ὁρισμός: Ἡ κατανομὴ τῆς $\sqrt{Y} = X_\gamma$ καλεῖται ***χ - κατανομὴ*** μὲ ν βαθμοὺς ἐλευθερίας. Ἡ πυκνότης αὐτῆς, εὑρισκομένη π.χ. βάσει τῆς (2), § 11.1, δίδεται ὑπὸ τῆς

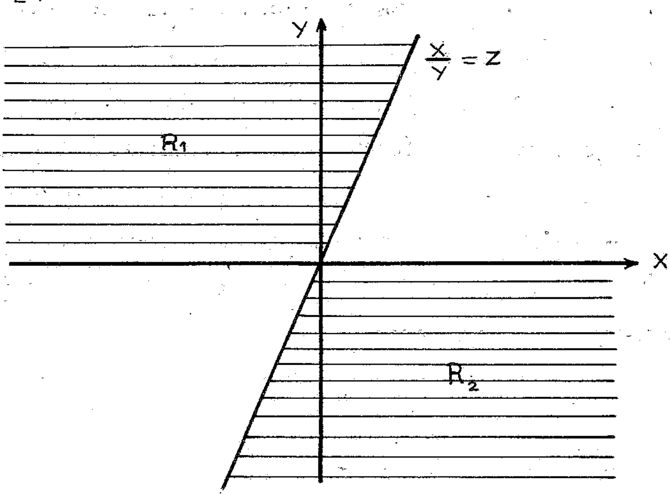
$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{\gamma}{2}-1}\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} x^{\gamma-1} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x>0 \tag{5}$$

Κατανομὴ τοῦ λόγου δύο τυχαίων μεταβλητῶν. ῎Εστω

$$Z = \frac{X}{Y} \tag{6}$$

ὅπου αἱ X καὶ Y ἔχουν ἀπὸ κοινοῦ πυκνότητα $f(x,y)$. Τότε ἡ σ.κ. $F_Z(z)$ τοῦ Z, βάσει τοῦ θεωρήματος τῆς ὁλικῆς πιθανότητος, εἶναι

$$F_Z(z) = P\left[\frac{X}{Y} \le z\right] = P\left[(X,Y)\in R_z\right] = P\left[(X,Y)\in R_1\right] + P\left[(X,Y)\in R_2\right],$$



Σχ. 1.

ὅπου ἡ περιοχὴ $R_Z = R_1 \cup R_2$ δεικνύεται εἰς τὸ Σχ.1. Ἔχομεν λοιπὸν

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{yz} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{-\infty}^{0} \int_{yz}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy \qquad (7)$$

καὶ διὰ παραγωγίσεως ἔχομεν τὴν πυκνότητα

$$F_Z(z) = \int_0^{\infty} y f(yz, y)\,dy - \int_{-\infty}^{0} y f(yz, y)\,dy \qquad (8)$$

Ἐὰν αἱ X καὶ Y εἶναι ἀνεξάρτητοι, τότε ἡ (8) γίνεται

$$F_Z(x) = \int_0^{\infty} y f_X(yz) f_Y(y)\,dy - \int_{-\infty}^{0} y f_X(yz) f_Y(y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |y| f_X(yz) f_Y(y)\,dy \qquad (9)$$

Ἡ (9) δύναται νὰ εὑρεθῇ ἀπ' εὐθείας δι' ἐφαρμογῆς τοῦ γενικευμένου θεωρήματος τῆς ὁλικῆς πιθανότητος (§ 9.1) ὡς ἑξῆς:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z \mid Y=y) f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X/y}(z) f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} |y| f_X(yz) f_Y(y)\,dy$$

καθότι ἡ πυκνότης τῆς X/y διὰ κάθε σταθερὸν y εἶναι δυνάμει τῆς (5), § 11.1,

$$f_{X/y}(z) = |y|\, f_X(yz)$$

Κατανομὴ t ἢ τοῦ Student. Ἔστω ἡ μεταβλητὴ

$$t_\nu = \frac{X}{\sqrt{\chi_\nu^2/\nu}}$$

ὅπου ἡ X εἶναι $N(0,1)$ ἀνεξάρτητος τῆς μεταβλητῆς χ_ν^2 μὲ ν βαθμοὺς ἐλευθερίας. Ἡ κατανομὴ τῆς t_ν, ἡ ὁποία ὅπως καὶ ἡ χ_ν^2, ἔχει πολλὰς ἐφαρμογὰς εἰς τὸν καλούμενον ἔλεγχον (testing) στατιστικῶν ὑποθέσεων, καλεῖται t-κατανομὴ ἢ τοῦ Student* μὲ ν βαθμοὺς ἐλευθερίας.

Ἐφαρμόζοντες τὴν (9) λαμβάνομεν, δυνάμει καὶ τῆς (5) §11.1 τὴν πυκνότητα τῆς $Z = \frac{t_\nu}{\sqrt{\nu}} = X/\chi_\nu$

---

* Ψευδώνυμον τοῦ Ἄγγλου στατιστικοῦ W. L. Gosset, ὁ ὁποῖος "ἀνεκάλυψε" (ὑπελόγισε) τὴν κατανομὴν (1908) ἐμπειρικῶς χρησιμοποιήσας μεγάλον ἀριθμὸν δειγμάτων τῆς t_ν δι' ἕκαστον ν (ἡ πρώτη ἴσως ἐφαρμογὴ τῆς λεγομένης μεθόδου Monte Carlo).

$$f(z)=\frac{1}{2^{\frac{\nu-1}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})}\int_0^\infty y\, e^{-\frac{y^2z^2}{2}}\, y^{\nu-1}\, e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy=\frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})}\int_0^\infty y^\nu e^{-\frac{(1+z^2)}{2}y^2}\,dy$$

Θέτοντες $u=\frac{1+z^2}{2}y^2$ λαμβάνομεν

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})}\int_0^\infty u^{\frac{\nu-1}{2}}(1+z^2)^{-\frac{\nu+1}{2}}e^{-u}\,du=\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})}\;\frac{1}{(1+z^2)^{\frac{\nu+1}{2}}}.$$

Ὅθεν εὑρίσκομεν τὴν πυκνότητα τῆς t_ν δυνάμει τῆς (5), §11.1,

$$f(t)=\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})}\;\frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}\qquad -\infty<t<\infty.$$

Διὰ $\nu=1$ αὕτη συμπίπτει μὲ τὴν πυκνότητα Cauchy (ἴδε καὶ Ἄσκ. 9).

Κατανομὴ F ἢ τοῦ Snedecor. Ἑτέρα κατανομὴ ἔχουσα πλείστας ἐφαρμογὰς εἰς τὴν Στατιστικὴν καὶ ἰδίως εἰς τὴν λεγομένην Ἀνάλυσιν Παλινδρομήσεως, εἶναι ἡ τῆς μεταβλητῆς

$$Z=\frac{\chi^2_m/m}{\chi^2_n/n}$$

ὅπου χ^2_m καὶ χ^2_ν εἶναι ἀνεξάρτητοι χ^2-μεταβληταὶ μὲ m καὶ ν βαθμοὺς ἐλευθερίας, ἀντιστοίχως. Ἡ κατανομὴ τῆς Z καλεῖται κατανομὴ F ἢ τοῦ Snedecor* μὲ m καὶ n βαθμοὺς ἐλευθερίας, παριστωμένη διὰ $F_{m,n}$.

Βάσει τῆς (9) καὶ ἐκ τῆς (4), ἡ $\frac{m}{n}Z=\chi^2_m/\chi^2_n$ ἔχει πυκνότητα πιθανότητος

$$f(x)=c(m,n)\int_0^\infty y\,(xy)^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{xy}{2}}\,y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}\,dy=$$

$$=c(m,n)\,x^{\frac{m}{2}-1}\int_0^\infty y^{\frac{m+n}{2}-1}e^{-\frac{1+x}{2}y}\,dy=c(m,n)\,2^{\frac{m+n}{2}}\frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})x^{\frac{m}{2}-1}}{(1+x)^{\frac{m+n}{2}}}$$

ὅπου ἡ σταθερὰ

$$c(m,n)=\left[2^{(m+n)/2}\,\Gamma(\tfrac{m}{2})\Gamma(\tfrac{n}{2})\right]^{-1}$$

Ὅθεν τελικῶς εὑρίσκομεν τὴν πυκνότητα τῆς Z,

---

* Παραστήσαντος τὴν μεταβλητὴν διὰ F πρὸς τιμὴν τοῦ Ἄγγλου στατιστικοῦ R. A. Fisher, θεωρουμένου ὡς πατρὸς τῆς νεωτέρας στατιστικῆς.

$$f(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\quad\frac{z^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1+\frac{m}{n}z\right)^{\frac{m+n}{2}}}\,,\qquad z$$

11.3 Δύο συναρτήσεις δύο μεταβλητῶν

Ἡ εὕρεσις τῆς κατανομῆς μιᾶς συναρτήσεως $Z=g(X,Y)$ δύο τυχαίων μεταβλητῶν, ὡς εἰς τήν προηγουμένην παράγραφον, καθίσταται εὐκολωτέρα ἐν γένει ἐάν εἰσαχθῆ ἑτέρα βοηθητική, τρόπον τινά, μεταβλητή $W=h(X,Y)$, οὕτως ὥστε τό πρόβλημα νά ἀνάγεται εἰς τήν εὕρεσιν τῆς ἀπό κοινοῦ συναρτήσεως πυκνότητος τῶν Z, W ἐκ τῆς ἀπό κοινοῦ συναρτήσεως τῶν X καί Y.

Θεώρημα: Ἔστωσαν αἱ τυχαῖαι μεταβληταί X, Y μέ ἀπό κοινοῦ πυκνότητα $f(x,y)$ καί αἱ συναρτήσεις

$$Z=g(x,y)\quad,\quad W=h(x,y)\tag{1}$$

μέ συνεχεῖς μερικάς παραγώγους πρώτης τάξεως εἰς ὅλα τά σημεῖα οὕτως ὥστε, ἡ Ἰακωβιανή $J(x,y)$ τοῦ μετασχηματισμοῦ (1) νά εἶναι $\neq 0$, ἤτοι

$$J(x,y)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0\tag{2}$$

Τότε αἱ $Z=g(X,Y)$, $W=h(X,Y)$ ἔχουν ἀπό κοινοῦ πυκνότητα f^*,

$$f^*(z,w)=f\left(g^*(z,w),\,h^*(z,w)\right)\left|J(x,y)\right|^{-1}\tag{3}$$

ὅπου $g^*(z,w)$ καί $h^*(z,w)$ εἶναι αἱ ἀντίστροφοι τῶν g καί h, ἤτοι δι' ἕκαστον (z_0, w_0),

$$z_0=g(x_0,y_0)\quad,\quad w=h(x_0,y_0)\tag{4}$$

ὑπάρχει μόνον μία λύσις (x_0, y_0) τοῦ (4) μέ

$$x_0 = h^*(z_0, w_0) \quad , \quad y_0 = g^*(z_0, w_0). \tag{5}$$

Ἀπόδειξις: Ἔχομεν ἐξ ὁρισμοῦ τῆς πυκνότητος

$$f^*(z,w)\,dz\,dw = P\left[z < Z \leq z+dz,\ w < W \leq w+dw\right] = P\left[(X,Y)\in \Delta R_{z,w}\right]$$

ὅπου $\Delta R_{z,w}$ εἶναι ἡ στοιχειώδης περιοχὴ τοῦ ἐπιπέδου xy ἡ πληροῦσα τὴν σχέσιν

$$\Delta R_{zw} = \left\{(x,y):\ z < g(x,y) \leq z+dz\ ,\ w < h(x,y) \leq w+dw\right\}$$

Ὅθεν καὶ ἐκ τοῦ γνωστοῦ ἐκ τοῦ Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ μετασχηματισμοῦ διπλῶν ὁλοκληρωμάτων,

$$f^*(z,w)\,dz\,dw = \iint_{\Delta R_{zw}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Delta R_{zw}} f(g^*(z,w), h^*(z,w))\,|J(z,w)|\,dz\,dw$$

ὅπου $J(z,w)$ εἶναι ἡ Ἰακωβιανὴ τοῦ ἀντιστρόφου μετασχηματισμοῦ (5) τοῦ (1), ἤτοι

$$J(z,w) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial z} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial z} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{1}{J(x,y)}$$

Ἄρα ἡ πυκνότης $f^*(z,w)$ εἶναι

$$f^*(z,w) = f(g^*(z,w), h^*(z,w))\,|J(z,w)|$$

καὶ ἡ (3) ἀπεδείχθη (ἴδε καὶ Ἄσκ. 18).

Παραδείγματα: α) Ἔστωσαν αἱ $Z = X+Y$, $W = X-Y$ ὅτε

$$X = \frac{Z+W}{2} \quad , \quad Y = \frac{Z-W}{2}$$

Ἡ Ἰακωβιανὴ

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

Δυνάμει τῆς (3) ἡ ἀπὸ κοινοῦ πυκνότης $f^*(z,w)$ τῶν Z, W συναρτήσει τῆς πυκνότητος $f(x,y)$ τῶν X, Y εἶναι

$$f^*(z,w)=\frac{1}{2}f\left(\frac{z+w}{2}\,,\,\frac{z-w}{2}\right) \tag{6}$$

'Εφαρμογὴ τῆς (6). "Εστω

$$f(x,y)=\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \qquad x>0\;,\; y>0$$

'Η πυκνότης τῶν $Z=X+Y$ καὶ $W=X-Y$ δίδεται ὑπὸ τῆς

$$f^*(z,w)=\frac{1}{2}\lambda^2 e^{-\left(\frac{z+w}{2}+\frac{z-w}{2}\right)}=\frac{1}{2}\lambda^2 e^{-\lambda z} \qquad z>0$$

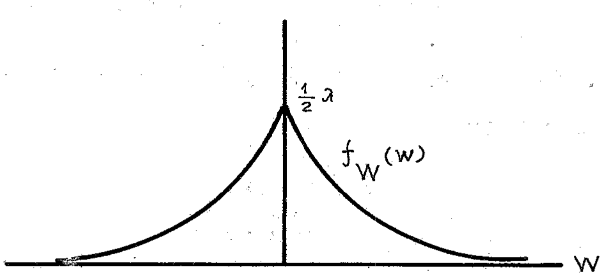
'Ολοκληροῦντες τὴν f^* ὡς πρὸς W εὑρίσκομεν τὴν (περιθώριον) πυκνότητα τοῦ $Z=X+Y$,

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f^*(z,w)\,dw=\frac{1}{2}\lambda^2\int_{-z}^{z}e^{-\lambda z}\,dw=\lambda^2 z e^{-\lambda z} \qquad z>0$$

τὸ ὁποῖον συμφωνεῖ μὲ τὴν (2)*, § 11.2. 'Ομοίως, εὑρίσκομεν καὶ τὴν (περιθώριον) πυκνότητα τοῦ $W=X-Y$,

$$f_W(w)=\int_{-\infty}^{\infty}f^*(z,w)\,dz=\frac{1}{2}\lambda^2\int_{|w|}^{\infty}e^{-\lambda z}\,dz=\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|w|}\,, \qquad -\infty<w<\infty$$

Αὕτη εἶναι ***δίπλευρος ἐκθετική***, καλουμένη ***κατανομὴ τοῦ Laplace*** (Σχ.1)



Σχ.1.

β) "Εστω ὅτι θέλομεν τὴν κατανομὴν τοῦ ἀθροίσματος

$$Z=X+Y$$

τὴν ὁποίαν εὕρομεν εἰς τὴν § 11.2. Εἰσάγομεν τὴν βοηθητικὴν μεταβλητήν

$$W = X$$

ἔχοντες οὕτω δύο συναρτήσεις δύο μεταβλητῶν μέ

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Δυνάμει τῆς (3) ἡ πυκνότης f^* τῶν Z, W εἶναι

$$f^*(z,w) = f(w, z-w)$$

Ὅθεν ἡ πυκνότης τοῦ $Z = X+Y$ εἶναι

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(z,w)\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} f(w, z-w)\,dw,$$

ἡ ὁποία δι' ἀνεξαρτήτους X, Y δίδει τήν (1) τῆς 11.2.

γ) Ἔστω ὁ γραμμικός μετασχηματισμός

$$z = \alpha x + \beta y$$
$$w = \gamma x + \delta y$$

μέ Ἰακωβιανήν

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma = \Delta$$

Ὑποθέσωμεν ὅτι $\Delta \neq 0$ (ἄλλως τό $w = \lambda z$) ὅτε ὑπάρχει ἕνας μόνον ἀντίστροφος μετασχηματισμός

$$x = \alpha^* z + \beta^* w$$
$$y = \gamma^* z + \delta^* w$$

ὅπου $\alpha^* = \delta/\Delta$, $\beta^* = -\beta/\Delta$, $\gamma^* = -\gamma/\Delta$, $\delta^* = \alpha/\Delta$

Ἡ ἀπό κοινοῦ συνάρτησις πυκνότητος f^* τῶν Z, W συναρτήσει τῆς πυκνότητος f τῶν X, Y δίδεται ὑπό τῆς

$$f^*(z,w) = \frac{1}{|\Delta|} f(\alpha^* z + \beta^* w, \gamma^* z + \delta^* w) \qquad (8)$$

Ἐφαρμογὴ τῆς (8). Ἐάν αἱ X, Y ἔχουν τὴν διδιάστατον κανονικὴν μὲ πυκνότητα τὴν (1) τῆς § 7.2 τότε αἱ

$$Z = \alpha X + \beta Y \quad , \quad W = \gamma X + \delta Y \qquad (\Delta \neq 0) \qquad (9)$$

ἔχουν πυκνότητα πάλιν τῆς μορφῆς τῆς διαστάτου κανονικῆς. Οὕτω ἐδείχθη ὅτι

Πρότασις: Ἐάν αἱ X καὶ Y ἔχουν τὴν διδιάστατον κανονικὴν κατανομήν, τότε δύο γραμμικαὶ συναρτήσεις τούτων (ὡς εἰς τὴν (9)) ἔχουν ἐπίσης τὴν διδιάστατον κανονικήν. (Διὰ $\Delta = 0$ ἡ προκύπτουσα κανονικὴ κατανομὴ ἔχει βαθμὸν τὴν 1 καθότι $|\rho(Z, W)| = 1$, ἴδε § 8.1).

11.4 Συναρτήσεις πολλῶν μεταβλητῶν

Ἡ θεωρία τῶν δύο προηγουμένων παραγράφων δύναται νὰ ἐπεκταθῇ καὶ διὰ περισσοτέρας τῶν δύο μεταβλητάς. Οὕτω π.χ. τὸ θεώρημα τῆς § 11.2 γενικεύεται διὰ ν συναρτήσεις

$$y_i = g_i(x_1, \ldots, x_\nu) \ , \quad i = 1, \ldots, \nu$$

μὲ Ἰακωβιανὴν

$$J(x_1, \ldots, x_\nu) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) \neq 0$$

διδόν τὴν πυκνότητα $f^*(y_1, \ldots, y_\nu)$ τῶν

$$Y_i = g_i(X_1, \ldots, X_\nu) \ , \quad i = 1, \ldots, \nu$$

ὑπὸ τὴν μορφήν

$$f^*(y_1, \ldots, y_\nu) = f(x_1, \ldots, x_\nu) \left| J(x_1, \ldots, x_\nu) \right|^{-1} \qquad (1)$$

Εἰδικὸν ἐνδιαφέρον παρουσιάζει ὁ γραμμικὸς μετασχηματισμὸς

$$y = Ax$$

ὅπου ὁ πίναξ σταθερῶν $A = (a_{ij})$ εἶναι μὴ ἰδιάζων, ἤτοι $|A| \neq 0$, καὶ ἡ A^{-1} ὑπάρχει. Τότε ἡ πυκνότης τοῦ τυχαίου διανύσματος $Y = AX$ ὅπου $Y = (Y_1, \ldots, Y_\nu)'$, $X = (X_1, \ldots, X_\nu)'$ δίδεται ὑπό τῆς

$$f_Y(y) = \frac{1}{|A|} f_X(A^{-1} y) \qquad (2)$$

(πρβλ. (5), § 11.1, διά $\beta = 0$).

Ἡ (2) δύναται νά χρησιμοποιηθῇ π.χ., ἵνα δείξωμεν ὅτι, ἐάν αἱ $X_1 \ldots X_\nu$ ἔχουν τήν ν-διάστατον κανονικήν μέ πυκνότητα τήν (14) τῆς § 9.2. τότε καί ἡ $Y = AX$ ἀκολουθεῖ μίαν ν-διάστατον κατανομήν. Ἐάν ἡ X εἶναι $N(\mu, \Sigma)$ ὅπου $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_\nu)'$ καί $\Sigma = (\sigma_{ij})$ ὁ πίναξ διασπορᾶς τῆς X, τότε ἡ Y εἶναι $N(A\mu, A\Sigma A')$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δοθείσης τῆς συναρτήσεως κατανομῆς $F(x)$ καί τῆς πυκνότητος $f(x)$ μιᾶς συνεχοῦς μεταβλητῆς X νά εὑρεθῇ ἡ συνάρτησις κατανομῆς καί ἡ πυκνότης ἑκάστης τῶν κάτωθι μεταβλητῶν
α) $Y = X - 1$ β) $Y = \sin X$ γ) $Y = \tan X$

2. Σημεῖον A ἐκλέγεται τυχαίως ἐπί τῆς περιφερείας τοῦ μοναδιαίου κύκλου μέ κέντρον τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων. Νά εὑρεθῇ ἡ πυκνότης α) τῆς τεταγμένης τοῦ A β) τῆς ἀποστάσεως τοῦ A ἀπό τό σημεῖον $(0,1)$.

3. *Βελόνη τοῦ Buffon*. Βελόνη μήκους 2α ρίπτεται τυχαίως ἐπί πίνακος φέροντος παραλλήλους γραμμάς εἰς ἀπόστασιν 2δ $(\alpha < \delta)$. Δείξατε ὅτι ἡ πιθανότης ἵνα ἡ βελόνη τμήσῃ μίαν γραμμήν εἶναι $2\alpha/\pi\delta$. (Ὑποθέσατε ὅτι ἡ γωνία φ κλίσεως τῆς βελόνης ἐν σχέσει πρός τάς γραμμάς ἔχει τήν ὁμοιόμορφον κατανομήν διά $0 < \varphi < \pi/2$, ἡ δέ ἀπόστασις X τοῦ κέντρου τῆς βελόνης ἀπό τῆς πλησιεστέρας γραμμῆς εἶναι ὁμοιόμορφος εἰς τό διάστημα $(0, \delta)$.
Σημ. Διά ρίψεως τῆς βελόνης μεγάλον ἀριθμόν φορῶν δύναται

νά προσδιορισθῆ ἐμπειρικῶς (στατιστικῶς) ἡ τιμή τοῦ π (Μέθοδος Monte Carlo βασιζομένη ἐπί τοῦ Νόμου τῶν Μεγάλων Ἀριθμῶν τοῦ Bernoulli). Οὕτω ὁ Wolf (1856) ρίψας βελόνην 5000 φοράς εὗρε $\pi = 3,1596$, ὁ Smith (1855) ἐκ 3204 ρίψεων ἔλαβεν $\pi = 3,1553$, ὁ Fox (1894) διά 1120 ρίψεων εὗρε $\pi = 3,1419$ καί ὁ Lazarrini (1901) ἐκ 3408 ρίψεων εὗρε $\pi = 3,1415929$. Τά δύο τελευταῖα εἶναι ἔν τινι βαθμῷ ἀναξιόπιστα (ἀπίθανα).

4. Ἡ ἀκτίς R κύκλου μετρεῖται κατά προσέγγισιν οὕτως ὥστε, αὐτή νά ἔχη ὁμοιόμορφον κατανομήν εἰς τό διάστημα (α, β). Νά εὑρεθῆ ἡ κατανομή α) τοῦ μήκους τῆς περιφερείας β) τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου.

5. Ὑποτεθείσθω ὅτι αἱ X καί Y εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταβληταί μέ τήν αὐτήν ἐκθετικήν πυκνότητα

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x > 0$$

Δείξατε ὅτι αἱ $X+Y$ καί X/Y εἶναι ἐπίσης ἀνεξάρτητοι.

6. Ὑποτιθεμένου ὅτι αἱ X καί Y εἶναι ἀνεξάρτητοι ὁμοιόμορφοι μεταβληταί εἰς τό $(0,1)$, νά εὑρεθῆ ἡ πιθανότης ἵνα αἱ ρίζαι τῆς $\lambda^2 + 2X\lambda + Y = 0$ εἶναι πραγματικαί.

7. Τό μέγεθος $|\upsilon|$ τῆς ταχύτητος υ μορίου μάζης m ἑνός ἀερίου εἰς ἀπόλυτον θερμοκρασίαν T ἀκολουθεῖ, συμφώνως τῆς κινητικῆς θεωρίας τῶν ἀερίων, τήν καλουμένην ***κατανομήν Maxwell*** μέ πυκνότητα.

$$f(x) = \frac{4}{\alpha^3 \sqrt{\pi}} x^2 e^{-x^2/\alpha^2} \qquad x > 0$$

ὅπου ἡ παράμετρος $\alpha = (2KT/m)^{1/2}$ καί k ἡ σταθερά Boltzmann.

Νά εὑρεθῇ ἡ πυκνότης τῆς κινητικῆς ἐνεργείας

$$E = \frac{1}{2} m |\upsilon|^2$$

Δείξατε ὅτι ἐάν αἱ συνιστῶσαι $\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z$ τῆς υ εἶναι ἀνεξάρτητοι κανονικαί $N(0, \sigma^2)$, τότε ἡ $|\upsilon|$ ἔχει τήν κατανομήν Maxwell

8. Ἡ γωνία φ βολῆς βλήματος μέ ἀρχικήν ταχύτητα υ ἀκολουθεῖ τήν ὁμοιόμορφον κατανομήν εἰς τό διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$. Νά εὑρεθῇ ἡ κατανομή τῆς ὁριζοντίας ἀποστάσεως δ τοῦ σημείου βολῆς ἀπό τοῦ σημείου πτώσεως τοῦ βλήματος.

9. Ὑποτιθεμένου ὅτι αἱ X καί Y εἶναι κανονικαί μεταβληταί μέ μέσον 0, διασποράν σ^2 καί συντελεστήν συσχετίσεως ρ,

α) ποία ἡ κατανομή τοῦ X/Y.

β) Χρησιμοποιοῦντες τό ἀποτέλεσμά του α) δείξατε ὅτι

$$P[X<0,\ Y>0] = \frac{1}{2} \quad P[XY<0] = \frac{1}{4} - \frac{\arcsin\rho}{2\pi}$$

(πρβλ. Ἀσκ. IV 11 (δ))

10. Ἐάν τό σημεῖον κρούσεως $A = (X, Y)$ κατακορύφου στόχου μέ κέντρον τήν ἀρχήν 0 ἀκολουθεῖ τήν κατανομήν τῆς Ἀσκ. 10 μέ $\rho = 0$ (τήν λεγομένην ***κυκλικήν κανονικήν***) δείξατε ὅτι ἡ ἀπόστασις $R = (0A)$ τοῦ σημείου κρούσεως ἀπό τοῦ κέντρου τοῦ στόχου καί ἡ γωνία τῆς $0A$ μετά τοῦ ὁριζοντίου ἄξονος εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταβληταί. Ἡ R ἔχει τήν λεγομένην κατανομήν Rayleigh $(R = c\chi_2)$.

11. Ἐάν ἡ X εἶναι ὁμοιόμορφος εἰς τό διάστημα $(0,1)$ τότε

α) Δείξατε ὅτι ἡ

$$Y = \alpha X + \beta$$

εἶναι ἐπίσης ὁμοιόμορφος

β) Εὕρετε τήν κατανομήν τῆς $Y = AX^2 + BX + \Gamma$ $(A, B, \Gamma$ σταθεραί$)$

12. Ἔστωσαν $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ ἀνεξάρτητοι μεταβληταί μέ (τυχαῖον δεῖγμα ἀπό) τήν ὁμοιόμορφον κατανομήν εἰς τό $(0,1)$. Νά εὑρεθοῦν αἱ κατανομαί τῶν

$$Z = \max(X_1, \ldots, X_\nu) = \text{μεγίστη παρατήρησις}$$
$$W = \min(X_1, \ldots, X_\nu) = \text{ἐλαχίστη παρατήρησις}$$
$$R = Z - W = \text{πλάτος (κύμανσις) τοῦ δείγματος}$$

13. Ἐάν X_1, X_2 εἶναι ἀνεξάρτητοι ὁμοιόμορφοι εἰς τό $(0,1)$, νά εὑρεθοῦν αἱ πυκνότητες τῶν α) $X_1 + X_2$ β) $X_1 - X_2$ γ) $|X_1 - X_2|$ δ) X_1/X_2.

14. *Παραγωγή τυχαίων δειγμάτων*. Δοθέντων ν ἀνεξαρτήτων τυχαίων ἀριθμῶν $X_1, \ldots, X_\nu$ ἐκ τοῦ $(0,1)$, καλουμένων *ψευδοτυχαίων ἀριθμῶν* (pseudorandom numbers) δείξατε ὅτι

α) ἡ $Y = -\sum_{i=1}^{\nu} \log X_i$ ἔχει τήν χ^2 κατανομήν μέ 2ν βαθμούς ἐλευθερίας

β) αἱ μεταβληταί

$$\xi = \sqrt{-2\log X_1}\ \text{συν}\, 2\pi X_2 \quad , \quad \eta = \sqrt{-2\log X_1}\ \text{ημ}\, 2\pi X_2$$

εἶναι ἀνεξάρτητοι τυπικαί κανονικαί μεταβληταί $N(0,1)$.

Οὕτω ἡ α) παράγει δείγματα κατανομῆς χ^2 μέ ἄρτιον ἀριθμόν βαθμῶν ἐλευθερίας, ἐνῶ ἡ β) παράγει ἐξ ἑκάστου ζεύγους ψευδοτυχαίων ἀριθμῶν ἕν ζεῦγος ἀνεξαρτήτων κανονικῶν μεταβλητῶν.

15. Δύο φίλοι συμφωνοῦν νά συναντηθοῦν μεταξύ 1 μ.μ καί 2 μ.μ. εἴς τι ἑστιατόριον. Ὑποτιθεμένου ὅτι φθάνουν τυχαίως μεταξύ 1 μ.μ καί 2 μ.μ καί ἀνεξαρτήτως ἀλλήλων, τό δέ γεῦμα ἀπαιτεῖ 30 λεπτά ποία ἡ πιθανότης νά συναντηθοῦν εἰς τό ἑστιατόριον; Ἔστω T ἡ στιγμή συναντήσεως. Ποία ἡ δεσμευμένη κατανομή τῆς T ὑποτιθεμένου ὅτι θά συναντηθοῦν;

16.* Ἔστωσαν X καί Y τυχαῖαι μεταβληταί μέ ἀπό κοινοῦ συνάρτησιν πυκνότητος $f(x,y)$. Δείξατε, δι' ἐφαρμογῆς τῆς θεωρίας τῆς § 11.3, ὅτι :

α) Ἡ πυκνότης τῆς διαφορᾶς $Z = X - Y$ δίδεται ὑπό τῆς

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x\,,\,x-z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+z, x)\,dx$$

β) ἡ πυκνότης τοῦ γινομένου $Z = XY$ δίδεται ὑπό τῆς

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-1} f\left(\frac{z}{x}, x\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-1} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx$$

17. Συνέχεια. Ἐάν αἱ X καί Y εἶναι ἀνεξάρτητοι καί

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad |x|<1\,, \quad f_Y(y) = \frac{y}{\sigma^2}\, e^{-y^2/2\sigma^2}$$

δείξατε ὅτι ἡ XY εἶναι $N(0, \sigma^2)$

18.* Ὡς καί εἰς τήν Πρότ. 2 τῆς § 11.1, δείξατε ὅτι ἐάν αἱ

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_\nu, y_\nu), \ldots$$

εἶναι πραγματικαί λύσεις τῶν ἐξισώσεων

$$g(x,y) = z \qquad , \qquad h(x,y) = w$$

διά δεδομένα z καί w καί αἱ Ἰακωβιαναί

$$J(x_i, y_i) \neq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots$$

τότε ἡ συνάρτησις πυκνότητος τῶν Z, W ὅπου

$$Z = g(X, Y) \quad , \quad W = h(z, w)$$

δίδεται ὑπό τῶν

$$f^*(z,w) = \frac{f(x_1, y_1)}{|J(x_1, y_1)|} + \frac{f(x_2, y_2)}{|J(x_2, y_2)|} + \ldots + \frac{f(x_\nu, y_\nu)}{|J(x_\nu, y_\nu)|} + \cdots$$

ὅπου $f(x,y)$ εἶναι ἡ πυκνότης τῶν X καὶ Y.

19. Συνέχεια. Δείξατε ὅτι ἡ πυκνότης τῶν

$$Z=\sqrt{X^2+Y^2}\quad,\qquad W=\frac{X}{Y}$$

δίδεται ὑπὸ τῆς

$$f^*(z,w)=\frac{z}{1+w^2}\left[f\left(\frac{zw}{\sqrt{1+w^2}},\frac{z}{\sqrt{1+w^2}}\right)+f\left(\frac{-zw}{\sqrt{1+w^2}},\frac{-z}{\sqrt{1+w^2}}\right)\right]$$

Ἐφαρμόσατε ταύτην διὰ X καὶ Y ἀνεξαρτήτους $N(0,\sigma^2)$. Δείξατε ὅτι αἱ Z καὶ W εἶναι ἀνεξάρτητοι (πρβλ. Ἄσκ. 10).

20* *Μετασχηματισμὸς τοῦ ὁλοκληρώματος πιθανότητος.* Ἔστω ἡ συνεχὴς μεταβλητὴ X μὲ σ.κ. $F(x)$ καὶ θεωρήσωμεν τὴν τυχαίαν μεταβλητὴν

$$Y=F(X)=\int_{-\infty}^{X}f(x)\,dx$$

Ὁ μετασχηματισμὸς οὗτος, ὁ ὁποῖος εἰς ἑκάστην τιμὴν X ἀντιστοιχεῖ τὴν σ.κ. $F(X)$ καλεῖται μετασχηματισμὸς τοῦ ὁλοκληρώματος πιθανότητος. Δείξατε ὅτι ἡ κατανομὴ τῆς Y εἶναι ὁμοιόμορφος εἰς τὸ $(0,1)$, ἤτοι

$$F_Y(y)=y\quad,\qquad 0<y<1$$

Ὅθεν, δοθέντος τυχαίου δείγματος $x_1,\ldots,x_\nu$ ἐκ τῆς ὁμοιομόρφου δείξατε ὅτι αἱ λύσεις $y_1,y_2,\ldots,y_\nu$ τῶν

$$y_1=\overset{-1}{F}(x_1)\quad,\quad y_2=\overset{-1}{F}(x_2)\quad,\ldots,\quad y_\nu=\overset{-1}{F}(y_\nu)$$

ἀποτελοῦν τυχαῖον δεῖγμα ἐκ τῆς κατανομῆς F.

21. Συνέχεια. Κατασκευάσατε τυχαῖον δεῖγμα ἐκ τῆς ἐκθετικῆς κατανομῆς μὲ μέσην τιμὴν λ χρησιμοποιοῦντες τοὺς ψευδοτυχαίους ἀριθμοὺς (ἴδε Ἄσκ. 14) $x_1,\ldots,x_\nu$.

22. Συνέχεια. Ἐάν $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ εἶναι τυχαῖον δεῖγμα ἐκ τῆς κανονικῆς $N(\mu, \sigma^2)$, εὕρετε :

α) τὴν ἀπό κοινοῦ συνάρτησιν πυκνότητος τῶν τυχαίων μεταβλητῶν

$$Y = F\left(\min_{1 \le i \le \nu} X_i\right) \quad , \quad Z = F\left(\max_{1 \le i \le \nu} X_i\right)$$

β) $E(Z-Y)$ (πρβλ. Ἄσκ. 12) ὅπου F παριστᾶ τὴν σ.κ. τῆς $N(\mu, \sigma^2)$.

23. Ἐάν τό ὕψος X ἀνδρῶν ἀκολουθῆ τὴν κανονικὴν κατανομὴν $N(167\text{ cm}, 9\text{ cm}^2)$ καί ληφθῆ τυχαῖον δεῖγμα 10 ἀνδρῶν μέ ὕψη, ἔστω $X_1, \ldots, X_{10}$ ποία ἡ πιθανότης ἵνα τό (τυχαῖον) διάστημα $\delta = (\min(X_1, \ldots, X_{10}), \max(X_1, \ldots, X_\nu))$ καλύπτῃ τουλάχιστον 95% τοῦ πληθυσμοῦ τῶν ὑψῶν, ἤτοι, νά ὑπολογισθῇ ἡ

$$P\left\{ P\left[X \in \delta\right] \ge 0{,}95 \right\}$$

Σημ. Ἡ $P[X \in \delta]$ ἐξαρτωμένη ἐκ τοῦ τυχαίου διαστήματος δ εἶναι τυχαία μεταβλητή.

24. Ἔστω τυχαῖον δεῖγμα $X_1, \ldots, X_\nu$ ἐκ τῆς $N(\mu, \sigma^2)$. Δείξατε ὅτι ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη διά τὴν ἀνεξαρτησίαν τῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν

$$Y = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i X_i \quad , \quad Z = \sum_{i=1}^{\nu} \beta_i X_i$$

εἶναι ἡ $\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \beta_i = 0$.

25. Ἡ X λέγεται ***λογαριθμοκανονική*** μεταβλητή ἐάν ὁ $\log X = Y$ ἔχῃ τὴν κανονικὴν κατανομὴν $N(\mu, \sigma^2)$. Νά εὑρεθοῦν α) ἡ πυκνότης τῆς λογαριθμοκανονικῆς β) ἡ $E(Y)$ καί ἡ $\Delta(Y)$.

26.* Δείξατε ὅτι ἐάν $F(x, y)$ εἶναι ἡ σ.κ. τῶν X καί Y καί

$$Z = \max(X, Y) \quad , \quad W = \min(X, Y)$$

τότε

$$F_Z(z) = F(z,z) \quad , \quad F_W(w) = F_X(w) + F_Y(w) - F(w,w)$$

Ἐάν ἡ $F(x,y)$ εἶναι συνεχής, ποῖαι εἶναι αἱ πυκνότητες τῶν Z καὶ W;

27. Συνέχεια. Ἐάν αἱ X καὶ Y εἶναι ἀνεξάρτητοι $N(0,1)$, δείξατε ὅτι

$$E\left\{\max(X,Y)\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

28. Ἡ k-διάστατος κατανομή Dirichlet ὁρίζεται ὑπὸ τῆς πυκνότητος

$$f(x_1,\ldots,x_\nu) = \frac{\Gamma(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_{k+1})}{\Gamma(\nu_1)\cdots\Gamma(\nu_{k+1})}\, x_1^{\nu_1-1}\cdots x_k^{\nu_k-1}(1-x_1-\cdots-x_k)^{\nu_{k+1}-1}$$

διὰ $x_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{\nu} x_i \leq 1$.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ κατανομή α) τοῦ $Y_k = X_1 + \cdots + X_k$ καὶ β) τῶν $Y_i = X_1 + \cdots + X_i$, $i = 1,2,\ldots,k$.

29. Συνέχεια. Ἐάν αἱ X_i, $i=1,\ldots,k+1$ εἶναι ἀνεξάρτητοι Γ-μεταβληταὶ μὲ παραμέτρους $\nu_1,\ldots,\nu_{k+1}$ καὶ λ, δείξατε ὅτι αἱ

$$Y_i = \frac{X_i}{X_1+\cdots+X_{k+1}} \quad , \quad i = 1,\ldots,k$$

ἔχουν τὴν k-διάστατον κατανομὴν Dirichlet.

30. Ἔστωσαν αἱ X καὶ Y ἀνεξάρτητοι Poisson μὲ παραμέτρους λ καὶ μ. Δείξατε

α) Διὰ τοῦ τύπου τῆς συνελίξεως, ὅτι τὸ ἄθροισμα $X+Y$ εἶναι ἐπίσης Poisson β) ὅτι ἡ δεσμευμένη συνάρτησις πιθανότητος τῆς X δοθείσης τῆς $X+Y$ εἶναι διωνυμική, ἤτοι

$$P\left[X=k \mid X+Y=\nu\right]=b\left(k,\nu,\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$$

31. *Σχέσις μεταξύ τῆς κατανομῆς Student καί τῆς κατανομῆς F.* Ἔστω t_ν μεταβλητή Student μέ ν βαθμούς ἐλευθερίας καί $F_{\nu,\nu}$ μεταβλητή F μέ ν καί ν βαθμούς ἐλευθερίας. Δείξατε ὅτι ἡ t_ν ἔχει τήν κατανομήν τῆς

$$\frac{\sqrt{\nu}}{2}\left(\sqrt{F_{\nu,\nu}}-\frac{1}{\sqrt{F_{\nu,\nu}}}\right).$$

Ἐξ αὐτοῦ συμπεράνατε ὅτι τό ἄνω α σημεῖον $t_\nu(\alpha)$ τῆς t_ν συνδέεται μετά τοῦ ἄνω α σημείου $F_{\nu,\nu}(\alpha)$ τῆς $F_{\nu,\nu}$ διά τῆς σχέσεως

$$t_\nu(\alpha)=\frac{\sqrt{\nu}}{2}\left(F_{\nu,\nu}(\alpha)-\frac{1}{\sqrt{F_{\nu,\nu}(\alpha)}}\right)$$

Ὑπόδειξις. Ἐάν αἱ X, Y εἶναι ἀνεξάρτητοι χ^2_ν - μεταβληταί δείξατε ὅτι ἡ

$$\frac{\sqrt{\nu}}{2}\,\frac{X-Y}{\sqrt{XY}}$$

ἔχει τήν κατανομήν t_ν.

32. *Παράδοξον τοῦ Bertrand.* Ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον ἀκτῖνος r. Ἐκλέγομεν χορδήν AB τυχαίως. Ποία ἡ πιθανότης ἵνα τό μῆκος τῆς χορδῆς εἶναι μεγαλύτερον τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου; Ἡ ἀπάντησις ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ τρόπου ἐκλογῆς τῆς χορδῆς. Ἐξετάσατε τάς ἑξῆς περιπτώσεις. α) Ἐκλέγομεν τυχαίως τό μέσον τῆς χορδῆς. β) Ἐφ' ὅσον τό ἄκρον A τῆς χορδῆς εἶναι τυχαῖον, ὑποθέτομεν τοῦτο σταθερόν (δεδομένον σημεῖον τῆς περιφερείας) καί ἐκλέγομεν κατά τύχην τό ἕτερον σημεῖον B γ) Ἐφ' ὅσον ἡ διεύθυνσις τῆς AB εἶναι τυχαία, ὑποθέτομεν ταύτην σταθεράν καί, ἔστω, κάθετον πρός δοθεῖσαν διάμετρον, ἔστω OO′. Τό μέσον τῆς χορδῆς ἐκλέγεται τότε τυχαίως ἐπί τῆς OO′. δ) Φέρομεν ἐφαπτομένην εἰς τυχόν σημεῖον τῆς πε-

ριφερείας· ἐκλέγομεν τυχαίως γωνίαν θ μεταξύ 0 καί π καί φέρομεν χορδήν σχηματίζουσαν γωνίαν θ μετά τῆς ἐφαπτομένης. ε) Ἐκλέγομεν δύο σημεῖα X_1 καί X_2 τυχαίως εἰς τά διαστήματα $(0,2\pi)$ καί $(0,r)$. Κατασκευάζομεν τότε χορδήν AB σχηματίζουσαν γωνίαν X_1 μετά δοθείσης σταθερᾶς διευθύνσεως καί ἀπέχουσαν X_2 ἀπό τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Αἱ κατωτέρω ἀσκήσεις νά λυθοῦν διά τῶν μεθόδων τοῦ Κεφαλαίου VI.

33. Ἔστω $S_N = X_1 + \dots + X_N$ ὅπου αἱ X_i εἶναι ἀνεξάρτητοι. Δείξατε ὅτι: α) Ἐάν ἡ X_i εἶναι διωνυμική μέ παραμέτρους ν_i καί p, τότε ἡ S_N εἶναι διωνυμική μέ παραμέτρους $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_N$ καί p. β) Ἐάν ἡ X_i ἔχη τήν Γ- κατανομήν μέ παραμέτρους ν_i καί λ, τότε ἡ S_N ἔχει τήν Γ- κατανομήν μέ παραμέτρους $\nu = \nu_1 + \dots + \nu_N$ καί λ.

34. Ἔστω $X_1, \dots, X_\nu$ τυχαῖον δεῖγμα ἐκ τῆς κατανομῆς Cauchy μέ πυκνότητα

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \, \frac{\beta^2}{\beta^2 + (x-\alpha)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

Δείξατε ὅτι ὁ μέσος τοῦ δείγματος

$$\bar{X} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} X_i$$

ἔχει τήν αὐτήν κατανομήν μέ ἑκάστην τῶν $X_1, \dots, X_\nu$.

35. Ἐάν $X_1, \dots, X_\nu$ εἶναι τυχαῖον δεῖγμα ἀπό τήν κανονικήν $N(\mu, \sigma^2)$, δείξατε ὅτι ὁ μέσος $\bar{X}$ τοῦ δείγματος εἶναι $N(\mu, \sigma^2/\nu)$.

36. Ἐάν ἡ X ἔχῃ τήν κατανομήν χ^2 (Χι-τετράγωνον) μέ ν βαθμούς ἐλευθερίας, τότε ἡ πυκνότης τῆς ἀντιστοίχου τυποποιημένης μεταβλητῆς

$$Y = \frac{X-\nu}{\sqrt{2\nu}}$$

τείνει πρός τήν κανονικήν πυκνότητα $\varphi(x)$ ὅταν τό $\nu \longrightarrow \infty$.

37 Ἐάν $X_1, \ldots, X_\nu$ εἶναι τυχαῖον δεῖγμα ἐκ τῆς κανονικῆς $N(\mu, \sigma^2)$ καί $c_1, c_2, \ldots, c_\nu$ σταθεραί ἔχουσαι ἄθροισμα τήν 1 καί ἄθροισμα τετραγώνων τήν 1, δείξατε ὅτι α) ἡ $Y = c_1X_1 + \ldots + c_\nu X_\nu$ ἔχει τήν κατανομήν $N(\mu, \sigma^2)$ καί β) Δέν ὑπάρχουν c_i ὅλα θετικά ἱκανοποιοῦσαι τάς ἐν λόγῳ συνθήκας.

38. Αἱ X καί Y ἔχουν τήν διδιάστατον κανονικήν κατανομήν μέ συσχέτισιν ρ, μέσας τιμάς 0 καί διασποράς τήν 1. Δείξατε ὅτι τό ἄθροισμα $X+Y$ εἶναι ἐπίσης κανονική.

39. Ἔστω $\xi = (X_1, \ldots, X_\nu)$ τυχαῖον διάνυσμα ἀκολουθοῦν τήν ν-διάστατον κανονικήν κατανομήν μέ μέσην τιμήν τό μηδενικόν διάνυσμα, ἤτοι $E(X_i) = 0$, $i = 1, \ldots, \nu$ καί πίνακα διασπορᾶς $\Sigma = I$, ὅπου I ὁ μοναδιαῖος πίναξ τάξεως ν. Ἔστω $A = (\alpha_{ij})$ ὀρθογώνιος πίναξ (ἤτοι $AA' = I$) σταθερῶν. Δείξατε ὅτι τό τυχαῖον διάνυσμα

$$\eta = A\xi$$

ἔχει τήν αὐτήν κατανομήν ὡς καί τό ξ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΟΡΙΑΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ. ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΓΑΛΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΚΕΝΤΡΙΚΟΝ ΟΡΙΑΚΟΝ ΘΕΩΡΗΜΑ

Ἡ ἔννοια τῆς συγκλίσεως γενικῶς εἶναι ἐξ ἴσου βασικὴ εἰς τὴν θεωρίαν πιθανοτήτων ὅσον καὶ εἰς τὴν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν. Εἴδομεν ἤδη εἰς τὸ Θεώρημα τῆς Συνεχείας, Κεφ. V, τὴν ἔννοιαν τῆς συγκλίσεως μιᾶς ἀκολουθίας συναρτήσεων κατανομῶν $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_\nu(x)$, ... πρὸς μίαν συνάρτησιν κατανομῆς $F(x)$. Πλὴν τοῦ εἴδους τούτου διακρίνομεν καὶ ἄλλους τρόπους συγκλίσεως μιᾶς ἀκολουθίας μεταβλητῶν $X_1, X_2, \ldots, X_\nu, \ldots$ Ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν **αἱ ἀκολουθίαι τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων** ἢ τῶν ἀντιστοίχων **μέσων ὅρων** ἐκ τῶν ὅρων μιᾶς ἀκολουθίας ἀνεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητῶν $X_1, \ldots, X_\nu$. Οἱ διάφοροι τρόποι συγκλίσεως τῆς ἀκολουθίας τῶν ἀθροισμάτων $\{S_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ ὅπου $S_\nu = X_1 + X_2 + \ldots + X_\nu$, ἀντιστοιχοῦν εἰς διαφόρους περιπτώσεις τοῦ καλουμένου Νόμου τῶν Μεγάλων Ἀριθμῶν καὶ τοῦ Κεντρικοῦ Ὁριακοῦ Θεωρήματος. Βασικὸν ρόλον εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῶν ὁριακῶν τούτων θεωρημάτων παίζει ἡ εἰς τὸ Κεφ. V ἐκτεθεῖσα θεωρία τῶν χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων.

12.1 Τρόποι συγκλίσεως μιᾶς ἀκολουθίας τυχαίων μεταβλητῶν

Θεωρήσωμεν μίαν ἀκολουθίαν τυχαίων μεταβλητῶν $X_1, X_2, \ldots, X_\nu, \ldots$ καὶ ἑτέραν μεταβλητὴν X, ἔστωσαν δὲ $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_\nu(x)$, ... καὶ $F(x)$ αἱ ἀντίστοιχοι συναρτήσεις κατανομῆς. Διακρίνομεν τοὺς ἑξῆς κυρίους τρόπους συγκλίσεως τῆς ἀκολουθίας $\{X_\nu\}$.

α) *Σύγκλισις κατὰ πιθανότητα*, συμβολιζομένη διά: $X_\nu \xrightarrow{P} X$, ἐάν διά κάθε $\varepsilon > 0$ ἰσχύη ἡ

$$\lim_{\nu \to \infty} P\left[|X_\nu - X| \geq \varepsilon\right] = 0 \qquad (1)$$

Ἡ σύγκλισις αὕτη τῆς X_ν πρός τήν μεταβλητήν X κατά πιθανότητα ἀντιστοιχεῖ πρός τήν ***σύγκλισιν κατά μέτρον*** εἰς τήν θεωρίαν μέτρου καί καλεῖται καί ***ἀσθενής σύγκλισις*** ἤ ***στοχαστική σύγκλισις***.

β) ***Σύγκλισις μέ πιθανότητα τήν μονάδα*** ἤ ***σχεδόν βεβαίως*** τῆς $X_\nu \longrightarrow X$, συμβολιζομένη διά : $X_\nu \xrightarrow{\sigma.\beta} X$, ἐάν

$$P\left[\lim_{\nu \to \infty} X_\nu = X\right] = 1 \qquad (2)$$

Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν λέγομεν ὅτι ἡ X_ν συγκλίνει πρός τήν X ***ἰσχυρῶς***. Τοῦτο ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν μετροθεωρητικήν σύγκλισιν "σχεδόν παντοῦ" ἐδῶ ἐχρησιμοποιήσαμεν τόν ὅρον "σχεδόν βεβαίως" (σ. β.) (almost surely , presque sûrement).

γ) ***Σύγκλισις κατά μέσον τετραγώνου***, σημειουμένη διά : $X_\nu \xrightarrow{\kappa.\mu.} X$, ἐάν

$$\lim_{\nu \to \infty} E(X_\nu - X)^2 = 0 \qquad (3)$$

δ) ***Σύγκλισις κατά νόμον ἤ κατανομή***, σημειουμένη διά: $X_\nu \xrightarrow{\kappa.N.} X$, ἐάν (ἴδε καί § 11.3)

$$\lim_{\nu \to \infty} F_\nu(x) = F(x) \quad \text{διά κάθε σημεῖον συνεχείας τῆς } F \qquad (4)$$

12.2 Σχέσεις μεταξύ τῶν διαφόρων τρόπων συγκλίσεως

Πρότασις 1. Ἡ στοχαστική σύγκλισις συνεπάγεται σύγκλισιν κατά νόμον, ἤτοι

$$X_\nu \xrightarrow{\kappa.P} X \Longrightarrow X_\nu \xrightarrow{\kappa.N} X \qquad (1)$$

Ἀπόδειξις : Ἔστω $X - X_\nu = Y_\nu$, ὅπου ἐξ ὑποθέσεως θά ἔχωμεν διά κάθε $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\nu \to \infty} P\left[Y_\nu \geq \varepsilon\right] = 0 \qquad (2)$$

Διά κάθε σημείον συνεχείας τής F έχομεν

$$F_\nu(x) = P\left[X_\nu \le x\right] = P\left[X \le Y_\nu + x\right] = P\left[X \le x + Y_\nu ,\ Y_\nu < \varepsilon\right] + P\left[X \le x + Y_\nu ,\ Y_\nu \geq \varepsilon\right]$$

$$\le P\left[X \le x + \varepsilon\right] + P\left[Y_\nu \geq \varepsilon\right]$$

Όθεν καί έκ τής (2)

$$\limsup_{\nu\to\infty} F_\nu(x) \le F(x+\varepsilon) \qquad (3)$$

Ομοίως εύρίσκομεν

$$\liminf_{\nu\to\infty} F_\nu(x) \geq F(x+\varepsilon) \qquad (4)$$

Λαμβάνοντες τά όρια διά $\varepsilon \to 0$ είς τάς (3) καί (4), έχομεν

$$\limsup_{\nu\to\infty} F_\nu(x) = \liminf_{\nu\to\infty} F_\nu(x) = F(x)$$

Άρα τό $\lim F_\nu(x)$ ύπάρχει καί έπί πλέον

$$\lim_{\nu\to\infty} F_\nu(x) = F(x)$$

Ούτω έδείχθη ή (1).

Παρατήρησις: Τό άντίστροφον τής (1) δέν είναι έν γένει άληθές. Ούτω θεωρήσωμεν τήν άκολουθίαν $\{X_\nu\}$ όπου

$$X_{2k-1} = X \quad ; \quad X_{2k} = -X \quad ; \quad k = 1, 2, \dots$$

όπου ή

$$P\left[X = \pm k\right] = \frac{1}{2^{k+1}} \quad , \quad k = 1, 2, \dots$$

Προφανώς,

$$F_\nu(x) = F_X(x) = F_{-X}(x)$$

καί αύτομάτως διά κάθε σημείον συνεχείας τής F

$$\lim_{\nu\to\infty} F_\nu(x) = F_X(x)$$

Πλήν όμως διά $\nu = 2k-1$, $|X_\nu - X| = 0$ ένώ διά $\nu = 2k$, $|X_\nu - X| =$ $= 2|X|$ καί έπομένως διά δοθέν $\varepsilon>0$ καί $\delta>0$ δέν ὑπάρχει $N(\varepsilon)$ τοιοῦτον ὥστε διά $\nu>N(\varepsilon)$

$$P\left[|X_\nu - X| \geq \varepsilon\right] < \delta$$

Ἄρα ἡ (4), § 12.1, δέν συνεπάγεται, ἐν γένει, τήν (1) § 12.1.
Ἰσχύει παρά ταῦτα τό κάτωθι μερικόν ἀντίστροφον, διά τήν περίπτωσιν $X = c$.

Πρότασις 2. Ἡ στοχαστική σύγκλισις τῆς $\{X_\nu\}$ πρός μίαν σταθεράν c εἶναι ἰσοδύναμος πρός τήν σύγκλισιν κατά νόμον τῆς $\{X_\nu\}$ πρός τήν c, ἤτοι

$$X_\nu \xrightarrow{\kappa.N} c \Longleftrightarrow X_\nu \xrightarrow{\kappa.P} c. \tag{5}$$

Ἀπόδειξις: Ἀρκεῖ, λόγῳ τῆς (1), νά ἀποδείξωμεν τό $\Longrightarrow$ εἰς τήν (5).
Ἔχομεν ἐξ ὑποθέσεως

$$\lim_{\nu\to\infty} F_\nu(x) = \begin{cases} 1 & \text{διά } x \geq c \\ \\ 0 & \text{διά } x < c \end{cases} \tag{6}$$

ἐφ' ὅσον ἡ X_ν συγκλίνει πρός τήν ἐκφυλισμένην (σημειακήν) κατανομήν, ἡ ὁποία εἶναι συγκεντρωμένη εἰς τό σημεῖον c.

Διά κάθε $\varepsilon>0$ ἔχομεν δυνάμει τῆς (6)

$$P\left[X_\nu < c-\varepsilon\right] \leq P\left[X_\nu \leq c-\varepsilon\right] = F_\nu(c-\varepsilon) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$$

$$P\left[X_\nu > c+\varepsilon\right] = 1 - F_\nu(c+\varepsilon) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$$

Ὅθεν

$$P\left[X_\nu - c \geq \varepsilon\right] \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$$

καί ἡ ἀπόδειξις τῆς (5) εἶναι πλήρης.

Πρότασις 3. Ἡ ἰσχυρά σύγκλισις συνεπάγεται τήν στοχαστικήν (ἀσθενῆ) σύγκλισιν, ἤτοι

$$X_\nu \xrightarrow{\sigma.\beta} X \Longrightarrow X_\nu \xrightarrow{\kappa.P} X \tag{7}$$

Ἀπόδειξις: Ἡ ἰσχυρά σύγκλισις σημαίνει ὅτι, διά κάθε $\varepsilon>0$

$$\lim_{N \to \infty} P\left[\sup_{\nu \geq N} |X_\nu - X| \geq \varepsilon\right] = 0 \qquad (8)$$

Ἐπὶ πλέον τὸ ἐνδεχόμενον $|X_N - X| \geq \varepsilon$ συνεπάγεται τὸ $\sup\limits_{\nu \geq N} |X_\nu - X| \geq \varepsilon$.

Ἄρα

$$P\left[|X_N - X| \geq \varepsilon\right] \leq P\left[\sup_{\nu \geq N} |X_\nu - X| \geq \varepsilon\right]$$

Ὅθεν καὶ ἐκ τῆς (8) ἕπεται ἡ

$$\lim_{N \to \infty} P\left[|X_N - X| \geq \varepsilon\right] = 0$$

καὶ ἡ (7) ἐδείχθη.

Πρότασις 4. Ἡ σύγκλισις κατὰ μέσον συνεπάγεται τὴν σύγκλισιν κατὰ πιθανότητα, ἤτοι

$$X_\nu \xrightarrow{\text{u.}\mu} X \Longrightarrow X_\nu \xrightarrow{\text{u.}P} X \qquad (9)$$

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς (9) θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν καλουμένην ἀνισότητα Chebyshev, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ μερικὴν περίπτωσιν τῆς ἑξῆς ἀνισότητος τοῦ Markov.

Ἀνισότης τοῦ Markov. Ἔστω Y θετικὴ μεταβλητή· ὑποθέσωμεν ὅτι $E(Y) < \infty$. Τότε διὰ κάθε $\varepsilon > 0$ ἔχομεν

$$P\left[Y \geq \varepsilon\right] \leq \frac{E(Y)}{\varepsilon} \qquad (10)$$

Ἀπόδειξις:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\,dF(y) \geq \int_{y \geq \varepsilon} y\,dF(y) \geq \varepsilon \int_{y \geq \varepsilon} dF(y) = \varepsilon P\left[Y \geq \varepsilon\right]$$

Ὅθεν ἕπεται ἡ (10).

Ὡς πόρισμα τῆς (10) ἔχομεν τὴν ἀνισότητα Chebyshev (ἐνίοτε καλουμένην ἀνισότητα Chebyshev – Bienaymé).

Ἀνισότης Chebshev. Ἐὰν $E(X) = \mu$ καὶ $\Delta(X) = \sigma^2$, τότε διὰ κάθε $\varepsilon > 0$

$$P\left[|X - \mu| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \qquad (11)$$

Αὕτη διατυποῦται καὶ ὡς ἑξῆς: Διὰ κάθε $\lambda > 1$

$$P\left[|X-\mu| \geqslant \lambda\sigma\right] \leqslant \frac{1}{\lambda^2} \tag{12}$$

Ἀπόδειξις: Ἔχομεν δυνάμει τῆς (10)

$$P\left[|X-\mu| \geqslant \varepsilon\right] = P\left[(X-\mu)^2 \geqslant \varepsilon^2\right] \leqslant \frac{E(X-\mu)^2}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Ἀπόδειξις τῆς (9): Δυνάμει τῆς (11) διά κάθε $\varepsilon > 0$, ἔχομεν

$$P\left[|X_\nu - X| \geqslant \varepsilon\right] \leqslant \frac{E(X_\nu - X)^2}{\varepsilon^2} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0$$

Ἄλλαι σχέσεις μεταξύ τῶν τρόπων συγκλίσεως α), β) καί γ) δέν ἰσχύουν ἐν γένει, ἄνευ ἐπιβολῆς περαιτέρω περιορισμῶν.

Πρότασις 5. Ἐάν ἡ $X_\nu \xrightarrow{u.\mu.} c$ οὕτως ὥστε

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} E(X_\nu - c)^2 < \infty \tag{13}$$

τότε $X_\nu \xrightarrow{\sigma.\beta.} c$.

Ἀπόδειξις: Ἔστω $P(A) = P\left[\sum_{i=1}^{\infty}(X_i - c)^2\right] = \infty = p > 0$ καί A_N τό ἐνδεχόμενον: $\sum_{i=1}^{N}(X_i - c)^2 > \lambda$. Ἡ ἀκολουθία $\{A_N\}$ εἶναι μή φθίνουσα ἤτοι $A_{N+1} \supseteqq A_N$, διά $N = 1, 2, \ldots$ καί δυνάμει τοῦ Ἀξιώματος τῆς Συνεχείας (ἴδε Συμπλήρωμα)

$$\lim_{N\to\infty} P(A_N) = P(\lim_{N\to\infty} A_N) \geqslant P\left[\sum_{i=1}^{\infty}(X_i - c)^2 = \infty\right] = p$$

Ἑπομένως διά N ἀρκούντως μέγα

$$\sum_{i=1}^{N} E(X_i - c)^2 = E\left\{\sum_{i=1}^{N}(X_i - c)^2\right\} > \lambda p$$

τό ὁποῖον ἀντιτίθεται εἰς τήν (13), ἐφ' ὅσον τό λ δύναται νά ἐκλεγῆ αὐθαιρέτως μέγα. Ἄρα

$$P\left[\sum_{i=1}^{\infty}(X_\nu - c)^2 = \infty\right] = 0$$

ἤτοι

$$P\left[\sum_{i=1}^{\infty}(X_\nu - c)^2 < \infty\right] = 1$$

καί διά τόν ν-οστόν ὅρον τῆς συγκλινούσης σειρᾶς θά ἰσχύη

$$P\left[|X_\nu - c| \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0\right] \geq P\left[\sum_{i=1}^{\infty} (X_i - c)^2 < \infty\right] = 1$$

ἤτοι $X_\nu \xrightarrow{\sigma.\beta} c$.

12.3 Νόμοι τῶν Μεγάλων Ἀριθμῶν

Ὡς ἀνεφέρθη εἰς τὴν Εἰσαγωγήν, ἡ ἐμπειρικὴ βάσις διὰ τὰς ἐφαρμογὰς τῆς θεωρίας τῶν πιθανοτήτων ἔγκειται εἰς τὴν ἑρμηνείαν τῆς πιθανότητος ὡς ὁριακῆς σχετικῆς συχνότητος ὡς ἐτονίσθη ὑπὸ τοῦ Von Mises. Ἡ ἐμπειρικῶς διαπιστωθεῖσα σταθερότης τῆς σχετικῆς συχνότητος μετὰ τῆς ὁποίας ἐμφανίζεται ἓν ἐνδεχόμενον εἰς μεγάλον ἀριθμὸν ἐπαναλήψεων (παρατηρήσεων) ἑνὸς πειράματος τύχης (ἑνὸς τυχαίου φαινομένου), ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τὸ περιεχόμενον τοῦ **νόμου τῆς στατιστικῆς τάξεως**, ἔχει ὡς θεωρητικὸν ὑπόβαθρον τὸν καλούμενον Νόμον τῶν Μεγάλων Ἀριθμῶν. Ὁ νόμος, ἐν ἁδραῖς γραμμαῖς, ὁρίζει τὴν συμπεριφορὰν τοῦ μέσου ὅρου μεγάλου ἀριθμοῦ παρατηρήσεων. Ὡς ἐκ τούτου εἶναι τεραστίας σημασίας εἰς τὴν Στατιστικὴν Συμπερασματολογίαν, ὅπου ὁ ἄγνωστος μέσος μιᾶς κατανομῆς (ἑνὸς στατιστικοῦ πληθυσμοῦ) ὑπολογίζεται ἢ μᾶλλον ἐκτιμᾶται ὑπὸ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου (ὅρου) τῶν παρατηρήσεων τοῦ δείγματος. Τὸ ἐρώτημα τίθεται κατὰ πόσον ὁ μέσος τοῦ δείγματος "πλησιάζει" (συγκλίνει πρὸς) τὸν μέσον τοῦ πληθυσμοῦ ὅταν τὸ πλῆθος τῶν παρατηρήσεων αὐξάνῃ (θεωρητικῶς τεῖνον εἰς τὸ ∞). Ἡ ἀπάντησις δίδεται ὑπὸ τοῦ Νόμου τῶν Μεγάλων Ἀριθμῶν, ὁ ὁποῖος δύναται νὰ εἴπῃ ὅτι, δικαιολογεῖ τὴν κοινὴν ἀντίληψιν ὅτι "στατιστικὴ σημαίνει μέσος ὅρος".

Νόμος τῶν Μεγάλων Ἀριθμῶν (Ν.Μ.Α) τῶν Chebyshev - Markov (Ἀσθενὴς Ν.Μ.Α). Ἔστωσαν αἱ $X_1, X_2, \ldots, X_\nu, \ldots$ ἀνεξάρτητοι τυχαῖαι μεταβληταί, καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι $E(X_i) = \mu_i$, $\Delta(X_i) = \sigma_i^2$, $i = 1, 2, \ldots$ καὶ ἐπὶ πλέον.

$$\frac{1}{\nu^2} \sum_{i=1}^{\nu} \sigma_i^2 \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0 .$$

Ἔστωσαν $\bar{X}_\nu = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i$, $\bar{\mu}_\nu = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\mu_i$. Τότε

$$\bar{X}_\nu - \bar{\mu}_\nu \xrightarrow{u.P} 0 . \qquad (1)$$

Ἀπόδειξις: Βάσει τῆς ἀνισότητος Chebyshev (11) § 12.2, ἔχομεν διά κάθε $\varepsilon > 0$

$$P\left[|\bar{X}_\nu - \bar{\mu}_\nu| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{\Delta(\bar{X}_\nu)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\nu^2\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{\nu}\sigma_i^2 \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0.$$

ἤτοι ἐδείχθη ἡ (1).

Ὡς πόρισμα τούτου ἔχομεν τό ἑξῆς

Θεώρημα 1. Ἐάν $X_1, \ldots, X_\nu, \ldots$ εἶναι τυχαῖον δεῖγμα ἀπό κατανομήν $F_X(x)$ μέ $E(X)=\mu$ καί $\Delta(X)=\sigma^2<\infty$, τότε

$$\bar{X}_\nu \xrightarrow{u.P} \mu$$

ἤτοι ὁ μέσος τοῦ δείγματος $\bar{X}_\nu$ συγκλίνει στοχαστικῶς πρός τόν μέσον τῆς κατανομῆς (τοῦ πληθυσμοῦ).

Μερική περίπτωσις τοῦ θεωρήματος τούτου εἶναι ὁ κλασσικός ***Νόμος τῶν Μεγάλων ἀριθμῶν τοῦ Bernoulli*** διά τήν διωνυμικήν κατανομήν.

Θεώρημα τοῦ Bernoulli. Ἔστω $\frac{k}{\nu}$ ἡ ἀναλογία ἐπιτυχιῶν εἰς ν δοκιμάς Bernoulli μέ παράμετρον (πιθανότητα ἐπιτυχίας) p. Τότε, τοῦ $\nu \longrightarrow \infty$

$$\frac{k}{\nu} \xrightarrow{u.P} p$$

Ἀπόδειξις: Λαμβάνομεν ὡς X_i τοῦ προηγουμένου θεωρήματος τάς διτίμους μεταβλητάς Bernoulli X_i μέ

$$P\left[X_i=1\right]=p \ , \quad P\left[X_i=0\right]=1-p=q$$

Τότε $\bar{X}_\nu = k/\nu$, $\mu = p$.

Ὁ Γάλλος φυσιοδίφης τοῦ 18ου αἰῶνος Buffon ἔρριψε νόμισμα 4.040 φοράς καί ἔλαβεν "Κορῶνα" (K) 2.048 φοράς, παρατηρήσας οὕτω σχετικήν συχνότητα ἐπιτυχιῶν ἴσην πρός 0,507. Ὁ Ἄγγλος στατιστικός

Karl Pearson ρίψας νόμισμα 12000 φοράς, ἔφερεν, k 6.019 φοράς ἐπιτυχών οὕτω σχετικὴν συχνότητα 0,5016. Εἰς ἄλλην περίπτωσιν, ρίψας νόμισμα 24.000 φοράς παρετήρησεν k 12.012 φοράς, ἤτοι μὲ σχετικὴν συχνότητα 0,5005. Οὕτω εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις ἡ σχετικὴ συχνότης πολὺ ὀλίγον ἀπεῖχε τοῦ $p = \frac{1}{2}$, συμφώνως καὶ πρὸς τὸν Νόμον τῶν Μεγάλων Ἀριθμῶν.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος 1 ἕπεται καὶ τὸ ἑξῆς.

Θεώρημα τοῦ Poisson. Ἐὰν ἔχωμεν γενικευμένας δοκιμὰς Bernoulli, ἤτοι

$$P\left[X_i = 1\right] = p_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots$$

καὶ $\bar{p}_\nu = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} p_i$, τότε ἡ σχετικὴ συχνότης ἐπιτυχιῶν

$$\frac{k}{\nu} \xrightarrow[\nu \to \infty]{u.P} \bar{p},$$

Εἰς τοὺς ἀνωτέρω Ν.Μ.Α ὑπετέθη ἡ ὕπαρξις τῆς διασπορᾶς. Τοῦτο ὅμως δὲν εἶναι, ἐν γένει, ἀναγκαῖον. Οὕτω ἔχομεν τὸ

Θεώρημα (Ν.Μ.Α) τοῦ Khintchine (1928). Ἐὰν αἱ $X_1, X_2, \ldots, X_\nu, \ldots$ εἶναι ἀνεξάρτητοι καὶ ἰσόνομοι καὶ $E(X_i) = \mu$, τότε

$$\bar{X}_\nu \xrightarrow{u.P} \mu$$

Ἀπόδειξις: Δυνάμει τοῦ θεωρήματος τῆς Συνεχείας, Κεφ. V, καὶ τῆς Προτ. 2, § 12.2, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ χ.σ. $\varphi(t)$ τοῦ $\bar{X}_\nu$ τείνει πρὸς τὴν χ.σ. τῆς ἐκφυλισμένης κατανομῆς (τῆς σταθερᾶς μ).

Ἔχομεν δυνάμει τοῦ θεωρήματος, § 10.4,

$$\varphi_{X_i}(t) = 1 + i\mu t + o(t)$$

καὶ ἐπομένως

$$\varphi_{\bar{X}_\nu}(t) = \left[\varphi_{X_i}\left(\frac{t}{\nu}\right)\right]^\nu = \left[1 + i\mu\frac{t}{\nu} + o\left(\frac{t}{\nu}\right)\right]^\nu \xrightarrow[\nu \to \infty]{} e^{i\mu t}$$

ἡ ὁποία εἶναι ἡ χ.σ. τῆς σταθερᾶς μ.

Ἰσχυροὶ Νόμοι τῶν Μ.Α. Οἱ ἀνωτέρω Ν.Μ.Α ἀφοροῦν τὴν στοχαστικὴν (ἀσθενῆ) σύγκλισιν τοῦ μέσου $\bar{X}_\nu$ πρὸς τὸν μέσον τῆς κατανομῆς καὶ καλοῦνται «Ἀσθενεῖς» Ν.Μ.Α. Ἐὰν ἔχωμεν

$$\bar{X}_\nu \xrightarrow{\sigma.\beta.} \bar{\mu}$$

τότε ὁμιλοῦμεν περὶ Ἰσχυρῶν Ν.Μ.Α.

Διά νά ἴδωμεν τήν διαφοράν μεταξύ Ἀσθενοῦς Ν.Μ.Α καί ἰσχυροῦ Ν.Μ.Α, ἄς ἐξετάσωμεν τήν περίπτωσιν ἀκολουθίας δοκιμῶν Bernoulli. Ὁ Ἀσθενής Ν.Μ.Α. λέγει ὅτι, δι' ἀρκούντως μέγα ν καί οἱονδήποτε $\varepsilon>0$ ἡ πιθανότης τῆς (μιᾶς μόνον) ἀνισότητος

$$d = \left|\frac{k}{\nu} - p\right| < \varepsilon$$

καθίσταται μεγαλυτέρα τοῦ $1-\delta$, δι' οἱονδήποτε $\delta>0$. Τοῦτο ὅμως δέν σημαίνει ὅτι ἡ ἀπόκλισις d παραμένει μικρά δι' ὅλα τά μεγάλα ν, ἔστω μεγαλυτέρα τοῦ $N=N(\varepsilon)$. Ὁ Ἀσθενής Ν.Μ.Α συνεπάγεται ἁπλῶς ὅτι "μεγάλαι" ἀποκλίσεις d συμβαίνουν εἰς "μικράν" ἀναλογίαν.

Ὁ Ἰσχυρός Ν.Μ.Α διά τήν διωνυμικήν κατανομήν δύναται νά διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς: Διά κάθε ζεῦγος $\varepsilon>0$ καί $\delta>0$ ὑπάρχει ἀριθμός $N=N(\varepsilon,\delta)$ τοιοῦτος ὥστε

$$P\left[\left|\frac{k}{\nu} - p\right| < \varepsilon, \quad \text{δι'ὅλα τά } \nu \geq N\right] \geq 1-\delta$$

ἤτοι ἡ ἀπόκλισις d, ἀπό τινος καί ἐφεξῆς ***παραμένει μικρά*** μετά πιθανότητος τόσον πλησίον τῆς 1 ὅσον θέλομεν. Ἡ ἰσχύς τοῦ Ἰσχυροῦ τούτου Ν.Μ.Α ἀπεδείχθη τό πρῶτον ὑπό τοῦ Γάλλου Μαθηματικοῦ Emile Borel (1909). Ἀργότερον ὁ Kolmogorov ἐγενίκευσε τήν ἰσχύν τοῦ Ἰσχυροῦ Ν.Μ.Α, ὡς διατυποῦται εἰς τά κατωτέρω θεωρήματα, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόδειξις εἶναι πέραν τῶν σκοπῶν τοῦ παρόντος.

Θεώρημα Α τοῦ Kolmogorov (Ἰσχυρός Ν.Μ.Α). Ἔστω $\{X_\nu\}$, $\nu=1,2,\ldots$ ἀκολουθία ἀνεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητῶν τοιούτων ὥστε

$$E(X_i) = \mu_i, \quad \Delta(X_i) = \sigma_i^2, \quad i=1,2,\ldots$$

Τότε
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sigma_\nu^2}{\nu^2} < \infty \Longrightarrow \bar{X}_\nu - \bar{\mu}_\nu \xrightarrow{\sigma.\beta.} 0$$

Θεώρημα Β τοῦ Kolmogorov (Ἰσχυρός Ν.Μ.Α). Ἔστω $\{X_\nu\}$, $\nu=1,2,\ldots$ ἀκολουθία ἀνεξαρτήτων καί ἰσονόμων τυχαίων μεταβλητῶν. Τότε, ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη διά τήν ἰσχυράν σύγκλισιν $\bar{X}_\nu \xrightarrow{\sigma.\beta} \mu$ εἶναι ἡ ὕπαρξις τῆς $E(X_i)$ καί $E(X_i)=\mu$.

13.1 Κεντρικόν Ὁριακόν Θεώρημα

Εἴδομεν ὅτι οἱ Νόμοι τῶν Μεγάλων Ἀριθμῶν ἀφοροῦν τήν σύγκλισιν (στοχαστικήν ἤ ἰσχυράν) τῶν μέσων $\bar{X}_\nu$ πρός τόν ἀντίστοιχον μέσον $E(\bar{X}_\nu)$ εἰς μίαν ἀκολουθίαν $X_1,\ldots,X_\nu,\ldots$ ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν. Τά λεγόμενα Κεντρικά Ὁριακά Θεωρήματα ἀφοροῦν τήν σύγλισιν κατά νόμον τῆς ἀκολουθίας τῶν μέσων $\bar{X}_\nu$ πρός τήν κανονικήν κατανομήν

Κεντρικόν Ὁριακόν Θεώρημα (Lindeberg - Lévy). Περίπτωσις ἀνεξαρτήτων καί ἰσονόμων μεταβλητῶν μέ πεπερασμένην διασποράν: Ἔστω ἡ ἀκολουθία $X_1,\ldots,X_\nu,\ldots$ ἀνεξαρτήτων καί ἰσονόμων τυχαίων μεταβλητῶν μέ $E(X_i)=\mu$, $\Delta(X_i)=\sigma^2$. Τότε ἡ ἀκολουθία τῶν τυποποιημένων μέσων

$$Y_\nu = \frac{\sqrt{\nu}\,(\bar{X}_\nu-\mu)}{\sigma} \xrightarrow{u.N} N(0,1) \qquad (1)$$

ἤτοι ἐάν $F_\nu(x)$ εἶναι ἡ σ.κ. τῆς Y_ν, τότε

$$\lim_{\nu\to\infty} F_\nu(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$

Ἀπόδειξις: Βάσει τοῦ Θεωρήματος τῆς Συνεχείας, Κεφ. V, ἀρκεῖ νά ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ χαρακτηριστική συνάρτησις $\varphi_\nu(t)$ τῆς Y_ν συγκλίνει πρός τήν χ.σ. $\varphi(t)=e^{-\frac{1}{2}t^2}$ τῆς $N(0,1)$.

Ἔχομεν

$$Y_\nu = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(X_i-\mu)}{\sqrt{\nu}\,\sigma} = \sum_{i=1}^{\nu}\frac{Z_i}{\sqrt{\nu}}$$

ὅπου $E(Z_i)=0$, $\Delta(Z_i)=1$. Ἄρα (§ 10.4), ἀναπτύσσοντες κατά Mac Laurin τήν $\varphi_{Z_i}(t)$, ἔχομεν

$$\varphi_{Z_i}(t) = 1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\,,\quad \varphi_{Y_\nu}(t) = \left[\varphi_{Z_i}\left(\frac{t}{\sqrt{\nu}}\right)\right]^\nu = \left[1-\frac{t^2}{2\nu}+o\left(\frac{t^2}{\nu}\right)\right]^\nu$$

Ὅθεν

$$\log \varphi_{Y_\nu}(t) = \nu \log\left[1 - \frac{t^2}{2\nu} + o\left(\frac{t^2}{\nu}\right)\right]$$

ὅπου διά κάθε t

$$\lim_{\nu\to\infty} o\left(\frac{t^2}{\nu}\right)\cdot \nu = 0$$

Ἄρα, παραλείποντες ὅρους οἱ ὁποῖοι $\longrightarrow 0$ ὅταν τό $\nu \longrightarrow \infty$, λαμβάνομεν

$$\log \varphi_{Y_\nu}(t) = \nu\left[-\frac{t^2}{2\nu} + o\left(\frac{t^2}{\nu}\right)\right] = -\frac{t^2}{2} + o\left(\frac{t^2}{\nu}\right)\nu \longrightarrow -\frac{t^2}{2},$$

ἤτοι ἡ $\varphi_{Y_\nu}(t) \longrightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος, ἕπεται ὅτι διά κάθε ζεῦγος σταθερῶν α, β, $\alpha < \beta$, ἔχομεν

$$\lim P\left[\alpha < Y_\nu \leq \beta\right] = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) \qquad (2)$$

Ἡ (1) ἤ (2) διατυποῦται καί ὡς ἑξῆς: Ἡ $\bar{X}_\nu$ εἶναι ἀσυμπτωτικῶς κανονική $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{\nu}\right)$ ἤ τό ἄθροισμα $\sum_{i=1}^{\nu} X_i$ εἶναι ἀσυμπτωτικῶς $N(\nu\mu, \nu\sigma^2)$.

Μερική περίπτωσις τοῦ θεωρήματος Lindeberg - Lévy εἶναι τό κλασσικόν

Θεώρημα de Moivre – Laplace. Ἔστω S_ν ὁ ἀριθμός ἐπιτυχιῶν εἰς ν δοκιμάς Bernoulli μέ παράμετρον p, δηλ. τό S_ν ἔχει τήν διωνυμικήν κατανομήν,

$$P\left[S_\nu = k\right] = \binom{\nu}{k} p^k q^{\nu-k} \qquad k = 0, 1, \ldots, \nu$$

Τότε διά δύο οἱασδήποτε σταθεράς α, β $(\alpha < \beta)$

$$\lim_{\nu\to\infty} P\left[\alpha \leq S_\nu \leq \beta\right] = \Phi(\beta^*) - \Phi(\alpha^*) \qquad (3)$$

ὅπου

$$\alpha^* = \frac{\alpha - \nu p}{\sqrt{\nu p q}}, \qquad \beta^* = \frac{\beta - \nu p}{\sqrt{\nu p q}}$$

Ἀπόδειξις: Αἱ X_i τοῦ προηγουμένου θεωρήματος εἶναι δίτιμοι μεταβληταὶ Bernoulli μέ

$$E(X_i)=p \quad , \quad \Delta(X_i)=pq \quad , \quad S_\nu=\sum_{i=1}^{\nu} X_i \, .$$

Ὅθεν τό θεώρημα Lindeberg-Lévy ἐφαρμόζεται.

Σημ. Ἡ (3) ἀναφέρεται συνήθως ὡς ***κανονική προσέγγισις τῆς διωνυμικῆς***, λέγομεν δέ ὅτι τό S_ν εἶναι ἀσυμπτωτικῶς κανονική $N(\nu p, \nu pq)$.

Παράδειγμα: $\nu=100$, $p=\frac{1}{2}$ (ρίψις ἑνός νομίσματος 100 φοράς. Ποία ἡ πιθανότης α νά φέρωμεν „κορώνα" 45-55 φοράς;

$$\alpha = P(45 \leq S_{100} \leq 55) =$$

$$= \Phi\left(\frac{55-100\times 1/2}{\sqrt{100\times 1/4}}\right) - \Phi\left(\frac{45-100\times 1/2}{\sqrt{100\times 1/4}}\right) = \Phi(1)-\Phi(-1)$$

$$= 2\Phi(1)-1 = 2(0,8413)-1 = 0,68$$

Σημείωσις: $\Phi(-1)=1-\Phi(1)$. Γενικῶς λόγῳ συμμετρίας τῆς τυποποιημένης κανονικῆς πυκνότητος $\varphi(x)$ περί τήν ἀρχήν, ἤτοι $\varphi(x)=\varphi(-x)$, ἔχομεν διά τήν α.σ.κ Φ τήν σχέσιν

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$$

Παρατήρησις: Ἡ κανονική προσέγγισις τῆς πιθανότητος $P(\alpha \leq S_\nu \leq \beta)$ βελτιοῦται ἐάν χρησιμοποιήσωμεν τό $\alpha-\frac{1}{2}$ ἀντί τοῦ α καί τό $\beta+\frac{1}{2}$ ἀντί τοῦ β (καλούμενον ***διόρθωσις συνεχείας***), ἤτοι

$$P[\alpha \leq S_\nu \leq \beta] = \Phi\left(\frac{\beta-\nu p+0,5}{\sqrt{\nu pq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-\nu p-0,5}{\sqrt{\nu pq}}\right)$$

Ἀκρίβεια κανονικῆς προσεγγίσεως διά $\nu=100$, $p=0,3$

"S_ν"	Διωνυμική (ἀκριβῶς)	Κανονική προσέγγισις
$9 \leq S_\nu \leq 11$	0,000006	0,000030
$12 \leq S_\nu \leq 14$	0,000150	0,000333
$15 \leq S_\nu \leq 17$	0,002010	0,002830
$21 \leq S_\nu \leq 23$	0,059070	0,058950
$37 \leq S_\nu \leq 39$	0,058890	0,058950
$43 \leq S_\nu \leq 45$	0,003430	0,002830
$49 \leq S_\nu \leq 51$	0,00005	0,000030

Παρατηροῦμεν ὅτι τό σφάλμα εἶναι μικρόν διά τιμάς τοῦ S_ν περί τήν μέσην τιμήν, 30, ἐνῶ καθίσταται μεγαλύτερον ὅταν τό S_ν ἀπομακρύνεται ἀπό τήν μέσην τιμήν.

Προσέγγισις τῆς κατανομῆς Poisson ὑπό τῆς κανονικῆς

Ἡ κανονική προσέγγισις τῆς διωνυμικῆς συνεπάγεται μικρόν σφάλμα ὅταν ἡ διασπορά $\nu p q$ τῆς διωνυμικῆς εἶναι μεγάλη (δηλ. ν μεγάλο καί p περί τό $\frac{1}{2}$). Εἴδομεν ἐπί πλέον, ὅτι διά ν μεγάλο καί p μικρόν οὕτως ὥστε τό $\lambda=\nu p$ εἶναι μέτριον, ἡ διωνυμική πιθανότης k ἐπιτυχιῶν δύναται νά προσεγγισθῆ ὑπό τῆς Poisson

$$p_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad k=0,1,2,\ldots$$

Ἐάν τό $\lambda=\nu p$ εἶναι μεγάλο ($\lambda>10$), δυνάμεθα νά χρησιμοποιήσωμεν εἴτε τήν προσέγγισιν Poisson εἴτε τήν κανονικήν. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ Poisson διά μεγάλας τιμάς τῆς παραμέτρου λ δύναται νά προσεγγισθῆ ὑπό τῆς κανονικῆς.

Πρός ἀπόδειξιν τούτου ἀρκεῖ νά παρατηρήσωμεν (ἴδε § 12.5) ὅτι: ἐάν αἱ $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταβληταί Poisson, ἑκάστη μέ παράμετρον λ, τότε τό ἄθροισμά των

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_\nu$$

ἀκολουθεῖ τὴν κατανομὴν Poisson μὲ παράμετρον $\nu\lambda$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὡς πόρισμα τοῦ Κεντρικοῦ Ὁριακοῦ θεωρήματος τὸ ἑξῆς:

Θεώρημα: Ἡ κατανομὴ Poisson διὰ μεγάλας τιμὰς τῆς παραμέτρου δύναται νὰ προσεγγισθῆ ὑπὸ τῆς κανονικῆς, ἤτοι ἐάν

$$P[X=k]=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad k=0,1,2,\ldots$$

ὅπου τὸ λ εἶναι μεγάλο ($\pi.\chi.\ \lambda>10$) τότε διὰ κάθε $\alpha<\beta$

$$P[\alpha\le X\le\beta]=P\left[\frac{\alpha-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\le\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\le\frac{\beta-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right]$$

$$\approx\Phi\left(\frac{\beta-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

Ἐφαρμογή: Γραμμαὶ τηλεφώνου

Ἕνα τηλεφωνικὸν κέντρον A ἀναμένεται νὰ ἐξυπηρετήση 2000 συνδρομητὰς γειτονικοῦ κέντρου B. Δεδομένου ὅτι ἡ ἐγκατάστασις 2000 τηλεφωνικῶν γραμμῶν ἐκ τοῦ A πρὸς τὸ B εἶναι πολυδάπανος, ζητεῖται νὰ εὑρεθῆ ἀριθμὸς γραμμῶν τοιοῦτος ὥστε, κατὰ μέσον ὅρον, μόνον 1% (τὸ πολὺ) τῶν τηλεφωνημάτων θὰ ἐτύγχανε νὰ εὕρη ὅλας τὰς γραμμὰς κρατημένας.

Ὑποθέσωμεν ὅτι, κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ὥρας μεγίστης ζητήσεως τοῦ τηλεφώνου, ἕκαστος συνδρομητὴς χρειάζεται τὴν γραμμὴν ἀπὸ τὸ A εἰς τὸ B δύο λεπτὰ κατὰ μέσον ὅρον, οὕτως ὥστε, εἰς δεδομένην στιγμὴν ἡ πιθανότης ζητήσεως μιᾶς γραμμῆς εἶναι $p=\frac{1}{30}$, οἱ δὲ 2000 συνδρομηταὶ ἀντιστοιχοῦν εἰς 2000 ἀνεξαρτήτους δοκιμὰς Bernoulli. (Τοῦτο φυσικὰ δὲν ἰσχύει εἰς ὥρας κρίσεως, $\pi.\chi.$ εἰς περίπτωσιν σεισμοῦ, ἐπαναστάσεως κ.τ.λ.) Ζητοῦμεν λοιπὸν τὸν ἀριθμὸν k ἐπιτυχιῶν οὕτως ὥστε,

$$P[S_{2000}\geqslant k]<0{,}01$$

Εἰς τὴν προσέγγισιν τῆς διωνυμικῆς ὑπὸ τῆς Poisson λαμβάνομεν τὴν παράμετρον $\lambda = 2000 \times \frac{1}{30} = 66,67$. Ἐκ τῶν πινάκων τῆς κατανομῆς Poisson (π.χ. τοῦ Molina εἰς τὸν ὁποῖον ὀφείλεται καὶ τὸ παράδειγμα) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ πιθανότης ἵνα ἐμφανισθῶσι 87 ἢ περισσότεραι "ἐπιτυχίαι" (κρατημέναι γραμμαί) εἶναι 0,0097, ἡ δὲ πιθανότης ἵνα τουλάχιστον 86 γραμμαὶ εἶναι κρατημέναι εἶναι 0,013. Ἑπομένως $k = 87$ γραμμαὶ ἐπαρκοῦν.

Διὰ τὴν κανονικὴν προσέγγισιν εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν ρίζαν x τῆς ἐξισώσεως $1 - \Phi(x) = 0,01$ αὐτὴ εἶναι $x = 2,327$. Ἑπομένως τὸ ζητούμενο k πρέπει νὰ ἱκανοποιῇ τὴν σχέσιν

$$\left(k - \frac{1}{2} - \nu p\right) / \sqrt{\nu p q} > 2,327$$

ὅπου $\nu = 2000$, $p = \frac{1}{30}$. Ὅθεν

$$k \geqslant 67.17 + 2,327 \times 8,027 \approx 85,8$$

Οὕτω συμφώνως τῆς κανονικῆς προσεγγίσεως ἀπαιτοῦνται 86 γραμμαί, αἱ δὲ λύσεις ἀπὸ ἀπόψεως ἀπαιτουμένης εἰς τὴν πρᾶξιν ἀκριβείας συμφωνοῦν.

13.2 Τὰ θεωρήματα τῶν Lyapunou καὶ Lindeberg - Feller.

Τὸ θεώρημα τῶν Lindeberg - Lévy ἐξασφαλίζει τὴν ἀσυμπτωτικὴν κανονικότητα του μέσου $\bar{X}_\nu$ δείγματος ἀπὸ κατανομὴν F μὲ πεπερασμένην διασποράν. Ἐνδέχεται ὅμως ἐὰν αἱ μεταβληταὶ δὲν εἶναι ἰσόνομοι νὰ μὴ συγκλίνῃ τὸ $\bar{X}_\nu$ πρὸς τὴν κανονικὴν κατανομήν, ἔστω καὶ ἂν ὑπάρχουν αἱ διασποραὶ τῶν X_i.

Τὸ θεώρημα τοῦ Lyapunou (τοῦ ὁποίου τὴν ἀπόδειξιν παραλείπομεν ὡς ἐκφεύγουσαν τῶν σκοπῶν τοῦ παρόντος) δίδει ἱκανὰς συνθήκας διὰ τὴν σύγκλισιν πρὸς τὴν κανονικὴν κατανομὴν τοῦ μέσου $\bar{X}_\nu$ ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν.

Θεώρημα τοῦ Lyapunou. "Ἔστω $\{X_\nu\}$ ἀκολουθία τυχαίων μεταβλητῶν τῶν ὁποίων αἱ ῥοπαὶ τρίτης τάξεως ὑπάρχουν, καὶ ἔστωσαν

$$E(X_i)=\mu_i \;, \quad \Delta(X_i)=\sigma_i^2 \neq 0 \;, \quad \gamma_i = E\left\{|X_i-\mu_i|^3\right\}$$

$$\Delta_\nu = \sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} \sigma_i^2} \;, \qquad \Gamma_\nu = \sqrt[3]{\sum_{i=1}^{\nu} \gamma_i}\,.$$

Ἐάν ἰσχύῃ ἡ σχέσις

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\Gamma_\nu}{\Delta_\nu} = 0$$

τότε

$$Y_\nu = \frac{\bar{X}_\nu - E(\bar{X}_\nu)}{\sigma(\bar{X}_\nu)} \xrightarrow[\nu\to\infty]{u.N} N(0,1). \qquad (1)$$

ἤτοι διά κάθε $\alpha<\beta$ ἔχομεν

$$\lim_{\nu\to\infty} P\left[\alpha < Y_\nu < \beta\right] = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

Τό κατωτέρω θεώρημα δίδει μίαν ἀναγκαίαν καί ἱκανήν συνθήκην διά τήν ἰσχύν τῆς (1)

Θεώρημα τῶν Lindeberg - Feller. "Εστω ἡ ἀκολουθία $\{X_\nu\}$ ἀνεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητῶν, καί $F_i(x)$ ἡ σ.κ. τῆς X_i, $i=1,2,\ldots$ Τότε ἰσχύουν αἱ σχέσεις (1) καί ἡ

$$\lim_{\nu\to\infty} \max_{1\le k\le \nu} \frac{\sigma_k}{\Delta_\nu} = 0$$

ἐάν, καί μόνον ἐάν, διά κάθε $\varepsilon>0$

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{\Delta_\nu^2} \sum_{k=1}^{\nu} \int_{|x-\mu_k|>\varepsilon\Delta_\nu} (x-\mu_k)^2 \, dF_k(x) = 0 .$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἐάν αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταί $X_1, X_2, \ldots, X_\nu, \ldots$ πληροῦν τήν συνθήκην

$$\Delta(X_i) \leq M < \infty \quad , i=1,2,\ldots$$

τότε ἰσχύει ὁ (ἀσθενής) Νόμος τῶν Μεγάλων Ἀριθμῶν.

2. Ἔστω $\{X_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ ἀκολουθία τυχαίων μεταβλητῶν ἀνά δύο ἀσυσχετίστων καί ἔστω

$$E(X_i) = \mu_i \quad , \quad \Delta(X_i) = \sigma_i^2$$

Ἐάν $\frac{1}{\nu^2} \sum_{i=1}^{\nu} \sigma_i^2 \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0$, τότε ἰσχύει ὁ Νόμος τῶν Μεγάλων Ἀριθμῶν.

3. Δείξατε ὅτι ὁ Νόμος τῶν Μεγάλων Ἀριθμῶν δέν ἰσχύει διά τήν κατανομήν Cauchy. (ἤτοι ὅταν αἱ $X_1, \ldots, X_\nu, \ldots$ εἶναι τυχαῖον δεῖγμα ἀπό τήν κατανομήν Cauchy).

4. Ἐξετάσατε κατά πόσον ἰσχύει ὁ Νόμος τῶν Μεγάλων Ἀριθμῶν καί τό Κεντρικόν Ὁριακόν Θεώρημα δι' ἑκάστην τῶν κατωτέρω ἀκολουθιῶν $\{X_\nu\}$ ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν μέ κατανομάς

α) $P\left[X_\nu = \pm 2^\nu\right] = \frac{1}{2}$ β) $P\left[X = \pm 2^\nu\right] = 2^{-(2\nu+1)}$ $P\left[X = 0\right] = 1 - 2^{-2k}$

5. Ἔστω $\{X_\nu\}$ ἀκολουθία τυχαίων μεταβλητῶν τοιαύτη ὥστε ἡ X_ν ἐνδεχομένως ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν $X_{\nu-1}$ καί $X_{\nu+1}$, ἀλλά εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν ὅλων τῶν ἄλλωνἱ μεταβλητῶν. Δείξατε ὅτι ἐάν αἱ X_ν ἔχουν φραγμένας διασποράς, τότε ἰσχύει ὁ Ν.Μ.Α

6. Ἐάν διά κάθε ν, $\Delta(X_i) \leq C < \infty$ καί $Cov(X_i, X_j) < 0$ $(i, j = 1, 2, \ldots \nu)$, τότε ἰσχύει ὁ Ν.Μ.Α.

7. Ὁ Lyapunov ἀπέδειξε τό Κ.Ο.Θ ἐπί τῇ ὑποθέσει ὅτι διά κάποιο $\delta > 0$ $E(|X_\nu|^{2+\delta}) = \beta_k$ ὅπου $\beta_\nu / \Delta_\nu < c$ = σταθερά, $\Delta_\nu^2 = \Delta(\sum_{i=1}^{\nu} X_i) = \nu\sigma^2$. Δείξατε ὅτι ἐάν ἡ συνθήκη αὐτή τοῦ Lyapunov πληροῦται, τότε πληροῦνται καί αἱ συνθῆκαι τοῦ θεωρήματος Lindeberg - Levy.

8. Ἔστω $\{X_\nu\}$ ἀκολουθία τυχαίων μεταβλητῶν τοιαύτη ὥστε $\Delta(X_i) \le c < \infty$ $i = 1, 2, \ldots$ καί

$$Cov(X_i, X_j) \longrightarrow 0 \quad \text{ὅταν} \quad |i - j| \longrightarrow \infty$$

Τότε ἰσχύει ὁ Ν.Μ.Α, ἤτοι

$$\bar{X}_\nu - \bar{\mu} \xrightarrow{u.P} 0$$

9. Ἐάν $X_\nu \xrightarrow{u.P} Y$ καί $X_\nu \xrightarrow{u.P} Z$ τότε $P[Y = Z] = 1$

10. Ἔστωσαν ἀκολουθίαι $\{X_\nu\}$ καί $\{Y_\nu\}$ τυχαίων μεταβλητῶν τοιαῦται ὥστε

$$X_\nu \xrightarrow{u.N} X \quad , \quad Y_\nu \xrightarrow{u.N} c = \text{σταθερά}$$

Δείξατε ὅτι

α) $X_\nu + Y_\nu \xrightarrow{u.N} X + c$ β) $X_\nu - Y_\nu \xrightarrow{u.N} X - c$ γ) $X_\nu Y_\nu \xrightarrow{u.N} cX$

δ) $\dfrac{X_\nu}{Y_\nu} \xrightarrow{u.N} \dfrac{X}{c}$.

11. ***Ἐκτίμησις παραμέτρων. Ἀμερόληπτοι καί συνεπεῖς ἐκτιμήτριαι.*** Ὑποθέσωμεν ὅτι δίδεται τυχαῖον δεῖγμα $X_1, \ldots, X_\nu$ ἐκ μιᾶς κατανομῆς F_{X_i}. Εἰς τήν ***θεωρίαν ἐκτιμητικῆς*** τῆς Στατιστικῆς Συμπερασματολογίας ἐνδιαφερόμεθα διά τήν ἐκτίμησιν τῶν τιμῶν ἀγνώστων παραμέτρων, ὅπως ἡ μέση τιμή καί διασπορά τῆς κατανομῆς ἐπί τῇ βάσει τῶν παρατηρήσεων τοῦ δείγματος. Πρός ἐκτίμησιν μιᾶς παραμέτρου θ χρησιμοποιοῦμεν μίαν συνάρτησιν τῶν $X_1, \ldots, X_\nu$, ἔστω $T_\nu(X_1, \ldots, X_\nu)$, τήν ὁποίαν καλοῦμεν ***ἐκτιμήτριαν*** (δειγματοσυνάρτησιν). Ἐάν $E(T_\nu) = \theta$ ἡ T καλεῖται ***ἀμερόλη-***

πτος (unbiased) ἐκτιμήτρια τῆς θ. Ἐάν τοῦ $\nu \longrightarrow \infty$ $T_\nu \xrightarrow{u.P} \theta$ ἡ T_ν καλεῖται **συνεπής** (consistent) ἐκτιμήτρια τῆς θ.

Δείξατε ὅτι

α) ἡ ροπή ν τάξεως $m'_\nu = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i^\nu$ τοῦ δείγματος εἶναι ἀμερόληπτος καί συνεπής ἐκτιμήτρια τῆς ροπῆς $\mu'_\nu = E(X^\nu)$ τῆς κατανομῆς διά κάθε $\nu = 1, 2, \ldots$

β) ἡ διασπορά S^2 τοῦ δείγματος

$$S^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(X_i - m'_1)^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(X_i - \bar{X})^2,$$

εἶναι συνεπής ἐκτιμήτρια τῆς διασπορᾶς σ^2 τῆς F_X ἀλλά δέν εἶναι ἀμερόληπτος. Δείξατε ὅτι ἡ

$$S^{*2} = \frac{1}{\nu-1}\sum_{i=1}^{\nu}(X_i - \bar{X})^2,$$

καλουμένη ἐπίσης διασπορά τοῦ δείγματος, εἶναι ἀμερόληπτος ἐκτιμήτρια τοῦ σ^2.

γ) ἡ κεντρική του ροπή m_ν ν τάξεως τοῦ δείγματος,

$$m_\nu = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(X_i - \bar{X})^\nu.$$

εἶναι συνεπής ἐκτιμήτρια τῆς κεντρικῆς ροπῆς $\mu_\nu = E(X-\mu)^\nu$, διά κάθε $\nu = 1, 2, \ldots$

2. Συνέχεια. α) Ἐάν ἡ T_ν εἶναι ἀμερόληπτος ἐκτιμήτρια τῆς θ καί

$$\lim_{\nu\longrightarrow 0} \Delta(T_\nu) = 0$$

τότε ἡ T_ν εἶναι συνεπής ἐκτιμήτρια τῆς θ. β) Ἐαν ἡ $T_\nu = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} T^*_{\nu,i}$ ὅπου αἱ $T^*_{\nu,i}$ εἶναι συνεπεῖς ἐκτιμήτριαι τῆς θ, τότε καί ἡ T_ν εἶναι συνεπής.

3. Μεταβλητῆς Χ δίδεται ἡ διασπορά $\sigma^2 = 9$. Ζητεῖται ὁ ἀριθμός ν τῶν παρατηρήσεων (τό μέγεθος τοῦ δείγματος), ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖ-

ται ἵνα μὲ πιθανότητα μικροτέραν τοῦ 5% ὁ μέσος τοῦ δείγματος διαφέρη τοῦ ἀγνώστου μέσου μ τῆς X περισσότερον τοῦ (α) 5% τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως τῆς X β) τοῦ 5% τοῦ μ δεδομένου ὅτι $\mu > 5$. Συγκρίνατε τὰς ἀπαντήσεις τὰς ὁποίας λαμβάνετε χρησιμοποιοῦντες τὴν ἀνισότητα Chebyshev καὶ τὸ Κεντρικὸν Ὁριακὸν θεώρημα.

14. Μεταβλητὴ X ἀκολουθεῖ τὴν κατανομὴν τοῦ Pareto μὲ πυκνότητα

$$f(x) = 24x^{-4} \quad , \quad x \geqslant 2$$

Δώσατε τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως

$$q(\delta) = P\left[|X - \mu| > \delta\right]$$

ὅπου $\mu = E(X)$, καὶ συγκρίνατε ταύτην μετὰ τῆς προκυπτούσης διὰ χρήσεως τοῦ ἀνωτέρω φράγματος, τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ ἀνισότης Chebyshev.

15. Εἰς σφυγμομέτρησιν τῆς κοινῆς γνώμης διὰ τὴν ἐκτίμησιν τῆς ποσοστοῦ p τῶν ἀτόμων, τὰ ὁποῖα ὑποστηρίζουν ὡρισμένον νομοσχέδιον, πόσα ἄτομα πρέπει νὰ ἐρωτηθοῦν ἵνα μὲ πιθανότητα τουλάχιστον 95% τὸ ποσοστὸν τοῦ δείγματος διαφέρη τοῦ p ὀλιγώτερον τοῦ (i) 1%, (ii) 5% δεδομένου ὅτι α) $p < 30\%$ β) τὸ p εἶναι ἐντελῶς ἄγνωστον;

16. Τί λέγει ὁ Νόμος τῶν Μεγάλων Ἀριθμῶν διὰ τὴν σχετικὴν συχνότητα ἐμφανίσεως τοῦ ψηφίου 1 εἰς ν ἀριθμοὺς ἑνὸς Πίνακος Τυχαίων Ἀριθμῶν; Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ ν ἵνα μὲ πιθανότητα τουλάχιστον 0,95 ἐμφανισθῇ τὸ 1 μετὰ σχετικῆς συχνότητος μεταξὺ 9% καὶ 11%; Συγκρίνατε τὰς ἀπαντήσεις ἐκ τοῦ Κεντρικοῦ Ὁριακοῦ θεωρήματος καὶ τῆς ἀνισότητος Chebyshev.

17. Ἕκαστος τῶν 300 ἐργατῶν ἑνὸς ἐργοστασίου ἐκλέγει κατὰ τύχην ἕνα ἐκ τριῶν συναγωνιζομένων ἑστιατορίων διὰ γεῦμα. Πόσα κα-

θίσματα πρέπει νά διαθέτη έκαστον έστιατόριον ούτως ώστε τό πολύ ένας είς τούς 20 πελάτας κατά μέσον όρον νά μή εύρίσκη κάθισμα ;

18. Είς τό παιγνίδι τής ρουλέττας ή πιθανότης νά κερδίση ό παίκτης είναι 18/37. Άς ύποθέσωμεν ότι είς έκαστον παιγνίδι ό παίκτης ή κερδίζει μίαν δραχμήν ή χάνει μίαν δραχμήν. Είς ώρισμένον καζίνο τό παιγνίδι παίζεται 100.000 φοράς τήν έβδομάδα. i) Ποία ή πιθανότης ίνα είς μίαν έβδομάδα τό καζίνο α) χάση χρήματα β) κερδίση τουλάχιστον 1.000 δραχμάς ; ii) Ποία ή πιθανότης ίνα είς έν έτος τό καζίνο

α) χάση χρήματα

β) Κερδίση τουλάχιστον 52.000 δραχμάς ;

19. Τό ήμερήσιον είσόδημα (είς δρχ.) χαρτοπαίκτου άκολουθεί τήν όμοιόμορφον κατανομήν είς τό διάστημα (- 40, 50).

α) Ποία ή πιθανότης ίνα είς 60 ήμέρας κερδίση περισσότερον τών 500 δραχμών ;

β) Ποίον ποσόν α (κέρδος ή ζημία) είναι τοιούτον ώστε τό πολύ 1 φοράν είς τάς 10 ό παίκτης θά έχη ίσόδημα μικρότερον του α κατά τήν διάρκειαν 60 ήμερών ;

20. Τό κατά προσέγγισιν δεκάτου σφάλμα ένός άριθμού άκολουθεί τήν όμοιόμορφον κατανομήν είς τό διάστημα (- 0,05 , 0,05). Ποία ή πιθανότης ίνα τό σφάλμα άθροίσματος 1000 άριθμών είναι κατ' άπόλυτον τιμήν μικρότερον τού 2 ;

21. Ή διάρκεια λυχνιών τηλεοράσεως ώρισμένου τύπου άκολουθεί τήν έκθετικήν κατανομήν μέ μέσην 500 ώρας. Νά εύρεθούν αί πιθανότητες ίνα :

α) Ὁ συνολικός ἀριθμός ὡρῶν διαρκείας 100 λυχνιῶν ὑπερβῆ τάς 6000 ὥρας

β) δεῖγμα 200 λυχνιῶν περιέχη τό πολύ 10 λυχνίας μέ διάρκειαν μικροτέραν τῶν 300 ὡρῶν.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ

Α. Τό ὁλοκλήρωμα Stieltjes

Ὡς παρετηρήσαμεν εἰς τό Κεφ. V., ἡ χρῆσις τοῦ καλουμένου ὁλοκληρώματος Riemann-Stieltjes ἐπιτρέπει μερικάς ἁπλοποιήσεις τόσον εἰς τόν συμβολισμόν ὅσον καί εἰς τήν διατύπωσιν μερικῶν γενικωτέρων ἐννοιῶν εἰς τήν μελέτην τῶν κατανομῶν. Ἰδιαιτέρως, τό ἐν λόγῳ ὁλοκλήρωμα ἐπιτρέπει τόν συμπαγῆ καί ἑνιαῖον συμβολισμόν τόσον τῆς συναρτήσεως συχνότητος ὅσον καί τῆς μέσης τιμῆς συναρτήσεως ἀπαριθμητῆς ἤ συνεχοῦς τυχαίας μεταβλητῆς.

Εἰσάγομεν κατ' ἀρχήν τήν ἔννοιαν τῆς ***συναρτήσεως πεπερασμένης μεταβολῆς***. Ἔστω συνάρτησις G ὡρισμένη εἰς τό διάστημα $[\alpha,\beta]$, πεπερασμένον ἤ ἄπειρον. Θεωρήσωμεν διαμέρισιν $\mathfrak{D}$ τοῦ $[\alpha,\beta]$ ὑπό τῶν σημείων $x_0, x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_\nu$, ὅπου

$$\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{\nu-1} < x_\nu = \beta \qquad (1).$$

Ἔστω

$$M_G(\mathfrak{D}) = \sum_{i=0}^{\nu-1} \left| G(x_{i+1}) - G(x_i) \right| .$$

Ἐάν ὑπάρχῃ θετικός ἀριθμός A τοιοῦτος ὥστε

$$\sup_{\mathfrak{D}} M_G(\mathfrak{D}) \le A$$

τότε ἡ G λέγεται συνάρτησις πεπερασμένης ἤ φραγμένης μεταβολῆς εἰς τό διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Ὁρισμός: Ἔστω G συνάρτησις πεπερασμένης μεταβολῆς εἰς τό $[\alpha,\beta]$. Τότε τό

$$M_G = \sup_{\mathfrak{D}} M_G(\mathfrak{D})$$

καλεῖται ***ὁλική μεταβολή*** τῆς G εἰς τό $[\alpha, \beta]$.

Εὐκόλως δεικνύεται ὅτι κάθε μονότονος (αὔξουσα ἤ φθίνουσα) καί φραγμένη συνάρτησις εἰς τό $[\alpha, \beta]$ εἶναι πεπερασμένης μεταβολῆς. Οὕτω ἐάν ἡ G εἶναι μή φθίνουσα, τότε διά κάθε διαμέρισιν $\mathcal{D}$

$$M_G(\mathcal{D}) = G(\beta) - G(\alpha).$$

Ἰδιαιτέρως, ***κάθε συνάρτησις κατανομῆς F εἶναι πεπερασμένης μεταβολῆς μέ ὁλικήν μεταβολήν*** $F(\infty) - F(-\infty) = 1$.

Ὁρισμός τοῦ Ὁλοκληρώματος Riemann-Stieltjes. Ἔστω διαμέρισις $\mathcal{D}$ τοῦ $(\alpha, \beta]$, ὡς εἰς τήν (1), καί θεωρήσωμεν τό ἄθροισμα

$$S_\nu = \sum_{i=0}^{\nu-1} g(x_i') \left[F(x_{i+1}) - F(x_i)\right] \qquad (2)$$

ὅπου ἡ F εἶναι πεπερασμένης μεταβολῆς καί συνεχής ἐκ δεξιῶν καί τό x_i' εἶναι τυχόν σημεῖον τοῦ διαστήματος (x_i, x_{i+1}), $i = 1, 2, \ldots, \nu-1$. Ἐάν τό ἄθροισμα (2) τείνῃ εἰς ὅριον

$$S = \lim_{\nu \to \infty} S_\nu$$

ὅταν τό $\nu \to \infty$ καί τό $\max(x_{i+1} - x_i) \to 0$, τότε τό S καλεῖται ***ὁλοκλήρωμα τοῦ Stieltjes τῆς συναρτήσεως $g(x)$ ὡς πρός τήν $F(x)$*** καί γράφεται

$$S = \int_\alpha^\beta g(x)\, dF(x) \qquad (3)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο εἶναι γενίκευσις τοῦ ***ὁλοκληρώματος Riemann***, τό ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς $F(x) = x$. Ὅταν τό διάστημα $(\alpha, \beta]$ εἶναι ἄπειρον, τότε τό γενικευμένον (improper) ὁλοκλήρωμα εἰς τό $(-\infty, \infty)$ ὁρίζεται ὡς τό

$$\lim_{\substack{\beta \to \infty \\ \alpha \to -\infty}} \int_\alpha^\beta g(x)\, dF(x)$$

Μία διαφορά μεταξύ τῆς κατά Riemann καί κατά Stieltjes ὁλοκληρώσεως εἶναι τό ὅτι, εἰς τό ὁλοκλήρωμα Stieltjes εἶναι ἀναγκαῖον ὅπως καθορίσωμεν κατά πόσον τά ἀκραῖα σημεῖα α, β περιλαμβάνονται ἤ ὄχι εἰς τό διάστημα ὁλοκληρώσεως. Οὕτω ἐξ ὁρισμοῦ τοῦ ὁλοκληρώματος προκύπτει ὅτι (τοῦ $\alpha-0$ σημαίνοντος ὅτι τό α περιλαμβάνεται καί τό $\alpha+0$ ὅτι τό α δέν περιλαμβάνεται εἰς τό διάστημα ὁλοκληρώσεως)

$$\int_{\alpha-0}^{\beta} g(x)\,dF(x) = \int_{\alpha+0}^{\beta} g(x)\,dF(x) + g(\alpha)\left[F(\alpha)-F(\alpha-0)\right]$$

Οὕτω ἐάν ἡ $g(\alpha)\neq 0$ καί ἡ F "πηδᾶ" εἰς τό σημεῖον $x=\alpha$, τότε

$$\int_{\alpha-0}^{\beta} g(x)\,dF(x) - \int_{\alpha+0}^{\beta} g(x)\,dF(x) = g(\alpha)\left[F(\alpha)-F(\alpha-0)\right].$$

Τοῦτο δεικνύει ὅτι τό ***διάστημα τῆς ὁλοκληρώσεως ἐνδέχεται νά ἐκφυλίζεται εἰς σημεῖον χωρίς τό ὁλοκλήρωμα Stieltjes νά εἶναι κατ' ἀνάγκην 0.***

Ἐάν συμφωνήσωμεν νά περιλαμβάνωμεν τό ἀνώτερον ὅριον β καί νά μήν περιλαμβάνωμεν τό κατώτερον ὅριον α τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως, τότε διά συνάρτησιν κατανομῆς F_X ἔχομεν

$$\int_{\alpha}^{\beta} dF_X(x) = F(\beta)-F(\alpha) = P\left[\alpha < X \leq \beta\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\beta} dF_X(x) = F(\beta) = P\left[X \leq \beta\right]$$

Ἐάν ἡ $F(x)$ ἔχη παράγωγον $f(x)$ τότε τό ὁλοκλήρωμα (3) τοῦ Stieltjes ἀνάγεται εἰς τό ὁλοκλήρωμα Riemann,

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,f(x)\,dx$$

Ἀφ' ἑτέρου ἐάν ἡ $F(x)$ εἶναι κλιμακωτή συνάρτησις μέ πηδήματα εἰς τά σημεῖα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots$, τότε τό ὁλοκλήρωμα (3) Stieltjes ἀνάγεται εἰς τό ἄθροισμα

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dF(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f(\alpha_i)\left[F(\alpha_i)-F(\alpha_i-0)\right]$$

Οὕτω ἐάν ἡ μέση τιμή μιᾶς συναρτήσεως $g(X)$ μιᾶς μεταβλητῆς X

μὲ συνάρτησιν κατανομῆς $F(x)$ ὁρισθῆ διὰ τοῦ ὁλοκληρώματος Stieltjes:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dF(x),$$

παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο περιλαμβάνει τοὺς δοθέντας ὁρισμοὺς τῆς $Eg(X)$ διὰ συνεχεῖς καὶ ἀπαριθμητὰς μεταβλητὰς ὡς μερικὰς περιπτώσεις (ἴδε §§ 6.4, 6.5).

Ἐκ τῶν κατωτέρω ἰδιοτήτων τοῦ ὁλοκληρώματος Stieltjes, ἀναλόγων πρὸς τὰς τοῦ ὁλοκληρώματος Riemann, δύναται νὰ ἀποδειχθοῦν εὐκόλως καὶ αἱ ἀντίστοιχοι ἰδιότητες τῆς $E(X)$.

I) Ἐὰν c εἶναι σταθερά, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} c\,g(x)\,dF(x) = c\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dF(x)$$

II)
$$\int_{\alpha}^{\beta} \sum_{i=1}^{\nu} g_i(x)\,dF(x) = \sum_{i=1}^{\nu} \int_{\alpha}^{\beta} g_i(x)\,dF(x)$$

III) Ἐὰν αἱ F_1 καὶ F_2 εἶναι συναρτήσεις κατανομῆς (ἢ γενικώτερον μονότονοι συναρτήσεις πεπερασμένων μεταβολῶν) καὶ c_1, c_2 σταθεραί, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,d\left[c_1F_1(x)+c_2F_2(x)\right] = c_1\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dF_1(x)+c_2\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dF_2(x)$$

IV) Διὰ $\alpha = c_0 < c_1 < \ldots < c_\nu = \beta$, ἔχομεν

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dF(x) = \sum_{i=0}^{\nu-1} \int_{c_i}^{c_{i+1}} g(x)\,dF(x)$$

Σημειωτέον ὅτι ἡ ὕπαρξις τοῦ S εἰς τὴν (3) σημαίνει τὴν σύγκλισιν (ὕπαρξιν) τοῦ

$$\int_{\alpha}^{\beta} |g(x)|\,dF(x)$$

Δύναται νὰ δειχθῆ ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα (3) ὑπάρχει πάντοτε ἐὰν ἡ $g(x)$ εἶναι συνεχὴς καὶ φραγμένη. Ἐνδιαφέρουσα εἰς τὴν θεωρίαν πιθανοτήτων (μέσην τιμήν, διασποράν, ροπὰς κ.λ.π.) εἶναι ἡ περίπτωσις ὑπάρξεως τοῦ (3) καὶ διὰ μὴ φραγμένας συναρτήσεις $g(x)$. Ἐπίσης ὅταν ἡ $g(x)$ ἔχῃ πεπερασμένον ἢ ἀριθμήσιμον πλῆθος ἀσυνεχειῶν. Δύναται

νά δειχθῆ τότε ὅτι, ἐάν ἡ $g(x)$ εἶναι φραγμένη τότε εἶναι ὁλοκληρώσιμος ὡς πρός οἱανδήποτε συνάρτησιν F πεπερασμένης μεταβολῆς.
Διά τήν ἀπόδειξιν ἀπαιτεῖται ἐλαφρά τροποποίησις τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ὁλοκληρώματος· συγκεκριμένως εἰς τό ἄθροισμα (2), πρέπει νά θεωρήσωμεν μόνον τάς ἀκολουθίας ἐκείνας τῶν διαμερίσεων διά τάς ὁποίας κάθε σημεῖον ἀσυνεχείας τῆς $g(x)$ ἀποτελεῖ σημεῖον διαιρέσεως τοῦ διαστήματος (α, β) δι' ὅλας τάς διαμερίσεις πλήν πεπερασμένου πλήθους τούτων.

Β. Ἀπόδειξις τοῦ τύπου ἀντιστροφῆς διά τάς χαρακτηριστικάς συναρτήσεις.

Εἰς τήν § 10.5 διετυπώθη τό κάτωθι θεώρημα (τύπος τῆς ἀντιστροφῆς τοῦ μετασχηματισμοῦ Fourier).

Θεώρημα: Ἐάν $x+h$ and $x-h$ εἶναι σημεῖα συνεχείας τῆς σ.κ $F(x)$ μέ χ.σ. $\varphi(t)$, τότε

$$F(x+h)-F(x-h)=\lim_{c\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c} \frac{\sin ht}{t} e^{-ixt} \varphi(t)\,dt \quad (1)$$

Ἀπόδειξις: Ἔχομεν

$$I \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c} \frac{\sin ht}{t} e^{-ixt} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c} \frac{\sin ht}{t} e^{-ixt} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} dF(u)$$

καί ἀλλάσσοντες τήν τάξιν ὁλοκληρώσεως, ἐφ' ὅσον τά ὅρια ὁλοκληρώσεως ὡς πρός t εἶναι πεπερασμένα καί τό ὁλοκλήρωμα συγκλίνει ἀπολύτως ὡς πρός u ($\left|\frac{\sin ht}{t} e^{it(u-x)}\right| < h$), ἔχομεν

$$I=\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ht}{t} e^{it(u-x)} dF(u)\right] dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dF(u) \int_{-c}^{c} \frac{\sin ht}{t} e^{-it(x-u)} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(c,u)\,dF(u) \quad (2)$$

ὅπου ἡ $g(c,u)$ ἰσοῦται μέ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c} \frac{\sin ht}{t} e^{-it(x-u)} dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{c} \frac{\sin ht}{t} \cos[(u-x)t]\,dt$$

Δυνάμει τοῦ τύπου $2\sin A\cos B = \sin(A+B)+\sin(A-B)$, λαμβάνομεν

$$g(c,u)=\frac{1}{\pi}\int_0^c \frac{\sin[(u-x+h)t]}{t}dt+\frac{1}{\pi}\int_0^c \frac{\sin[(h+x-u)t]}{t}dt$$

χρησιμοποιοῦντες τό *ὁλοκλήρωμα Dirichlet*:

$$\lim_{c\to\infty}\int_0^c \frac{\sin at}{t}dt=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \delta\iota' \ a>0\\ 0 & \delta\iota' \ a=0\\ -\frac{\pi}{2} & \delta\iota' \ a<0\end{cases} \qquad (3)$$

λαμβάνομεν

$$\lim_{c\to\infty} g(c,u)=\begin{cases}0 & \delta\iota\acute{\alpha}\ \ u<x-h \ \ \acute{\eta}\ \ u>x+h\\ \frac{1}{2} & \delta\iota\acute{\alpha}\ \ u=x-h \ \ \acute{\eta}\ \ u=x+h\\ 1 & \delta\iota\acute{\alpha}\ \ x-h<u<x+h\end{cases}$$

"Οθεν καί ἐκ τῆς (2)

$$\lim_{c\to\infty} I=\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{c\to\infty} g(c,u)\,dF(u)=\int_{x-h}^{x+h}dF(u)=F(x+h)-F(x-h) \quad (4)$$

ἐφ' ὅσον ἡ F εἶναι συνεχής εἰς τά $x+h$ καί $x-h$.

Σημ. Ἡ ἐναλλαγή τοῦ lim καί τοῦ $\int$ εἰς τήν (4) δικαιολογεῖται ἀπό τό ὅτι ἡ $|g(c,u)|$ εἶναι φραγμένη ἄνωθεν ὑπό τῆς συναρτήσεως $\frac{1}{\pi}\left|\frac{\sin ht}{t}\right|$, ἡ ὁποία εἶναι ὁλοκληρώσιμος εἰς οἱονδήποτε πεπερασμένον ἤ (ἕνεκα τῆς (3)) ἄπειρον διάστημα.

Γ. Ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τῆς Συνεχείας διά τάς Χαρακτηριστικάς συναρτήσεις (§ 10-5)

Διά τήν ἀπόδειξιν θά χρησιμοποιήσωμεν τάς ἑξῆς γενικάς προτάσεις.

Θεώρημα τῶν Helly-Bray: Ἐάν ἡ $F_\nu \to F$, ὅπου αἱ F_ν καί F εἶναι συναρτήσεις κατανομῆς τότε διά κάθε φραγμένην καί συνεχῆ συνάρτησιν g ἔχομεν

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dF_\nu(x) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dF(x) \qquad (1)$$

Λῆμμα τοῦ Bray: Κάθε ἀκολουθία σ.κ. $F_\nu(x)$ ἔχει ὑποακολουθίαν τεινουσαν πρός μίαν συνάρτησιν $F(x)$, συνεχῆ ἐκ δεξιῶν καί μή φθίνουσαν (ὄχι κατ' ἀνάγκην σ.κ.) εἰς κάθε σημεῖον συνεχείας τῆς F.

'Απόδειξις: α) $F_\nu(x) \longrightarrow F(x) \Longrightarrow \varphi_\nu(t) \longrightarrow \varphi(t)$. Τοῦτο ἕπεται ἀμέσως ἐκ τῆς (1) ἐφ' ὅσον ἡ e^{itx} εἶναι συνεχής καί φραγμένη.

β) 'Απόδειξις τοῦ: $\varphi_\nu(t) \longrightarrow \varphi(t)$ καί $\varphi(t)$ συνεχής διά $t=0 \Longrightarrow F_\nu(x) \longrightarrow F(x)$ καί ἡ $\varphi(t)$ εἶναι ἡ χ.σ. τῆς $F(x)$.

Θεωρήσωμεν ὑποακολουθίαν $F_m(x)$ τῆς $F_\nu(x)$, τείνουσαν, κατά τό Λῆμμα τοῦ Bray, πρός μή φθίνουσαν (καί φραγμένην) συνάρτησιν $G(x)$. "Εστω

$$\varphi_m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF_m(x) ,$$

Τότε ἔχομεν

$$\int_0^\alpha \varphi_m(t)\,dt = \int_0^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_m(x)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} dF_m(x) \int_0^\alpha e^{itx}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}-1}{ix}\, dF_m(x)$$

Λαμβάνοντες ὅρια διά $m \longrightarrow \infty$, λαμβάνομεν

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^\alpha \varphi_m(t)\,dt = \int_0^\alpha \varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}-1}{ix}\, dG(x)$$

Διαιροῦντες ἀμφότερα τά μέλη διά α καί λαμβάνοντες τό ὅριον δι' $\alpha \longrightarrow 0$, ἔχομεν

$$\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\alpha\to 0} \frac{e^{i\alpha x}-1}{ix}\, dG(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dG(x) = G(\infty) - G(-\infty)$$

'Αλλά $\lim\limits_{m\to 0} \varphi_m(0) = 1 = \varphi(0)$ καί ἑπομένως ἡ G εἶναι συνάρτησις κατανομῆς. 'Επί πλέον, ὅλαι αἱ ὑποακολουθίαι τῆς $F_\nu(x)$ συγκλίνουν πρός τήν αὐτήν σ.κ. $G = F$, ἐφ' ὅσον μόνον μία σ.κ. ἱκανοποιεῖ τήν

$$\varphi(t) = \lim_{m\to\infty} \varphi_m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \lim_{m\to\infty} dF_m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dG(x)$$

"Αρα ἡ $\varphi_m(t) \longrightarrow \varphi(t)$, ἡ ὁποία εἶναι ἡ χ.σ. τῆς $G = F$, ἤτοι ἡ ὁριακή συνάρτησις F τῆς F_ν εἶναι συνάρτησις κατανομῆς, ἡ δέ ὁριακή συνάρτησις $\varphi(t)$ τῆς $\varphi_\nu(t)$ εἶναι χ.σ., ἡ χ.σ. τῆς F.

Δ. Τοπικόν 'Οριακόν Θεώρημα

Τά Κεντρικά 'Οριακά θεωρήματα τά όποῖα ἐδόθησαν εἰς τό Κεφ. VII ἀφοροῦν τήν σύγκλισιν μιᾶς ἀκολουθίας συναρτήσεων κατανομῆς πρός τήν κανονικήν συνάρτησιν κατανομῆς καί διά τοῦτο δύνανται νά ὀνομασθοῦν *ὁλοκληρωτικά* ὁριακά θεωρήματα. Ἐνταῦθα δίδομεν ἐν συντομίᾳ τό καλούμενον *Τοπικόν* 'Οριακόν Θεώρημα, ἀφορῶν τήν σύγκλισιν μιᾶς συναρτήσεως συχνότητος πρός τήν κανονικήν πυκνότητα.

Κιγκλιδωταί κατανομαί. Μία ἀπαριθμητή μεταβλητή X καλεῖται κιγκλιδωτή (lattice) κατανομή ἐάν ὑπάρχουν σταθεραί a καί h τοιαῦται ὥστε, ὅλαι αἱ δυναταί τιμαί τῆς X δύνανται νά γραφοῦν ὑπό τήν μορφήν

$$a+kh \quad , \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

'Ο ἀριθμός h καλεῖται *βῆμα* (span) τῆς κατανομῆς.

Τό h λέγεται *ἄνοιγμα* (maximal span) τῆς κατανομῆς ἐάν δέν ὑπάρχη ἕτερος ἀριθμός $h^* > h$ καί σταθερά a^* οὕτως ὥστε αἱ τιμαί τῆς X νά δύνανται νά γραφοῦν ὑπό τήν μορφήν a^*+kh^*.

Αἱ κλασσικαί ἀπαριθμηταί κατανομαί Poisson, Pascal, διωνυμική εἶναι, ἐπί παραδείγματι, κιγκλιδωταί, ἑκάστη μέ ἄνοιγμα ἴσον πρός τήν μονάδα. Ἐάν μία μεταβλητή X λαμβάνη μόνον ἀρτίας τιμάς, τότε αὐτή εἶναι προφανῶς κιγκλιδωτή. Ἐάν λάβωμεν $a=0$, τότε τό $h=1$ εἶναι βῆμα ἀλλ' οὐχί ἄνοιγμα τῆς κατανομῆς. Τό ἄνοιγμα εἶναι $h=2$.

Διά τήν μελέτην τοῦ Τοπικοῦ 'Οριακοῦ θεωρήματος ἀπαιτεῖται τό ἀκόλουθον

Λῆμμα. Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ἵνα μία κατανομή εἶναι κιγκλιδωτή εἶναι νά ἔχη χαρακτηριστικήν συνάρτησιν $\varphi(t)$ μέ ἀπόλυτον τιμήν ἴσην πρός τήν μονάδα διά τι $t \neq 0$.

Ἀπόδειξις: Ἔστω κιγκλιδωτή μεταβλητή X καί

$$p_k = P\left[X = a+kh\right] \quad , \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (1)$$

Τότε ἡ χ. σ. $\varphi(t)$ τῆς X εἶναι

$$\varphi(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{it(a+kh)} = e^{iat}\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{itkh},$$

ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν

$$\varphi\left(\frac{2\pi}{h}\right)=e^{2\pi i\frac{a}{h}}\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{2\pi i k}=e^{2\pi i\frac{a}{h}},$$

ἤτοι

$$\left|\varphi\left(\frac{2\pi}{h}\right)\right|=1$$

Ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι, διά $t=t_o\neq 0$, ἔχομεν

$$|\varphi(t_o)|=1 \qquad (2)$$

καί θά δείξωμεν ὅτι ἡ X ἔχει κιγκλιδωτήν κατανομήν. Ἐκ τῆς (2) ἕπεται ἡ

$$\varphi(t)=e^{i\theta},$$

ἤτοι διά τι θ

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it_o x}dF(x)=e^{i\theta}, \quad \text{ἤ} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_o x-\theta)}dF(x)=1.$$

Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν τήν σχέσιν

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(t_o x-\theta)\,dF(x)=1,$$

ἡ ὁποία ἰσχύει μόνον ἐάν ἡ $F(x)$ αὐξάνῃ δι' ἐκεῖνα τά x διά τά ὁποῖα

$$\cos(t_o x-\theta)=1.$$

Ὅθεν αἱ τιμαί τῆς μεταβλητῆς X εἶναι τῆς μορφῆς

$$x=\frac{\theta}{t_o}+\frac{2k\pi}{t_o}$$

ἤτοι τῆς μορφῆς (1) καί ἡ X εἶναι κιγκλιδωτή.

Πόρισμα: Ἕν βῆμα h εἶναι ἄνοιγμα τῆς μεταβλητῆς X ἐάν, καί μόνον ἐάν, ἡ ἀπόλυτος τιμή τῆς χ.σ. $\varphi(t)$ τῆς X πληροῖ τάς σχέσεις

$$\left|\varphi\left(\frac{2\pi}{h}\right)\right|=1 \quad \text{καί} \quad |\varphi(t)|<1 \quad \text{διά} \quad 0<|t|<\frac{2\pi}{h}.$$

Ἐξ αὐτοῦ προκύπτει ὅτι ἐάν τό h εἶναι τό ἄνοιγμα τῆς X τότε διά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχει $\delta>0$ τοιοῦτον ὥστε,

$$|\varphi(t)| \le e^{-\delta} \quad \text{διά} \quad \varepsilon \le |t| \le \frac{2\pi}{h} - \varepsilon .$$

Δυνάμεθα τώρα νά διατυπώσωμεν τό κατωτέρω Τοπικόν Ὁριακόν Θεώρημα τοῦ Gnedenko (1948) τοῦ ὁποίου δίδομεν τήν ἀπόδειξιν περιληπτικῶς.

Θεώρημα: Ἔστωσαν $X_1, \ldots, X_\nu, \ldots$ ἀνεξάρτητοι καί ἰσόνομοι κιγκλιδωταί μεταβληταί μέ μέσην τιμήν μ καί διασποράν σ^2. Θέσωμεν

$$S_\nu = X_1 + X_2 + \ldots + X_\nu , \quad E(S_\nu) = \nu\mu = \mu_\nu , \quad \Delta(S_\nu) = \nu\sigma^2 = \sigma_\nu^2 ,$$

$$p_\nu(k) = P\left[S_\nu = \nu a + kh\right],$$

$$x_{\nu k} = \frac{\nu a + kh - \mu_\nu}{\sigma_\nu} , \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Τότε ἰσχύει ἡ

$$\sqrt{\nu}\, \frac{\sigma}{h}\, p_\nu(k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2} x_{\nu k}^2} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0 \qquad (3)$$

καί ἡ σύγκλισις εἶναι ὁμαλή ὡς πρός k $(-\infty < k < \infty)$ ἐάν, καί μόνον ἐάν, τό βῆμα h εἶναι ἴσον πρός τό ἄνοιγμα τῆς κατανομῆς.

Ἀπόδειξις: Τό ἀναγκαῖον τῆς συνθήκης προκύπτει ἐκ τοῦ ὅτι ἐάν τό h δέν εἶναι τό ἄνοιγμα τῆς κατανομῆς, τότε θά παρελείποντο συστηματικῶς δυναταί τιμαί τοῦ ἀθροίσματος S_ν, τό ὁποῖον, ὅπως καί αἱ X_i, εἶναι κιγκλιδωτή μεταβλητή. Ἡ μικροτέρα διαφορά μεταξύ τῶν δυνατῶν τιμῶν τοῦ S_ν θά ἦτο τουλάχιστον ἴση πρός δh ὅπου δ ὁ μέγιστος κοινός διαιρέτης τῶν διαφορῶν τῶν δυνατῶν τιμῶν τοῦ S_ν διαιρουμένων διά h. Ἐάν τό h δέν εἶναι ἴσον πρός τό ἄνοιγμα, τότε $\delta>1$ διά κάθε ν.

Διά νά ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ συνθήκη εἶναι ἱκανή, παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι ἡ χ.σ τοῦ S_ν εἶναι

$$\varphi^\nu(t) = e^{ia\nu t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_\nu(k)\, e^{itkh} \qquad (4)$$

ὅπου $\varphi(t)$ ἡ χ.σ. τῆς X_i $(i=1,2,\ldots)$. Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τά μέλη τῆς (4) ἐπί $e^{-ia\nu t - itkh}$ καί ὁλοκληροῦντες ἀπό $-\frac{\pi}{2}$ ἕως $\frac{\pi}{2}$, λαμβάνομεν

$$\frac{2\pi}{h} P_\nu(k) = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \varphi^\nu(t) e^{-ia\nu t - itkh} dt$$

Ἐκ τῆς σχέσεως

$$hk = \sigma_\nu x_{\nu k} + \mu_\nu - a\nu$$

ἔχομεν (γράφοντες x ἀντὶ $x_{\nu k}$)

$$\frac{2\pi}{h} P_\nu(k) = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \varphi^{*\nu}(t) e^{-itx\sigma_\nu} dt$$

ὅπου ἐτέθη

$$\varphi^*(t) = e^{-\frac{it\mu_\nu}{\nu}} \varphi(t).$$

Θέτοντες $t = \sigma_\nu x$ λαμβάνομεν

$$\frac{2\pi\sigma_\nu}{h} P_\nu(k) = \int_{-\frac{\pi\sigma_\nu}{h}}^{\frac{\pi\sigma_\nu}{h}} e^{-ixt} \varphi^{*\nu}\left(\frac{t}{\sigma_\nu}\right) dt$$

Ἡ σχέσις (3) προκύπτει τώρα ἐκ τοῦ ὅτι

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\sigma_\nu}{h} P_\nu(k) = \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi\sigma_\nu}{h}}^{\frac{\pi\sigma_\nu}{h}} e^{-ixt} \varphi^*\left(\frac{t}{\sigma_\nu}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \lim_{\nu\to\infty} \varphi^*\left(\frac{t}{\sigma_\nu}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}$$

καθότι βάσει τοῦ Κεντρικοῦ Ὁριακοῦ Θεωρήματος (Lindeberg – Levy)

$$\lim_{\nu\to\infty} \varphi^*\left(\frac{t}{\sigma_\nu}\right) = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \text{ὁμαλῶς ὡς πρὸς } y$$

καὶ ἐκ τοῦ ὅτι (ἴδε § 10.5)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy - \frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Ὡς πόρισμα τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ἔχομεν τὸ κλασσικὸν Τοπικὸν Ὁριακὸν θεώρημα τῶν de Moivre – Laplace, ἀφορῶν τὴν σύγκλισιν τῆς συναρτήσεως πιθανότητος τῆς διωνυμικῆς κατανομῆς πρὸς τὴν κανονικὴν πυκνότητα. Ὅπως καὶ εἰς τὸ Κεντρικὸν Ὁριακὸν θεώρημα, ὁ de Moivre ἐμελέτησε τήν περίπτωσιν $p=\frac{1}{2}$ (1730), ὁ δέ Laplace τήν γενικήν περίπτωσιν $0<p<1$.

Τοπικόν Ὁριακόν Θεώρημα τῶν de Moivre - Laplace: Ἔστω $p_\nu(k)$ ἡ πιθανότης k ἐπιτυχιῶν εἰς ν δοκιμάς Bernoulli μέ παράμετρον (πιθανότητα ἐπιτυχίας) p καί θέσωμεν

$$x=\frac{k-\nu p}{\sqrt{\nu pq}}$$

Τότε

$$\sqrt{\nu pq}\quad p_\nu(k):\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\xrightarrow[\nu\to\infty]{}1 \qquad (5)$$

καί ἡ σύγκλισις εἶναι ὁμαλή ὡς πρός ὅλα τά k διά τά ὁποῖα τά x εὑρίσκονται εἰς πεπερασμένον διάστημα.

Ἡ (5) δύναται νά διατυπωθῆ καί ὡς ἑξῆς: Διά "μεγάλα" ν

$$p_\nu(k)=\binom{\nu}{k}p^k q^{\nu-k}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi\nu pq}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(k-\nu p)^2}{\nu pk}} \qquad (6)$$

Ὡς παράδειγμα ἐφαρμογῆς τῆς (6), ἔστω $\nu=10.000$, $p=0,005$, $k=40$. Ἔχομεν

$$x_\nu(k)=\frac{k-\nu p}{\sqrt{\nu pq}}=\frac{40-50}{\sqrt{49,75}}\approx\frac{-10}{7,05}\approx-1,42$$

οὕτως ὥστε

$$p_\nu(k)\approx\frac{1}{7,05\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1,42^2}{2}}$$

καί ἐκ τοῦ Πίνακος 3, εἰς τό τέλος τοῦ παρόντος, εὑρίσκομεν

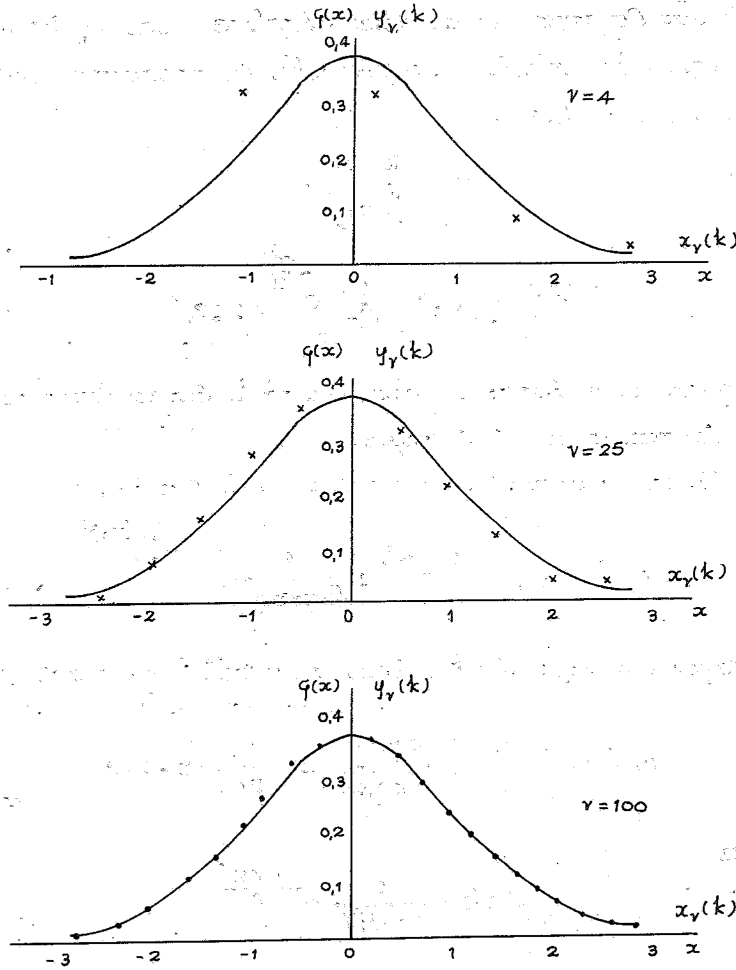
$$p_\nu(k)\approx 0,0206$$

Ἡ ἀκριβής τιμή τῆς $p_\nu(k)$ εἶναι 0,0197

Ἡ ἐπιτυχία τῆς προσεγγίσεως (6) φαίνεται εἰς τό Σχ. 1, ὅπου παρίσταται ἡ συνάρτησις

$$y=\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\cdot x^2}$$

καὶ τὰ σημεῖα $(x_\nu(k),\ y_\nu(k))$ ὅπου $y_\nu(k)=\sqrt{\nu p q}\ p_\nu(k)$, διὰ $\nu=4, 25, 100$.



Σχ. 1.

Ἡ (6) δύναται νὰ ἀποδειχθῇ ἀπ' εὐθείας ἀλλὰ κατόπιν σχετικῶς πολυπλόκων πράξεων διὰ τῆς χρήσεως τοῦ καλουμένου *τύπου τοῦ Stirling* διὰ τὴν προσέγγισιν τῶν παραγοντικῶν εἰς τὴν

$$p_\nu(k)=\frac{\nu!}{k!\,(\nu-k)!}\,p^k q^{\nu-k}$$

Τύπος τοῦ Stirling

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu!}{\sqrt{2\pi\nu}\,\nu^{\nu} e^{-\nu}} = 1$$

Οὕτω διά μεγάλα ν ἔχομεν τήν προσέγγισιν

$$\nu! \approx \sqrt{2\pi\nu}\,\nu^{\nu} e^{-\nu} \qquad (7)$$

Ἀκριβέστερον δύναται νά δειχθῆ ὅτι

$$\sqrt{2\pi\nu}\, e^{-\nu+\frac{1}{12\nu+1}} < \nu! < \sqrt{2\pi\nu}\, e^{-\nu+\frac{1}{12\nu}}$$

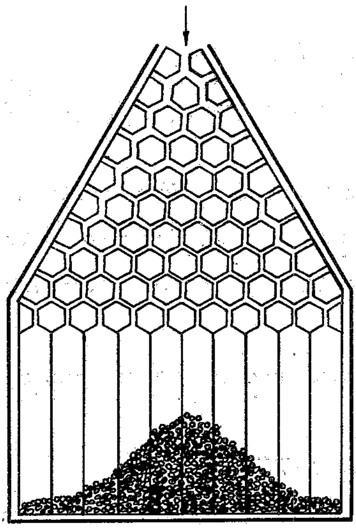
Οὕτω ἡ προσέγγισις εἶναι ἱκανοποιητική (ἀπό ἀπόψεως μικροῦ σχετικοῦ σφάλματος) ἀκόμη καί διά μικρά ν, π.χ. διά ν=2 ἡ (7) δίδει $2! \approx 1{,}92$, διά ν=5 ἔχομεν $5! = 120 \approx 118{,}02$. Διά ν=10 τό σφάλμα καθίσταται μικρότερον τοῦ 1%.

Ὁ τύπος (7), εἶναι μερική περίπτωσις τοῦ προσεγγιστικοῦ τύπου τῆς συναρτήσεως Γ,

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}$$

τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόδειξις δίδεται εἰς βιβλία Ἀναλύσεως.

Τό θεώρημα τοῦ De Moivre δύναται νά ἐπαληθευθῆ πειραματικῶς διά τοῦ καλουμένου ***τριγώνου τοῦ Galton*** (γνωστοῦ ὑπό τό ὄνομα quincunx) Τό τρίγωνον τοῦ Galton ἀποτελεῖται ἀπό πίνακα ὑπό κλίσιν φέροντα N (ὁριζοντίας) γραμμάς μέ "γωνίας" ὁμοιομόρφως κατανεμημένας οὕτως ὥστε ἡ ν-οστή γραμμή νά ἀποτελῆται ἀπό ν "γωνίας" (ἴδε σχ. 2). Σφαιρίδιον ἀφιέμενον ἐπί τῆς κορυφῆς τοῦ τριγώνου κατολισθαίνει ἐπί τοῦ πίνακος, κατερχόμενον δέ ἀπό τῆς μιᾶς γραμμῆς εἰς τήν ἑπομένην καί προσκροῦον ἑκάστοτε ἐπί μιᾶς γωνίας κινεῖται ἤ πρός τά δεξιά ἤ πρός τά ἀριστερά μέ τήν αὐτήν πιθανότητα 1/2. Κάτωθεν τῆς τελευταίας γραμμῆς ὑπάρχουν N+1 θῆκαι εἰς τάς ὁποίας συσσωρεύονται τά σφαιρίδια ἠριθμημέναι ἐξ ἀριστερῶν πρός τά δεξιά διά 0, 1, 2, . . . , N. Ἐάν σφαιρίδιον πίπτει εἰς τήν ν-οστήν θήκην ἐάν κινηθῆ ν φοράς πρός τά δεξιά καί N−ν φοράς πρός τά ἀριστερά , ἤτοι μέ πιθανότητα $\binom{N}{\nu} 2^{-N}$, ὑποτιθεμένου ὅτι αἱ κινήσεις (δεξιά ἤ ἀριστερά) τοῦ σφαιριδίου εἰς τάς N γραμμάς εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀλλήλων. Ἐάν ἀφήσωμεν ἀρκετά μεγάλον ἀριθμόν σφαιριδίων νά κυλίσουν ἐπί τοῦ τριγώνου, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ προκύπτουσα κατανομή (ἱστόγραμμα) τῶν σφαιριδίων εἰς τάς θήκας ὁμοιάζει πρός τήν κανονικήν.



Σχ. 2. Τρίγωνον τοῦ Galton

Ε. Ἀξίωμα τῆς συνεχείας. Χῶροι πιθανοτήτων

Εἰς τήν § 1.4 διετυπώσαμεν τά τρία βασικά ἀξιώματα, τά ὁποῖα πρέπει νά πληροῖ ἡ πιθανοσυνάρτησις P, ὁριζομένη ἐπί ἑνός σώματος Borel B (ἤ σ- ἀλγεβρας) ἐξ ὑποσυνόλων τοῦ βασικοῦ δειγματοχώρου Ω. Τό τρίτον ἀξίωμα, δυνάμει τοῦ ὁποίου διά κάθε ἀκολουθίαν ***ἀσυμβιβάστων*** (ξένων) ἐνδεχομένων $B_1, B_2, \ldots, B_\nu, \ldots$ $(B_\nu \in B)$ ἔχομεν

$$P\left(\bigcup_{i \geq 1} B_i\right) = \sum_{i \geq 1} P(B_i) \qquad (1)$$

καλεῖται καί ***ἐπεκταμένον προσθετικόν ἀξίωμα*** ἐκφράζον τήν λεγομένην ***τελείαν ἤ*** σ- προσθετικήν ἰδιότητα τῆς συναρτήσεως P.

Θά δείξωμεν τώρα ὅτι τό ἐπεκτεταμένον προσθετικόν ἀξίωμα ἰσοδυναμεῖ πρός τό καλούμενον.

Ἀξίωμα τῆς Συνεχείας: "Εστω $\{A_\nu\}$ μία μή αὔξουσα ἀκολουθία ἐνδεχομένων καί ἔστω

$$\lim_{\nu\to\infty} A_\nu = \bigcap_{i\geq 1} A_i = A$$

Τότε

$$\lim_{\nu\to\infty} P(A_\nu) = P(\lim_{\nu\to\infty} A_\nu) = P(A) \qquad (2)$$

Ἀπόδειξις: α) Ἡ (1) $\Longrightarrow$ (2). "Εστω $\Delta_i = A_i A'_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$ Τότε

$$A_\nu = A \cup (\bigcup_{i\geq\nu} \Delta_i)$$

τά Δ_i καί A εἶναι ἀσυμβίβαστα. Δυνάμει τῆς (1) ἔχομεν λοιπόν

$$P(A_\nu) = P(A) + \sum_{i\geq\nu} P(\Delta_i).$$

"Αρα $P(A_\nu) - P(A)$ εἶναι τό ὑπόλοιπον τῆς συγκλινούσης σειρᾶς

$$\sum_{\nu\geq 1} P(\Delta_\nu) = P(A_1)$$

"Οθεν, τοῦ $\nu \longrightarrow \infty$, τό ὑπόλοιπον

$$\sum_{i\geq\nu} P(\Delta_i) \longrightarrow 0 ,$$

καί ἑπομένως

$$P(A_\nu) \longrightarrow P(A).$$

β) Ἡ (2) $\Longrightarrow$ (1). "Εστωσαν τά ἀμοιβαίως ἀσυμβίβαστα ἐνδεχόμενα $E_1, E_2, \ldots, E_\nu, \ldots$ καί θέσωμεν

$$E = \bigcup_{i\geq 1} E_i$$

Θά δείξωμεν ὅτι

$$P(E) = \sum_{i\geq 1} P(E_i) \qquad (3)$$

Πρός τοῦτο, ἔστω

$$A_\nu = \bigcup_{i\geq\nu} E_i \quad , \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

Τότε ἡ $\{A_\nu\}$ εἶναι μία μή αὔξουσα ἀκολουθία ἐνδεχομένων καί ἐπί πλέον

$$\bigcap_{i\geq\nu} A_i = \phi$$

διότι ὅταν πραγματοποιῆται τό E_i τότε κατ' ἀνάγκην δέν πραγματοποιεῖται τό E_{i+k} διά $k=1,2,\ldots$ Ἀλλά δυνάμει τῆς (2), ἔχομεν διά $\nu\longrightarrow\infty$

$$P(A_\nu)\longrightarrow P(\phi)=0 \qquad (4)$$

Τότε κατά τό ἀξίωμα τῆς πεπερασμένης προσθετικότητος (ἤτοι ὑποθέτοντες ὅτι διά ν ἀσυμβίβαστα ἐνδεχόμενα $B_1,\ldots,B_\nu$, $P(\bigcup_{i=1}^{\nu} B_i)=\sum_{i=1}^{\nu} P(B_i)$) καί ἐκ τοῦ ὅτι

$$E=E_1\cup E_2\cup\ldots\cup E_\nu\cup A_{\nu+1},$$

ἔχομεν, δυνάμει καί τῆς (4),

$$P(E)=P(E_1)+P(E_2)+\cdots+P(E_\nu)+P(A_{\nu+1})\underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow}\sum_{i=1}^{\infty}P(E_i)$$

ἤτοι ἐδείχθη ἡ (3).

Παρατήρησις: Τό ἀξίωμα τῆς συνεχείας δύναται νά διατυπωθῇ καί ἀναφορικῶς πρός μίαν μή φθίνουσαν ἀκολουθίαν $\{A_\nu\}$ ἐνδεχομένων. Οὕτως ἐάν

$$\lim_{\nu\to\infty} A_\nu=\bigcup_{i\geq1} A_i = A$$

τότε

$$\lim_{\nu\to\infty} P(A_\nu) = P(\lim A_\nu) = P(A) \qquad (5)$$

Ἡ ἀπόδειξις τῆς ἰσοδυναμίας τῶν (5) καί (1) ἀνάγεται εἰς τήν ἀνωτέρω ἐξετασθεῖσαν περίπτωσιν μή αὐξούσης ἀκολουθίας διά θεωρήσεως τῶν συμπληρωμάτων A_i' τῶν A_i.

Ἡ πιθανοσυνάρτησις P εἶναι μερική περίπτωσις μιᾶς συνολοσυναρτήσεως μ, ἐχούσης πεδίον ὁρισμοῦ μίαν οἰκογένειαν $\mathcal{A}$ ὑποσυνόλων ἑνός βασικοῦ (ἀφῃρημένου) χώρου Ω. καί πληρούσης τάς ἑξῆς ἰδιότητας: α) ἡ μ εἶναι μή ἀρνητική, ἤτοι διά κάθε $A\in\mathcal{A}$, $\mu(A)\geq0$ β) ἡ μ εἶναι ἀριθμησίμως ἤ τελείως ἤ σ-προσθετική, ἤτοι διά κάθε ἀκολουθίαν ξένων πρός ἄλληλα συνόλων $A_i\in\mathcal{A}$ ἰσχύει ἡ

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$$

Μία τοιαύτη συνολοσυνάρτησις μ καλεῖται *μέτρον*. Τό μ λέγεται *πεπερα-*

σμένον μέτρον ἐάν διά κάθε $A \in \mathcal{A}$ ἔχωμεν $\mu(A) < \infty$. Οὕτω ἡ συνάρτησις P εἶναι πεπερασμένον μέτρον καί δή τοιοῦτον ὥστε $P(\Omega) = 1$

Ὁρισμός: Μία τριάς $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, ὅπου Ω ὁ δειγματοχῶρος, $\mathcal{B}$ μία σ- ἄλγεβρα ὑποσυνόλων τοῦ Ω καί P πιθανοσυνάρτησις ἐπί τῆς $\mathcal{B}$, καλεῖται ***χῶρος πιθανοτήτων*** ἤ ***στοχαστικός χῶρος***.

Τά μέλη (σύνολα) τῆς οἰκογενείας $\mathcal{A}$ εἶναι τά καλούμενα ***μετρήσιμα*** ὑποσύνολα τοῦ βασικοῦ χώρου Ω. Ἐάν τό Ω εἶναι ὁ δειγματοχῶρος, τότε τά μέλη τοῦ ἀντιστοίχου σώματος Borel καλοῦνται ***ἐνδεχόμενα*** (ἤ τυχαῖα γεγονότα). Οὕτω τά μετρήσιμα σύνολα ὑπό τήν μετροθεωρητικήν ἔννοιαν ἀντιστοιχοῦν εἰς τά ἐνδεχόμενα ὑπό τήν πιθανοθεωρητικήν ἔννοιαν.

Ὡς ἀνεφέρθη εἰς τήν §1.4, ἡ ἀνάγκη περιορισμοῦ τῆς οἰκογενείας τῶν ὑποσυνόλων τοῦ δειγματοχώρου Ω εἰς τά ὁποῖα εἶναι δυνατόν νά ἀντιστοιχίσωμεν πιθανότητας (πληρούσας τά 3 Ἀξιώματα τοῦ Kolmogorov) παρουσιάζεται εἰς χώρους Ω μέ ἄπειρον πλῆθος σημείων (ἁπλῶν ἐνδεχομένων). Δύναται ἐν τούτοις νά ἀποδειχθῇ ὅτι *δι' ἀριθμησίμους χώρους* Ω, δυνάμεθα νά ἀντιστοιχίσωμεν πιθανότητα εἰς κάθε μέλος τῆς οἰκογενείας $\mathcal{A}$ ***ὅλων τῶν ὑποσυνόλων*** τοῦ Ω. Ἤτοι κάθε μέλος A τῆς $\mathcal{A}$ εἶναι ***πιθανοποιήσιμον*** (probabilizable) σύνολον ἤ, ἁπλῶς, ἐνδεχόμενον. Διά χώρους Ω ἔχοντας τήν δύναμιν τοῦ συνεχοῦς ὁ περιορισμός εἰς οἰκογενείας σωμάτων Borel (σ- ἀλγεβρῶν) εἶναι, ἐν γένει, ἀναγκαῖος.

ΠΙΝΑΞ 1 ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΟΣ

Πίναξ τῶν $\binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}$ *διὰ* $n = 1, 2, \ldots, 10$ and

$p = 0.01, 0.05(0.05)0.30, \frac{1}{3}, 0.35(0.05)0.50$, and $p = 0.49$

n	x \ p	.01	.05	.10	.15	.20	.25	.30	$\frac{1}{3}$	.35	.40	.45	.49	.50
2	0	.9801	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4444	.4225	.3600	.3025	.2601	.2500
	1	.0198	.0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4444	.4550	.4800	.4950	.4998	.5000
	2	.0001	.0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1111	.1225	.1600	.2025	.2401	.2500
3	0	.9703	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2963	.2746	.2160	.1664	.1327	.1250
	1	.0294	.1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4444	.4436	.4320	.4084	.3823	.3750
	2	.0003	.0071	.0270	.0574	.0960	.1406	.1890	.2222	.2389	.2880	.3341	.3674	.3750
	3	.0000	.0001	.0010	.0034	.0080	.0156	.0270	.0370	.0429	.0640	.0911	.1176	.1250
4	0	.9606	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1975	.1785	.1296	.0915	.0677	.0625
	1	.0388	.1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3951	.3845	.3456	.2995	.2600	.2500
	2	.0006	.0135	.0486	.0975	.1536	.2109	.2646	.2963	.3105	.3456	.3675	.3747	.3750
	3	.0000	.0005	.0036	.0115	.0256	.0469	.0756	.0988	.1115	.1536	.2005	.2400	.2500
	4	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0123	.0150	.0256	.0410	.0576	.0625
5	0	.9510	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1317	.1160	.0778	.0503	.0345	.0312
	1	.0480	.2036	.3280	.3915	.4096	.3955	.3602	.3292	.3124	.2592	.2059	.1657	.1562
	2	.0010	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3292	.3364	.3456	.3369	.3185	.3125
	3	.0000	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1646	.1811	.2304	.2757	.3060	.3125
	4	.0000	.0000	.0004	.0022	.0064	.0146	.0284	.0412	.0488	.0768	.1128	.1470	.1562
	5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0041	.0053	.0102	.0185	.0283	.0312
6	0	.9415	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0878	.0754	.0467	.0277	.0176	.0156
	1	.0571	.2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2634	.2437	.1866	.1359	.1014	.0938
	2	.0014	.0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3292	.3280	.3110	.2780	.2437	.2344
	3	.0000	.0021	.0146	.0415	.0819	.1318	.1852	.2195	.2355	.2765	.3032	.3121	.3125
	4	.0000	.0001	.0012	.0055	.0154	.0330	.0595	.0823	.0951	.1382	.1861	.2249	.2344
	5	.0000	.0000	.0001	.0004	.0015	.0044	.0102	.0165	.0205	.0369	.0609	.0864	.0938
	6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0014	.0018	.0041	.0083	.0139	.0156

ΠΙΝΑΞ 1 (Συνέχεια)

7	0	.9321	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0585	.0490	.0280	.0152	.0090	.0078
	1	.0559	.2573	.3720	.3960	.3670	.3115	.2471	.2048	.1848	.1306	.0872	.0603	.0547
	2	.0020	.0406	.1240	.2097	.2753	.3115	.3177	.3073	.2985	.2613	.2140	.1740	.1641
	3	.0000	.0036	.0230	.0617	.1147	.1730	.2269	.2561	.2679	.2903	.2918	.2786	.2734
	4	.0000	.0002	.0026	.0109	.0287	.0577	.0972	.1280	.1442	.1935	.2388	.2676	.2734
	5	.0000	.0000	.0002	.0012	.0043	.0115	.0250	.0384	.0466	.0774	.1172	.1543	.1641
	6	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0036	.0064	.0084	.0172	.0320	.0494	.0547
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0005	.0006	.0016	.0037	.0068	.0078
8	0	.9227	.6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0390	.0319	.0168	.0084	.0046	.0039
	1	.0746	.2793	.3826	.3847	.3355	.2670	.1977	.1561	.1373	.0896	.0548	.0352	.0312
	2	.0026	.0515	.1488	.2376	.2936	.3115	.2965	.2731	.2587	.2090	.1569	.1183	.1094
	3	.0001	.0054	.0331	.0839	.1468	.2076	.2541	.2731	.2786	.2787	.2568	.2273	.2188
	4	.0000	.0004	.0046	.0185	.0459	.0865	.1361	.1707	.1875	.2322	.2627	.2730	.2734
	5	.0000	.0000	.0004	.0026	.0092	.0231	.0467	.0683	.0808	.1239	.1719	.2098	.2188
	6	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0038	.0100	.0171	.0217	.0413	.0703	.1008	.1094
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0012	.0024	.0033	.0079	.0164	.0277	.0312
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0002	.0007	.0017	.0033	.0039
9	0	.9135	.6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0260	.0207	.0101	.0046	.0023	.0020
	1	.0830	.2985	.3874	.3679	.3020	.2253	.1556	.1171	.1004	.0605	.0339	.0202	.0176
	2	.0034	.0629	.1722	.2597	.3020	.3003	.2668	.2341	.2162	.1612	.1110	.0776	.0703
	3	.0001	.0077	.0446	.1069	.1762	.2336	.2668	.2731	.2716	.2508	.2119	.1739	.1641
	4	.0000	.0006	.0074	.0283	.0661	.1168	.1715	.2048	.2194	.2508	.2600	.2506	.2461
	5	.0000	.0000	.0008	.0050	.0165	.0389	.0735	.1024	.1181	.1672	.2128	.2408	.2461
	6	.0000	.0000	.0001	.0006	.0028	.0087	.0210	.0341	.0424	.0743	.1160	.1542	.1641
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0012	.0039	.0073	.0098	.0212	.0407	.0635	.0703
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0009	.0013	.0035	.0083	.0153	.0176
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0003	.0008	.0016	.0020
10	0	.9044	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0173	.0135	.0060	.0025	.0012	.0010
	1	.0914	.3151	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0867	.0725	.0403	.0207	.0114	.0098
	2	.0042	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1951	.1757	.1209	.0763	.0495	.0439
	3	.0001	.0105	.0574	.1298	.2013	.2503	.2668	.2601	.2522	.2150	.1665	.1267	.1172
	4	.0000	.0010	.0112	.0401	.0881	.1460	.2001	.2276	.2377	.2508	.2384	.2130	.2051
	5	.0000	.0001	.0015	.0085	.0264	.0584	.1029	.1366	.1536	.2007	.2340	.2456	.2461
	6	.0000	.0000	.0001	.0012	.0055	.0162	.0368	.0569	.0689	.1115	.1596	.1966	.2051
	7	.0000	.0000	.0000	.0001	.0008	.0031	.0090	.0163	.0212	.0425	.0746	.1080	.1172
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0014	.0030	.0043	.0106	.0229	.0389	.0439
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0005	.0016	.0042	.0083	.0098
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0008	.0010

ΠΙΝΑΞ 2. ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΟΣ ΤΗΣ POISSON

Πίναξ τιμῶν τῆς $e^{-\lambda}\lambda^x/x!$ for $\lambda = 0.1(0.1)2(0.2)4(1)10$

λ \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
.1	.9048	.0905	.0045	.0002	.0000								
.2	.8187	.1637	.0164	.0011	.0001	.0000							
.3	.7408	.2222	.0333	.0033	.0002	.0000							
.4	.6703	.2681	.0536	.0072	.0007	.0001	.0000						
.5	.6065	.3033	.0758	.0126	.0016	.0002	.0000						
.6	.5488	.3293	.0988	.0198	.0030	.0004	.0000						
.7	.4966	.3476	.1217	.0284	.0050	.0007	.0001	.0000					
.8	.4493	.3595	.1438	.0383	.0077	.0012	.0002	.0000					
.9	.4066	.3659	.1647	.0494	.0111	.0020	.0003	.0000					
1.0	.3679	.3679	.1839	.0613	.0153	.0031	.0005	.0001	.0000				
1.1	.3329	.3662	.2014	.0738	.0203	.0045	.0008	.0001	.0000				
1.2	.3012	.3614	.2169	.0867	.0260	.0062	.0012	.0002	.0000				
1.3	.2725	.3543	.2303	.0998	.0324	.0084	.0018	.0003	.0001	.0000			
1.4	.2466	.3452	.2417	.1128	.0395	.0111	.0026	.0005	.0001	.0000			
1.5	.2231	.3347	.2510	.1255	.0471	.0141	.0035	.0008	.0001	.0000			
1.6	.2019	.3230	.2584	.1378	.0551	.0176	.0047	.0011	.0002	.0000			
1.7	.1827	.3106	.2640	.1496	.0636	.0216	.0061	.0015	.0003	.0001	.0000		
1.8	.1653	.2975	.2678	.1607	.0723	.0260	.0078	.0020	.0005	.0001	.0000		
1.9	.1496	.2842	.2700	.1710	.0812	.0309	.0098	.0027	.0006	.0001	.0000		
2.0	.1353	.2707	.2707	.1804	.0902	.0361	.0120	.0034	.0009	.0002	.0000		

ΠΙΝΑΞ 2 (Συνέχεια)

λ \ x	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
2.2	.1108	.2438	.2681	.1966	.1082	.0476	.0174	.0055	.0015	.0004	.0001	.0000	
2.4	.0907	.2177	.2613	.2090	.1254	.0602	.0241	.0083	.0025	.0007	.0002	.0000	
2.6	.0743	.1931	.2510	.2176	.1414	.0735	.0319	.0118	.0038	.0011	.0003	.0001	.0000
2.8	.0608	.1703	.2384	.2225	.1557	.0872	.0407	.0163	.0057	.0018	.0005	.0001	.0000
3.0	.0498	.1494	.2240	.2240	.1680	.1008	.0504	.0216	.0081	.0027	.0008	.0002	.0001
3.2	.0408	.1304	.2087	.2226	.1781	.1140	.0608	.0278	.0111	.0040	.0013	.0004	.0001
3.4	.0334	.1135	.1929	.2186	.1858	.1264	.0716	.0348	.0148	.0056	.0019	.0006	.0002
3.6	.0273	.0984	.1771	.2125	.1912	.1377	.0826	.0425	.0191	.0076	.0028	.0009	.0003
3.8	.0224	.0850	.1615	.2046	.1944	.1477	.0936	.0508	.0241	.0102	.0039	.0013	.0004
4.0	.0183	.0733	.1465	.1954	.1954	.1563	.1042	.0595	.0298	.0132	.0053	.0019	.0006
5.0	.0067	.0337	.0842	.1404	.1755	.1755	.1462	.1044	.0653	.0363	.0181	.0082	.0034
6.0	.0025	.0149	.0446	.0892	.1339	.1606	.1606	.1377	.1033	.0688	.0413	.0225	.0113
7.0	.0009	.0064	.0223	.0521	.0912	.1277	.1490	.1490	.1304	.1014	.0710	.0452	.0264
8.0	.0003	.0027	.0107	.0286	.0573	.0916	.1221	.1396	.1396	.1241	.0993	.0722	.0481
9.0	.0001	.0011	.0050	.0150	.0337	.0607	.0911	.1171	.1318	.1318	.1186	.0970	.0728
10.0	.0000	.0005	.0023	.0076	.0189	.0378	.0631	.0901	.1126	.1251	.1251	.1137	.0948

λ \ x	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
5.0	.0013	.0005	.0002									
6.0	.0052	.0022	.0009	.0003	.0001							
7.0	.0142	.0071	.0033	.0014	.0006	.0002	.0001					
8.0	.0296	.0169	.0090	.0045	.0021	.0009	.0004	.0002	.0001			
9.0	.0504	.0324	.0194	.0109	.0058	.0029	.0014	.0006	.0003	.0001		
10.0	.0729	.0521	.0347	.0217	.0128	.0071	.0037	.0019	.0009	.0004	.0002	.0001

ΠΙΝΑΞ 3

Πίναξ τιμῶν τῆς $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0.1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	4410	3391	3372	3352
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0.2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0883	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2.0	0.0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2.5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3.0	0.0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0039	0028	0027	0026	0025	0025
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3.5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3.6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3.7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3.8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

ΠΙΝΑΞ 4

Κανονικὴ συνάρτησις κατανομῆς

Πίναξ τιμῶν τῆς $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.6.	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ