

ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΠΑΡΑΔΩΣΕΙΣ

ΑΛΚ. ΑΠΟΣΤΟΛΑΚΗ

Καθηγητού Τμήματος Φυσικής
Πανεπιστημίου Αθηνών

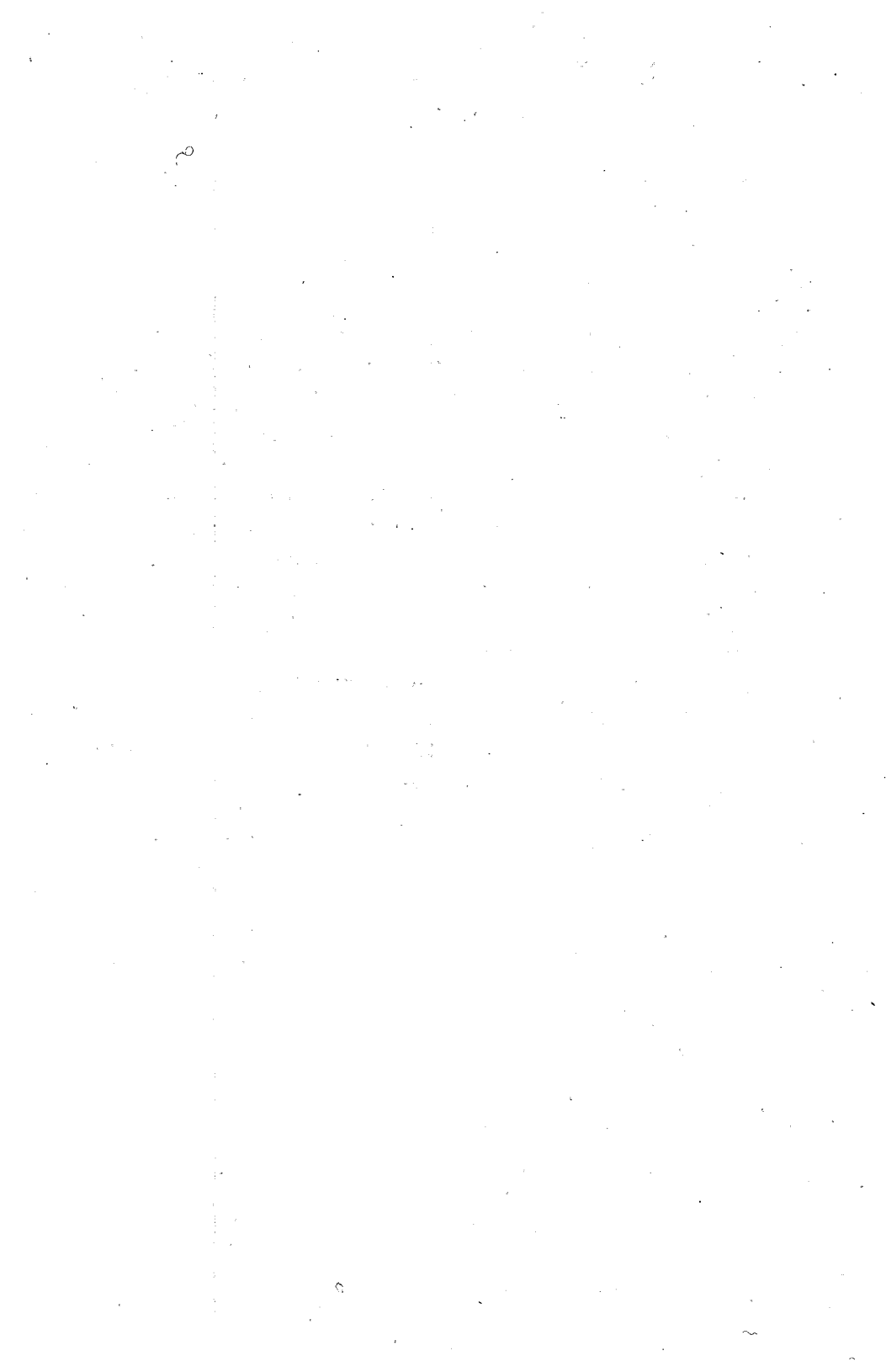
ΑΘΗΝΑ 1993

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στις παρούσες Πανεπιστημιακές παραδόσεις αναπτύσσονται τα κεφάλαια της Πυρηνικής Φυσικής, τα οποία διδάσκονται σε ένα εξάμηνο τους τετραετείς Φυσικούς. Ο νεωτεριστικός αυτός κλάδος της Φυσικής έχει αναπτυχθεί τόσο πολύ, ώστε το περιεχόμενο του δεν μπορεί να ξαντληθεί σε ένα μόνο εξάμηνο διδασκαλίας. Για τον λόγο αυτόν η υπεύθυνα αρχή, στην σειρά αυτή των σημειώσεων, είναι η θεμελίωση με μελέτη του φυσικού περιεχομένου των βασικών αρχών της Φυσικής του Πυρήνα και η εφαρμογή τους σε ωρισμένες μόνο περιπτώσεις. Η καλύτερη μελέτη και ειδίκευση σε αυτά τα θέματα αναπτύσσεται σε αθήματα κατ' επιλογήν του τελευταίου εξαμήνου και σε κύκλους εταπτυχιακών μαθημάτων.

Οι φροντιστηριακές και εργαστηριακές ασκήσεις δεν συμπεριλαμβάνονται στις σημειώσεις, γιατί αποτελούν ξεχωριστή ύλη, παρουσιάζονται δε και αναπτύσσονται σε διαφορετικά φυλλάδια, τα οποία συνοδεύουν το Φροντιστήριο και τις πειραματικές ασκήσεις.

Α. ΑΠΟΣΤΟΛΑΚΗΣ



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ I

Σελ.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1	Πρώτες έννοιες	1
2	Ενέργεια, ορμή - Μονάδες αυτών	1
3	Ορολογία και ορισμοί	2
4	Ενεργός διατομή (cross section)	5
	1.4.1 Διαστάσεις και μονάδες ενεργού διατομής	7
5	Διαφορική ενεργός διατομή	9

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

ΔΙΑΔΡΟΜΗ ΤΗΣ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ ΣΤΗΝ ΥΛΗ

.1	Γενικά	10
.2	Ιονιστική Ικανότητα	11
.3	Σκεδασμός Rutherford	12
.4	Απώλειες ενέργειας από ιονισμό.	18
.5	Απώλεια ενέργειας ηλεκτρονίων	23
.6	Ακτινοβολία Τσερένκοβ (Cerenkov)	23
.7	Πολλαπλός σκεδασμός	25
.8	Διαδρομή της ακτινοβολίας γ μέσω της ύλης	28
	2.8.1 Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο	28
	2.8.2 Σκεδασμός Thomson	28
	2.8.3 Σκεδασμός Rayleigh	30
	2.8.4 Σκεδασμός Compton	30
2.9	Δίδυμη γένεση	31

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΡΑΔΙΕΝΕΡΓΕΙΑ

2.1	Νόμος για τις ραδιενεργές μετατροπές	33
-----	--------------------------------------	----

3.2	Διαδοχικές ραδιενεργές μετατροπές	34
3.2.1	Διακλάδωση (Branching)	36
3.3	Δοσμετρία και μονάδες ραδιενέργειας	37
3.4	Διακυμάνσεις ραδιενεργών μετατροπών	38

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

Ο ΠΥΡΗΝΑΣ

4.1	Γενικά	
	Γενικές ιδιότητες του Πυρήνα	40
4.2	Φορτίο	40
4.3	Μάζα	41
4.3.1	Φασματογράφος Μάζας	41
4.3.2	Έμμεσοι μέθοδοι και αποτελέσματα	44
4.3.3	Ενέργεια Συνδέσεως και Κλάσμα Συνδέσεως	45
4.4	Ημιεμπειρικός Τύπος Μάζας του Weiczaker	47
4.5	Ισοβαρείς Μεταπτώσεις	53

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΡΟΠΕΣ ΤΟΥ ΠΥΡΗΝΑ

5.1	Ακτίνες πυρήνων	56
5.2	Πυρηνική Μέθοδος	56
5.3	Σκεδασμός Ηλεκτρονίων	58
5.4	Οπτικά φάσματα και ακτίνες X	59
5.5	Μεσονικά φωτόνια	60
5.5.1	μ-μεσονικά άτομα	60
5.5.2	K-μεσονικά άτομα	61
5.6.1	Κατοπτρικοί πυρήνες	61
5.6.2	Ηλεκτροστατική διαφορά ενέργειας κατοπτρικών Πυρήνων	62
5.7	Συμπεράσματα για το μέγεθος του πυρήνα	63
5.8	Το σπιν του Πυρήνα	64
5.9	Ροπές του Πυρήνα	65
5.10	Ηλεκτρικές ροπές	65
5.11	Μαγνητικές ροπές	67
5.12	Πυρηνικός Μαγνητικός Συντονισμός (N.M.R.)	70
5.13	Μαγνητική ροπή των Νουκλεονίων	71

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

5.1	Γενικά	76
5.2	Μετασχηματισμοί	76
6.3	Ομοτιμία	79
6.4	Συμμετρίες ανταλλαγής	80
6.5	Καταστάσεις δύο Νουκλεονίων	81
6.6	"Συμμετρία Φορτίου" και "Ανεξαρτησία Φορτίου"	83
6.7	Ισοτοπικό Σπιν ή Ισοσπιν	85

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ α

7.1	Γενικά	91
7.2	Φαινόμενο Σύραγγος	92
7.3	Λεπτή υφή ακτίνων α . Ενεργειακό διάγραμμα πυρήνα	97

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII

ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ γ

8.1	Γενικά	99
8.2	Θεωρία ακτινοβολίας γ	100
8.3	Ομοτιμία και Κανόνες Επιλογής	102
8.4	Αριθμητικά Παραδείγματα	103
8.5	Εσωτερική μετατροπή	105
8.6	Ισομερείς μεταπτώσεις και μετασταθείς στάθμες	106
8.7	Πυρηνικός φθορισμός (Nuclear fluorescence)	106
8.8	Φαινόμενο Mössbauer	108

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IX

ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ β

9.1	Γενικά	111
9.2	Το ενεργειακό φάσμα της Ακτινοβολίας β (Θεωρία Fermi)	112
9.3	Υπολογισμός του dn/dE_f	114
9.4	Υπολογισμός της H_{β} και $\langle f V i \rangle$	115
9.5	Χρόνος υποδιπλασιασμού της ακτινοβολίας β	118
9.6	Ρελατιβιστική Θεωρία και μη διατήρηση της	119

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Χ

ΠΥΡΗΝΙΚΕΣ ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΙΣ Ι

10.1	Γενικά	121
10.2	Κορεσμός και εμβέλεια πυρηνικών δυνάμεων	122
10.3	Μελέτη του δευτερίου	123
10.4	Σκέδαση πρωτονίου-νετρονίου σε χαμηλές ενέργειες	126
10.5	Μήκος σκεδάσεως	130
10.6	Εξάρτηση από τα σπιν της σκεδάσεως νετρονίου-πρωτονίου	131
10.7	Ενεργός Εμβέλεια της n-p σκεδάσεως	132
10.8	Ροπές του δευτερίου	133

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΧΙ

ΠΥΡΗΝΙΚΕΣ ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΙΣ ΙΙ

11.1	Ενεργός διατομή	135
11.2	Συντονισμός και τύπος διασποράς Breit-Wigner	137
11.3	Πυρηνικές αντιδράσεις - Σύνθετος πυρήνας	140
11.4	Τρόποι μελέτης του σύνθετου πυρήνα	141

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΧΙΙ

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΠΥΡΗΝΩΝ

12.1	Γενικά για το υπόδειγμα φλοιών	143
12.2	Μαγικοί αριθμοί	144
12.3	Κίνηση σωματίου σε δυναμικό	145
	12.3.1 Τετραγωνικό Δυναμικό Απειρου Βάθους	146
	12.3.2 Δυναμικό Αρμονικού Ταλαντωτή	147
12.4	Δυναμικό τροχειάς και σπιν	148
12.5	Συζήτηση για το υπόδειγμα των φλοιών	150
12.6	Υπόδειγμα συλλογικών κινήσεων	150
	12.6.1 Κίνηση ενός σωματίου σε παραμορφωμένο δυναμικό	151
	12.6.2 Περιστροφή του Συστήματος	152
	12.6.3 Συζήτηση του Υποδείγματος Συλλογικών Κινήσεων	154

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XIII

ΧΑΣΗ ΚΑΙ ΣΥΝΤΗΞΗ ΠΥΡΗΝΩΝ

3.1	Γενικά	156
3.2	Η θεωρία του φαινομένου σχάσεως	157
3.3	Ενεργειακό φάσμα των νετρονίων και ισολογισμός της σχάσεως	160
3.4	Σύντηξη (Fussion)	161

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ Γ

1.1	Γενικά	165
1.2	Ανυσματικό Πεδίο	169
1.3	Πηγές Πολυπολικής Ακτινοβολίας	170
1.4	Κβαντομηχανικός υπολογισμός της πιθανότητας μεταπτώσεως	173

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

ΦΥΣΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ	176
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	177

ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Πρώτες έννοιες

Όπως γνωρίζουμε ο πυρήνας είναι το βαρύτερο μέρος του ατόμου, ακτίνας λίγων μόνο Fermi ($1 \text{ fm} = 10^{-13} \text{ cm}$). Αυτός αποτελείται αποκλειστικά, από νουκλεόνια, δηλ. πρωτόνια και νετρόνια. Τα νουκλεόνια θεωρούνται ως δύο διαφορετικές καταστάσεις του ίδιου σωματίου. Το πρωτόνιο είναι το θετικό φορτίο και το νετρόνιο είναι το ουδέτερο φορτίο.

Σε όλες σχεδόν τις αντιδράσεις των πυρήνων, παίρνουν μέρος πέντε στοιχειώδη σωματίια, δηλ. τα δύο νουκλεόνια, δύο από τα λεπτόνια - το ηλεκτρόνιο e^- και το νεutrino ν_e - μαζί με τα αντισωματίά τους, e^+ και $\bar{\nu}_e$ και τέλος το φωτόνιο γ .

Στον πίνακα 1 γράφονται μερικές φυσικές σταθερές των σωματιών αυτών.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1

Όνομα	Σύμβολο	Μάζα (MeV)	Φορτίο	Spin (\hbar)
Πρωτόνιο	p	938,27231 (28)	+1	1/2
Νετρόνιο	n	939,56563 (28)	0	1/2
Ηλεκτρόνιο	e^- e^+	0,51099906 (15)	-1, +1	1/2
Νεutrino	ν_e $\bar{\nu}_e$	< 7.3 eV	0	1/2
Φωτόνιο	γ	0	0	1

1.2 Ενέργεια, ορμή - Μονάδες αυτών

Στην πυρηνική φυσική οι μάζες των σωματιών δίνονται σε μονάδες ενέργειας eV ή πολλαπλάσια αυτής της μονάδας και όχι σε gr. Αυτό

γίνεται βάσει της ισοδυναμίας μάζας και ενέργειας, η οποία εκφράζεται από την σχέση:

$$E = mc^2 \quad (1.1)$$

όπου c η ταχύτητα του φωτός.

Ανάλογα σαν μονάδα ορμής p , χρησιμοποιείται η eV/c και τα πολλαπλάσια της MeV/c , GeV/c κ.λ.π. αφού το γινόμενο pc έχει διαστάσεις ενέργειας.

Όπως είναι γνωστό η ολική ενέργεια W σωματίου δίνεται από την ρελατιβιστική σχέση:

$$W^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2 \quad (1.2)$$

Αλλά η ολική ενέργεια σωματίου είναι ίση με το άθροισμα της κινητικής ενέργειας T και της ενέργειας ηρεμίας αυτού, δηλ:

$$W = T + mc^2 \quad (1.3)$$

Από την 1.3 παίρνουμε

$$T = W - mc^2 \quad (1.4)$$

Για μη ρελατιβιστικές ταχύτητες ($v \ll c$) χρησιμοποιείται συνήθως ο τύπος:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \quad (1.5)$$

ενώ για πολύ μεγάλες ταχύτητες δηλ. για $(pc)^2 \gg (mc^2)^2$ η ολική ενέργεια W είναι περίπου

$$W = pc \quad (1.6)$$

1.3 Ορολογία και ορισμοί

Πάρα κάτω δίνουμε τους ορισμούς μερικών βασικών, για την πυρηνική φυσική, μεγεθών.

Ατομικό βάρος. Παιρνούμε σαν μονάδα μάζας (m.u) την μάζα του $\frac{1}{12} \text{C}^{12} = 1,660420 \times 10^{-24} \text{ gr} = 931,478 \pm 0,004 \text{ MeV}$, ορίζουμε το ατομικό βάρος M ενός πυρήνα με την σχέση:

$$M = \frac{\text{Βάρος πυρήνα}}{m \cdot u} \quad (1.7)$$

Παράδειγμα: Το ατομικό βάρος του ατόμου του υδρογόνου είναι 1,00782 του δε πυρήνα υδρογόνου 1,0072766.

Έχει ευρεθεί ότι η μάζα του ατόμου του υδρογόνου M_H είναι διάφορη από εκείνη του πυρήνα υδρογόνου $m_{\text{πυρ}}$. Η διαφορά που παρουσιάζεται οφείλεται στην παρουσία του ηλεκτρονίου. Ακριβέστερα να γράψουμε ότι:

$$M_H = m_{\text{πυρ}} + m_e - 13,6 \text{ eV} \quad (1.8)$$

όπου m_e η μάζα του ηλεκτρονίου. Η ενέργεια των 13,6 eV λέγεται "ενέργεια σύνδεσης" του ατόμου του υδρογόνου (βλ. πάρα κάτω).

Ενέργεια σύνδεσης - Έλλειμμα μάζας

Εάν από δύο στοιχεία, m_1 και m_2 , παρασκευάσουμε τρίτο στοιχείο m_3 κατά την αντίδραση

$$m_1 + m_2 = m_3 + Q \quad (1.9)$$

η ενέργεια, η οποία χρειάζεται για την αντίδραση 1.9 είναι ίση με Q . Η ενέργεια αυτή λέγεται "ενέργεια σύνδεσης" και την παίρνουμε θετική για εξώθερμες αντιδράσεις και αρνητική για ενδόθερμες αντιδράσεις.

Παράδειγμα της αντίδρασης (1.9) είναι η σύνδεση ενός p με ένα n , για την παραγωγή δευτερίου (d):

$$p + n \rightarrow d + 2,225 \text{ MeV} \quad (1.10)$$

Η ενέργεια $Q = 2,225 \text{ MeV}$, η οποία εκλύεται κατά την αντίδραση αυτή είναι ίση με το άθροισμα της ενέργειας των παραγομένων ακτίνων γ και της κινητικής ενέργειας του δευτερίου, η οποία είναι η ενέργεια ανακρούσεως του.

Αντίστροφα μπορούμε να νοήσουμε ότι

$$m_d = m_p + m_n - \Delta m \quad (1.11)$$

αφού η μάζα του δευτερίου είναι μικρότερη από το άθροισμα των μαζών των p και n . Η διαφορά μεταξύ αυτών λέγεται "έλλειμμα μάζας", η οποία είναι ίση βέβαια με την ενέργεια σύνδεσης του p με το n , γι' αυτή την περίπτωση, αποτελεί δε ένδειξη της σφοδρότητας και της μορφής των πυρηνικών δυνάμεων.

Η ακτίνα δράσης των πυρηνικών δυνάμεων είναι της τάξης της διαμέτρου των νουκλεονίων (δηλ. ολίγα Fermi). Πέρα από αυτήν την απόσταση η επίδραση των είναι μηδαμινή. Συνέπεια της ιδιότητας αυτής των πυρηνικών δυνάμεων είναι ότι, η μέση τιμή της ενέργειας σύνδεσης ανά νουκλεόνιο είναι περίπου 8 MeV, ανεξάρτητα από τον αριθμό τους στον πυρήνα. Για σύγκριση, αναφέρουμε ότι οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις έχουν ενέργεια σύνδεσης μερικά μόνο eV, όπως φαίνεται από τον τύπο (1.8).

Το φορτίο του δευτερίου, όπως προκύπτει από τα αναφερθέντα, είναι θετικό και ίσο με e (πίνακας 1.2).

Ανάλογα, είναι δυνατή η παρασκευή πυρήνα με ένα πρωτόνιο και δύο νετρόνια, ο οποίος λέγεται τρίτιο (T) με στοιχεία τα οποία δίνονται στον πίνακα 1.2. Το τρίτιο αντίθετα με το p και d , είναι ασταθής πυρήνας με μέσο χρόνο ζωής περίπου 8,5 χρόνια.

Ατομικός και Μαζικός αριθμός. Από τα πάρα πάνω παρατηρούμε ότι υπάρχουν, περισσότερα από ένα, στοιχεία με το ίδιο φορτίο ή ατομικό αριθμό (z) αλλά με μάζα κατά πολύ διάφορη και συγκεκριμένα διαφέρουν κατά ακέραιες μονάδες του ατομικού βάρους π.χ. 1,007, 2,00 και 3,016. Το ακέραιο μέρος του ατομικού βάρους αντιστοιχεί με τον αριθμό των νουκλεονίων, μέσα στον πυρήνα και ονομάζεται μαζικός αριθμός (A).

Πυρήνες, όπως οι πάρα πάνω με τον ίδιο ατομικό αριθμό, αλλά διαφορετικό μαζικό αριθμό, ονομάζονται ισότοποι.

Ήλιον (He) και ισοβαρείς πυρήνες. Μπορούμε, επίσης, να συνδέσουμε δύο πρωτόνια με ένα νετρόνιο, οπότε προκύπτει πυρήνας ατομικού αριθμού $z = 2$ και τα λοιπά στοιχεία του δίνονται στον πίνακα 1.2.

Από τα πάρα πάνω παρατηρούμε ότι το T και το He^3 έχουν τον ίδιο μαζικό αριθμό αλλά διάφορα ατομικά βάρη. Αυτοί οι πυρήνες λέγονται ισοβαρείς.

Ένωση, τώρα, δύο p και δύο n δίνει νέο πυρήνα, πολύ μεγάλης ημιασίας στην Πυρηνική Φυσική, λόγω της σταθερότητας του, με μαζικό αριθμό 4 με σύμβολο και λοιπά στοιχεία τα οποία δίνονται στον πίνακα 2.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2

Πυρήνας	A	H	Ενεργ. Συνδ. (MeV)	Φορτίο (e)	Παρατηρήσεις
p	1	1,0072766		+1	
d	2	2,01355	2,225	+1	
T	3	3,012605	8,5	+1	* 0,00828 m.u
He ³	3	3,01493	*	+2	** ή 0,03038 m.u
He ⁴	4	4,00150	28,3**	+2	ή 7,1 MeV/nucleon

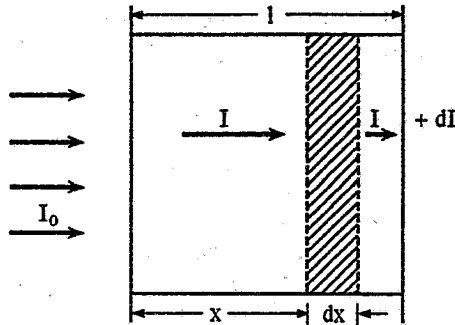
Γενικά μεταξύ του αριθμού των πρωτονίων και νετρονίων μέσα στον πυρήνα ισχύει η σχέση:

$$(Z,A) = Zp + (A-Z)n \quad (1.12)$$

όπου (Z,A) ο ολικός αριθμός των νουκλεονίων του πυρήνα.

1.4 Ενεργός διατομή (cross section)

Έστω δέσμη σωματιών, αρχικής ισχύος $I_0 \frac{\text{σωμάτια}}{\text{cm}^2 \text{sec}}$, η οποία προσπίπτει σε λεπτό στόχο, πάχους l . Η δέσμη αυτή όταν εξέρχεται έχει ελαττωμένη ισχύ. Για τον υπολογισμό της μεταβολής της ισχύος συναρτήσει του βάθους διεισδύσεως της δέσμης θεωρούμε ότι η ισχύς της δέσμης σε βάθος x μέσα στον στόχο είναι I και σε βάθος $x + dx$ είναι $I + dI$ (σχήμα 1.1).



Σχήμα 1.1.

Η μεταβολή, dI , της ισχύος της δέσμης κατά την διέλευση της μέσα από στόχο, με πάχος dx δίνεται από την σχέση:

$$dI = -\sigma N I dx \quad (1.13)$$

όπου N ο αριθμός των πυρήνων ανά cm^3 , οι οποίοι περιέχονται μέσα στον στόχο. Το αρνητικό σημείο στην σχέση (1.13) δηλώνει ελάττωση της ισχύος. Ο συντελεστής αναλογίας, σ , λέγεται ενεργός διατομή του στόχου για τα σωματίδια της δέσμης και ορίζεται από την (1.13) ως εξής:

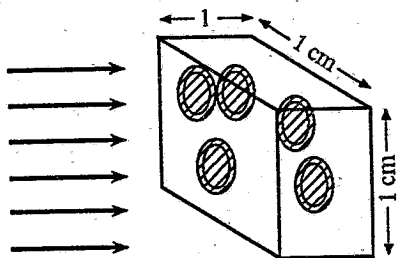
$$\sigma = -\frac{dI}{I} \frac{1}{N dx} \quad (1.14)$$

Ας θεωρήσουμε τομή του στόχου του σχήματος 1.1 διαστάσεων $1\text{cm} \times 1\text{cm}$ όπως στο σχήμα 1.2. Τα γραμμοσκιασμένα τμήματα του σχήματος αυτού παριστάνουν τις θέσεις των κέντρων απορρόφησης (πυρήνων), ο αριθμός δε αυτών μέσα στον στόχο, πάχους dx , είναι $N dx$.

Εάν το εμβαδό της επιφάνειας κάθε κέντρου απορρόφησης είναι σ , τότε το ποσοστό της επιφάνειας του στόχου, το οποίο καλύπτεται από τα κέντρα απορρόφησης, είναι: $\sigma N dx$.

Όστε η πιθανότητα απορρόφησης των σωματιών της δέσμης είναι ίση με το ποσοστό της επιφάνειας, το οποίο καλύπτεται από τα κέντρα απορρόφησης, δηλαδή

$$-\frac{dI}{I} = \sigma N dx \quad (1.15)$$



Σχήμα 1.2.

1.4.1 Διαστάσεις και μονάδες ενεργού διατομής

Από την σχέση (1.14) ορισμού της σ προκύπτει ότι, αυτή έχει διαστάσεις επιφάνειας, αφού ο λόγος dI/I είναι καθαρός αριθμός. Είδαμε δε ότι η ενεργός διατομή παριστάνει την επιφάνεια κάθε κέντρου απορροφήσεως, δηλ. κάθε πυρήνα, ο οποίος έχει ακτίνα τάξεως ολίγων Fermi ($\sim 10^{-12}$ cm). Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η τάξη μεγέθους της σ είναι μερικά (fm)². Για τον λόγο αυτόν, ως μονάδα της ενεργού διατομής, στην πυρηνική φυσική παίρνεται το barn και τα υποπολλαπλάσιά του, mb και μ b.

Είναι δε:

$$1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2 \quad (1.16)$$

Για πολύ λεπτούς στόχους η ενεργός διατομή μπορεί να θεωρηθεί σταθερή, οπότε η σχέση (1.15) με ολοκλήρωση δίνει:

$$I(x) = I_0 e^{-\sigma N x} \quad (1.17)$$

Το γινόμενο $\mu = \sigma N$ λέγεται συντελεστής απορροφήσεως, το δε αντίστροφό του

$$\lambda = \frac{1}{\mu} \quad (1.18)$$

λέγεται μέση ελεύθερη διαδρομή (mean free path) των σωματιών της δέσμης μέσα στον στόχο.

Για παχείς στόχους η ενεργός διατομή σ , είναι συνάρτηση του πάνους x του στόχου δηλ. $\sigma = \sigma(x)$.

Στην σχέση (1.17) φαίνεται ότι είναι δυνατός ο πειραματικός προσδιορισμός της ενεργού διατομής, σ , με μετρήσεις της αρχικής I_0 και τελικής I_x ισχύος, με την βοήθεια καταλλήλων μετρητών.

Όταν τα σωματία δέσμης μπαίνουν μέσα σε κάποιο στόχο ένα μέρος από αυτά παθαίνουν "ελαστική" κρούση με τους πυρήνες της ύλης, άλλο δε μέρος παθαίνουν "μη ελαστική" κρούση. Σε κάθε ένα από τα φαινόμενα αυτά αντιστοιχεί και μία ενεργός διατομή: για την ελαστική κρούση η ενεργός διατομή σ_{el} , για δε την μη ελαστική η ενεργός διατομή σ_{inel} .

Θα βρούμε την έκφραση κάθε μίας από τις δύο αυτές ενεργούς διατομές.

α) Κατά την ελαστική κρούση έχουμε όπως είναι γνωστό μόνο ανακατανομή της κινητικής ενέργειας των σωματίων που συγκρούονται και έχουμε για την ελάττωση dI_{el} της ισχύος της δέσμης για διαδρομή dx , την σχέση

$$dI_{el} = -\sigma_{el} I N dx \quad (1.19)$$

β) Κατά την μη ελαστική κρούση μπορούμε να έχουμε διεγερση του πυρήνα ή παραγωγή νέων σωματίων ή τέλος εκπομπή ακτινοβολίας και ισχύει:

$$dI_{inel} = -\sigma_{inel} I N dx \quad (1.20)$$

Έστω όταν δέσμη ισχύος I διέρχεται μέσα από στόχο πάχους dx έχουμε ολική εξασθένηση dI_{tot} , η οποία δίνεται από την σχέση:

$$dI_{tot} = dI_{el} + dI_{inel}$$

ή

$$dI_{tot} = (\sigma_{el} + \sigma_{inel}) I N dx$$

ή

$$dI_{tot} = -\sigma_{tot} I N dx \quad (1.21)$$

όπου σ_{tot} η (ολική) ενεργός διατομή των σωματίων κατά την διέλευσή τους μέσα από τον στόχο, και

$$\sigma_{tot} = \sigma_{el} + \sigma_{inel} \quad (1.22)$$

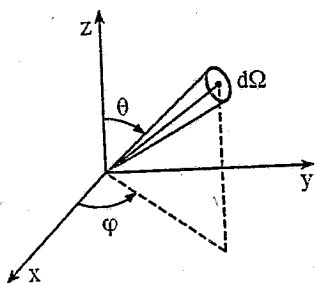
Αν τώρα αντί για δέσμη έχουμε ένα σωματίο, το οποίο περνάει από τον στόχο, η σ είναι η πιθανότητα να απορροφηθεί το σωματίο από τα κέντρα απορροφήσεως του στόχου.

δ) Διαφορική ενεργός διατομή

Πολλές φορές επειδή ενδιαφερόμαστε για τον σκεδασμό σωματιίων από την διεύθυνση (θ, ϕ) και μέσα στην στοιχειώδη στερεή γωνία $d\Omega$, λείζουμε την διαφορική ενεργό διατομή σκεδασμού $\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega}$ από την σχέση:

$$\frac{dI_{sc}}{I} = \frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} N dx d\Omega \quad (1.23)$$

Στο σχήμα 1 φαίνεται ο ορισμός για τις γωνίες ϕ, θ καθώς και της τετραέως γωνίας $d\Omega$, οι οποίες εισέρχονται στην σχέση (1.23).



Σχήμα 1.3.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Π

ΔΙΑΔΡΟΜΗ ΤΗΣ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ ΣΤΗΝ ΥΛΗ

2.1 Γενικά

Τα σωματία ανιχνεύονται μέσω των ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων. Κατά την μελέτη των φαινομένων, τα οποία συμβαίνουν κατά τη διαδρομή των σωματιών μέσα στην ύλη διακρίνουμε τα σωματία στις εξής κατηγορίες:

α) Βαρειά σωματία: Έτσι λέγονται τα σωματία για τα οποία ο λόγος του φορτίου προς την μάζα των (q/m) είναι μικρός. Βαρειά σωματία είναι π.χ. τα: p , α , d .

β) Ελαφρά σωματία: Ονομάζονται εκείνα τα σωματία για τα οποία ο λόγος q/m είναι μεγάλος. Ελαφρό σωματίο είναι το e .

γ) Ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία γ .

Τα βαρειά σωματία έχουν χαρακτηριστική εμβέλεια, η οποία είναι συνάρτηση της μάζας και ενέργειάς των. Εμβέλεια εμφανίζουν και τα ελαφρά σωματία αλλά αυτή δεν μπορεί να μετρηθεί εύκολα, γιατί σκεδάζονται πάρα πολύ.

Η απορρόφηση, τέλος, της γ ακτινοβολίας όταν διέρχεται μέσα από την ύλη, είναι εκθετική.

Ισχύει, δηλαδή, η σχέση:

$$-\frac{dI}{I} = \mu dx \quad (2.1)$$

ή

$$I = I_0 \exp(-\mu x) \quad (2.2)$$

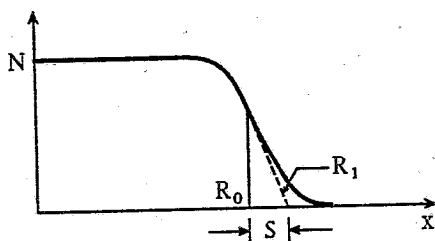
όπου: I_0 η αρχική ένταση της δέσμης
 I η ένταση της σε βάθος x του στόχου, και
 μ ο συντελεστής απορροφήσεως της ύλης του στόχου.

Ιονιστική Ικανότητα

Όταν η μονοενεργειακή δέσμη περνάει μέσα από ύλη, τα σωματίδια που την αποτελούν, χάνουν ενέργεια λόγω των κρούσεων με τα μόρια ή τα άτομα της ύλης από την οποία διέρχονται.

"Ιονιστική ικανότητα" κάποιου σωματίου, ονομάζουμε, τον αριθμό των ζευγών ιόντων ανά μονάδα μήκους (cm) τροχιάς, τα οποία παράγει το σωματίδιο κατά την διέλευσή του μέσα από την ύλη.

Η ελάττωση της ενέργειας κάθε σωματίου είναι στατιστικής φύσεως, λόγω του μεγάλου αριθμού των σωματιδίων και των ποικίλων διελεύσεων, που συμβαίνουν. Στο σχήμα 2.1 φαίνεται η μεταβολή του αριθμού των σωματιδίων μονοενεργειακής δέσμης μέσα σε ομογενές υλικό. Η συνάρτηση της απόστασης x .



Σχήμα 2.1.

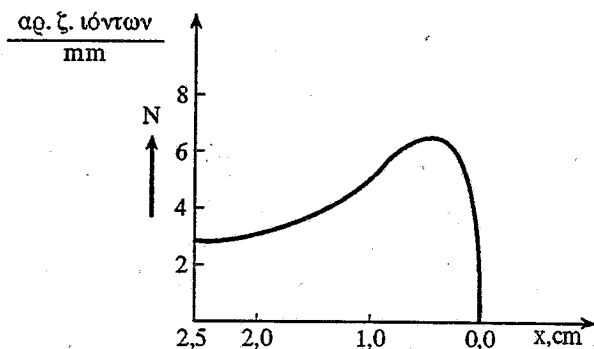
Σε αυτό R_0 είναι η μέση εμβέλεια του σωματίου, R_1 η εμβέλεια της δέσμης, η δε διαφορά

$$S = R_1 - R_0 \quad (2.3)$$

λέγεται αβεβαιότητα (straggling).

Στο σχήμα 2.2 δίνεται διάγραμμα της ιονιστικής ικανότητας του σωματίου α όπως μεταβάλλεται με την απόσταση x (καμπύλη Bragg). Ως σημείο παίρνουμε το σημείο που σταματάει το σωματίδιο μέσα σε ατμοσφαιρικό αέρα πυκνότητας $d = 1.184 \text{ mgr cm}^{-3}$ και για συνθήκες σταθερής πίεσης και θερμοκρασίας (S.T.P.) δηλ. 15°C και 760 Torr .

Αν αντί ενός σωματίου έχουμε δέσμη σωματιδίων παίρνουμε σαν μέση τιμή αριθμού ζευγών ιόντων οπότε αντί της καμπύλης του σχήματος 2.2 έχουμε άλλη διαφορετική από αυτήν.



Σχήμα 2.2.

Στην καμπύλη Bragg παρατηρούμε ότι, όταν ελαττώνεται η ενέργεια αυξάνεται η ιονιστική ικανότητα του σωματίου. Αυτό έχει την εξής εξήγηση: Ελάττωση της ενέργειας ταυτίζεται με ελάττωση της ταχύτητας του σωματίου και συνεπώς ο χρόνος διέλευσης του κοντά σε άλλα σωματία αυξάνει. Αυτό έχει ως επακόλουθο μεγαλύτερη μεταφορά ενέργειας, κι έτσι ο αριθμός των παραγομένων ιόντων ανά μονάδα μήκους της τροχιάς του αυξάνεται. Προς το τέλος της τροχιάς η ταχύτητα του σωματίου είναι πολύ μικρή και προσελκύει ηλεκτρόνια από το περιβάλλον, τα οποία εξουδετερώνουν μέρος του φορτίου του. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ότι το τέλος της τροχιάς παρουσιάζει λέπτυνση (σχήμα 2.2).

2.3 Σκεδασμός Rutherford

Η μεγαλύτερη απώλεια ενέργειας σωματίων, τα οποία διέρχονται μέσα από ύλη προέρχεται από τον σκεδασμό των από τα ηλεκτρόνια των ατόμων. Πολλές φορές όμως το σωματίο π.χ. το πρωτόνιο, σκεδάζεται από το πεδίο Coulomb του πυρήνα και ενώ η απώλεια ενέργειας του σωματίου είναι πολύ μικρή από αυτό το φαινόμενο, η γωνία σκέδασης του είναι αρκετά σημαντική. Ο σκεδασμός αυτός μελετήθηκε και παρουσιάστηκε σε μια από τις πλέον κλασσικές επιστημονικές δημοσιεύσεις από τον Rutherford. Ένας τρόπος θεωρητικής επεξεργασίας του θέματος είναι ο πάρα κάτω.

Ας θεωρήσουμε σωματίο βλήμα φορτίου ze , το οποίο πλησιάζει πυρήνα φορτίου Ze , ο οποίος είναι ο στόχος.

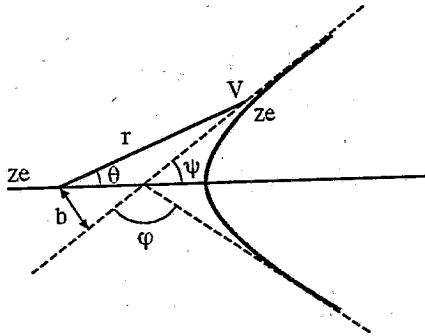
Μπορούμε να απλοποιήσουμε το πρόβλημα, εάν θεωρήσουμε ότι ο πυρήνας είναι πολύ μεγάλος και ακίνητος σε όλη τη διάρκεια του

ων (r, θ). Η τιμή της ταχύτητας του βλήματος θεωρείται χαμηλή, ώστε να μη χρειαστεί να χρησιμοποιηθούν οι τύποι της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας.

Η δύναμη, η οποία δρα μεταξύ του βλήματος και στόχου είναι δύναμη Coulomb, της οποίας το μέτρο δίνεται από την σχέση:

$$F = \frac{Zze^2}{r^2} \quad (2.4)$$

όπου r η απόσταση μεταξύ του σωματίου και του πυρήνα, δηλ. η κίνηση του σωματίου είναι κεντρική.



Σχήμα 2.3.

Αν V η ταχύτητα σωματίου σε άπειρη απόσταση από τον πυρήνα η στροφορμή L του σωματίου είναι:

$$L = MVb = Mr^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (2.5)$$

οπότε

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{Vb}{r^2} \quad (2.6)$$

Η δύναμη (2.4) έχει ακτινική επιτάχυνση α_r ίση με:

$$\alpha_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{F}{M} = \frac{Zze^2}{Mr^2} \quad (2.7)$$

Για να βρούμε την τροχιά του σωματιού $r = r(\theta)$ απαλείφουμε τον χρόνο από τις εξισώσεις (2.5) και (2.7). Αυτό γίνεται ευκολότερα εάν κάνουμε την αντικατάσταση

$$r = \frac{1}{u} \quad (2.8)$$

οπότε παίρνουμε τις σχέσεις:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} V b u^2 = -V b \frac{du}{d\theta}$$

και

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dr}{dt} \right) = -V^2 b^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} \quad (2.9)$$

Βάσει των (2.8), (2.6) και (2.9) ή (2.7) γράφεται

$$-V^2 b^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - \frac{1}{u} V^2 b^2 u^4 = \frac{Zze^2 u^2}{M}$$

ή

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{Zze^2}{MV^2 b^2} \quad (2.10)$$

Θέτοντας:

$$S = \frac{Zze^2}{\frac{1}{2} MV^2} \quad (2.11)$$

λαμβάνουμε

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{S}{2b^2} \quad (2.12)$$

Η λύση της (2.12) είναι της μορφής:

$$u = \frac{1}{r} = B + A \cos \theta = -\frac{S}{2b^2} + A \cos \theta \quad * \quad (2.13)$$

Η εξίσωση (2.13) παριστάνει κωνική τομή, της οποίας η μορφή εξαρτάται από την τιμή της εκκεντρότητας $\varepsilon = \frac{A}{|B|}$ και βέβαια $B = -\frac{S}{2b^2}$.
υγκεκριμένα:

Αν $\varepsilon > 1$ η (2.13) παριστάνει υπερβολή
 » $\varepsilon = 1$ » » » παραβολή
 » $\varepsilon < 1$ » » » έλλειψη

Υπολογισμός της σταθεράς A. Από το θεώρημα διατηρήσεως της ενέργειας έχουμε ότι:

$$\frac{1}{2} MV^2 = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{Zze^2}{r} \quad (2.14)$$

που v η ταχύτητα του σωματίου σε απόσταση r από την πυρήνα. Από την (2.14) έχουμε εξ' άλλου:

$$1 = \frac{v^2}{V^2} + \frac{S}{r} \quad (2.15)$$

Επι πλέον είναι γνωστό, ότι η ταχύτητα σε πολικές συντεταγμένες γίνεται από την σχέση:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \left[\left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \right] \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (2.16)$$

και από την (2.13) παίρνουμε για το (dr)/(dθ)

$$\frac{dr}{d\theta} = r^2 A \sin \theta \quad (2.17)$$

Με συνδυασμό τώρα των (2.15), (2.16) και (2.17) παίρνουμε για τον λόγο των τετραγώνων των ταχυτήτων v και V.

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{V^2} &= 1 - \frac{S}{r} = \frac{1}{V^2} [A^2 r^4 \sin^2 \theta + r^2] \frac{V^2 b^2}{r^4} \\ &= b^2 \left[A^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{r^2} \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

οπότε

$$A^2 = \frac{1}{b^2} \left[1 + \frac{S^2}{4b^2} \right] \quad \eta \quad A = \frac{1}{b} \sqrt{1 + \frac{S^2}{4b^2}} \quad (2.19)$$

Λόγω της (2.19) η εξίσωση της τροχιάς του σωματίου είναι:

$$u = \frac{1}{r} = -\frac{S}{2b^2} + \frac{1}{b} \sqrt{1 + \frac{S^2}{4b^2}} \cos \theta \quad (2.20)$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση της τροχιάς του σωματίου δίνεται σαν συνάρτηση του S που είναι η ελάχιστη απόσταση που πλησιάζει το σωματίο, τον πυρήνα, και του συντελεστού κρούσεως (impact parameter) b .

Από την (2.19) και την σχέση $|B| = \frac{S}{2b^2}$ βρίσκουμε ότι:

$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{4b^2}{S^2}}$ και εφόσον $\frac{4b^2}{S^2} > 0$ έχουμε: $\varepsilon > 1$, οπότε η τροχιά είναι υπερβολή.

Στο σχήμα 2.3, η ψ είναι η γωνία την οποία σχηματίζει ο άξονας των r και η ασυμπτωτική της υπερβολής. Η γωνία $\phi = 180 - 2\psi$ λέγεται γωνία σκεδασμού. Για $r \rightarrow \infty$ έπεται $\theta = \psi$ και από την (2.20) παίρνουμε, ότι:

$$\cos \psi = \frac{\frac{S}{2b}}{\left(1 + \frac{S^2}{4b^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \text{όπου } x = \frac{S}{2b}$$

$$x = \cot \psi$$

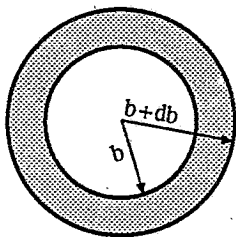
$$b = \frac{S}{2} \tan \psi$$

άρα

$$b = \frac{S}{2} \cot \frac{\phi}{2} \quad (2.21)$$

Όταν ο συντελεστής κρούσεως της αντιδράσεως είναι μεταξύ b και $b + db$ τότε το σωματίο σκεδάζεται μεταξύ των γωνιών ϕ και $\phi + d\phi$. Η πιθανότητα ότι το σωματίο έχει αυτόν τον συντελεστή κρούσεως είναι ανάλογη της επιφανείας $d\sigma(\phi)$, η οποία είναι γραμμοσκιασμένη στο σχήμα 20 και είναι ίση με:

$$d\sigma(\phi) = \pi(b+db)^2 - \pi b^2 = 2\pi b db \quad (2.22)$$



Σχήμα 2.4.

Από την (2.21) ή (2.22) γράφεται:

$$d\sigma(\phi) = -\pi \frac{S^2}{4} \frac{\cos \frac{\phi}{2}}{\sin^3 \frac{\phi}{2}} d\phi$$

Γνωρίζουμε όμως, ότι η στερεά γωνία $d\Omega$ είναι ίση με:

$$d\Omega = 2\pi \sin \phi d\phi = 4\pi \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} d\phi$$

Άρα η διαφορική ενεργός διατομή $\frac{d\sigma(\phi)}{d\Omega}$ δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{d\sigma(\phi)}{d\Omega} = \frac{S^2}{16\sin^4\frac{\phi}{2}} = \frac{Z^2z^2e^4}{4(MV^2)^2\sin^4\frac{\phi}{2}} \quad (2.23)$$

ο οποίος είναι ο τύπος του Rutherford.

Συνήθως χρησιμοποιούνται και οι ακόλουθες μορφές του τύπου του Rutherford, οι οποίες αναφέρονται στην διαφορική ενεργό διατομή, ως προς την γωνία σκεδασμού και όχι την στερεά γωνία

$$\frac{d\sigma}{d\phi} = 2\pi\sin\phi \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{0,8139Z^2z^2}{E^2} \frac{\sin\phi}{\sin^4\frac{\phi}{2}} 10^{-26} \quad (2.24)$$

ή

$$\frac{d\sigma}{d\phi} = 8,139 \frac{Z^2z^2}{E^2} \frac{\sin\phi}{\sin^4\frac{\phi}{2}} \quad (2.25)$$

όπου η ενέργεια E δίνεται σε MeV και η $(d\sigma/d\phi)$ ευρίσκεται σε $\text{cm}^2/\text{nucleus}$ και $\text{mb}/\text{nucleus}$ με τις (2.24) και (2.25) αντίστοιχα.

Για μικρές γωνίες σκεδασμού ($\phi < 1\text{rad}$), ο τύπος του Rutherford απλοποιείται και παίρνει την εξής μορφή:

$$\frac{d\sigma(\phi)}{d\Omega} = \left(\frac{2Zze^2}{p\beta c} \right)^2 \frac{1}{\phi^4} \quad (2.26)$$

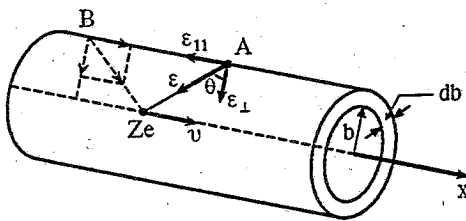
όπου $\beta = v/c$, c η ταχύτητα του φωτός.

2.4 Απώλειες ενέργειας από ιονισμό

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στην § 2.3, οι μεγαλύτερες απώλειες της ενέργειας ενός σωματίου, που περνάει μέσα από ύλη προέρχονται από τις συγκρούσεις του με τα ηλεκτρόνια των ατόμων. Για τον υπολογισμό αυτής της ενεργειακής απώλειας μελετάμε, πρώτα την "σύγκρουση" του σωματίου με ένα ηλεκτρόνιο.

Όταν σωματίο με φορτίο ze και ταχύτητα v περνάει κοντά σε ηλεκτρόνιο e (σχήμα 2.5) αντιδράει με αυτό με την δύναμη Coulomb. Επειδή η ταχύτητα του σωματίου είναι μεγάλη και ο χρόνος της αλληλεπιδράσεως μικρός, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σωματίο δίνει ώθηση (impulse) στο ηλεκτρόνιο, και απλοποιούμε το πρόβλημα υποθέτοντας ότι:

α) το ηλεκτρόνιο δεν μετακινείται κατά τη διάρκεια του φαινομένου.



Σχήμα 2.5.

β) το σωματίο είναι τόσο βαρύ, ώστε δεν σκεδάζεται κατά μεγάλη γωνία. Δηλ. υποθέτουμε ότι η απόσταση b (σχήμα 2.5) μένει σταθερή.

Για να υπολογίσουμε την ώθηση, αναλύουμε την ένταση \mathcal{E} του ηλεκτρικού πεδίου, στην κάθετη, \mathcal{E}_\perp , και την παράλληλη, \mathcal{E}_\parallel συνιστώσα, ως προς την ταχύτητα του σωματίου. Και οι δύο αυτές συνιστώσες μεταβάλλονται με την απόσταση, r , του σωματίου από το ηλεκτρόνιο. Αλλά η παράλληλη συνιστώσα έχει τις ίδιες τιμές στα σημεία A και B; συμμετρικά ως προς το πόδι του συντελεστού κρούσεως, αλλ' αντίθετες φορές. Γι' αυτό η ολική παράλληλη συνιστώσα μηδενίζεται και μένει η κάθετη συνιστώσα, που αλλάζει την κάθετη συνιστώσα της ορμής p_\perp του σωματίου κατά Δp_\perp .

Όπως αναφέραμε στο ηλεκτρόνιο ασκείται δύναμη F_\perp :

$$F_\perp = e\mathcal{E}_\perp \quad (2.27)$$

γι' αυτό η μεταβολή Δp_\perp δίνεται από τον τύπο:

$$\Delta p_\perp = \int_{-\infty}^{+\infty} e\mathcal{E}_\perp dt = \int e\mathcal{E}_\perp \frac{dx}{v} = \int e \frac{ze}{r^2} \cos\theta \frac{dx}{v} \quad (2.28)$$

$$\Delta p_{\perp} = \frac{2ze^2}{bv} \quad (2.29)$$

Από τον τύπο (6.29) ευρίσκουμε ότι το σωματίο μετέδωσε στο ηλεκτρόνιο ενέργεια ΔE ίση με

$$\Delta E = \frac{(\Delta p)^2}{2m_e} = \frac{(2ze^2)^2}{2b^2v^2m_e} \quad (2.30)$$

Αυτή η ενέργεια αντιστοιχεί σε ένα ηλεκτρόνιο με συντελεστή κρούσεως b . Το σωματίο, όμως, περνάει μέσα από ύλη με N ηλεκτρόνια/cm³, οπότε εισέρχεται η έννοια του ειδικού ιονισμού,

$$\text{ειδικός ιονισμός} = -\frac{dE}{dx} \quad (2.31)$$

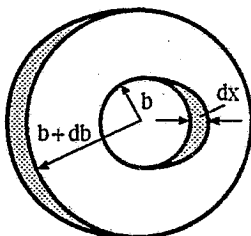
δηλαδή το ποσό της χαμένης ενέργειας για κάθε μονάδα μήκους τροχιάς.

Για τον υπολογισμό του ειδικού ιονισμού ευρίσκουμε τον αριθμό των ηλεκτρονίων, τα οποία περιέχονται μέσα στον κυλινδρικό δακτύλιο (σχήμα 2.6) εσωτερικής ακτίνας b και εξωτερικής $b+db$ πάχους dx . Ο όγκος αυτού του στοιχειώδη κυλινδρικού δακτυλίου είναι ίσος με

$$dV = 2\pi b db dx$$

Αυτός πολλαπλασιαζόμενος με N μας δίνει τον αριθμό των ηλεκτρονίων μέσα στον δακτύλιο με όγκο dV . Δηλ:

$$dN = 2\pi N b db dx$$



Σχήμα 2.6.

Από τις (2.30), (2.31) και τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
 -\frac{dE}{dx} &= 2\pi N \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{2(ze^2)^2}{v^2 m_e b^2} b db = \frac{4\pi N}{v^2 m_e} z^2 e^4 \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{db}{b} \\
 &= \frac{4\pi N z^2 e^4}{v^2 m_e} \log \frac{b_{\max}}{b_{\min}} \quad (2.32)
 \end{aligned}$$

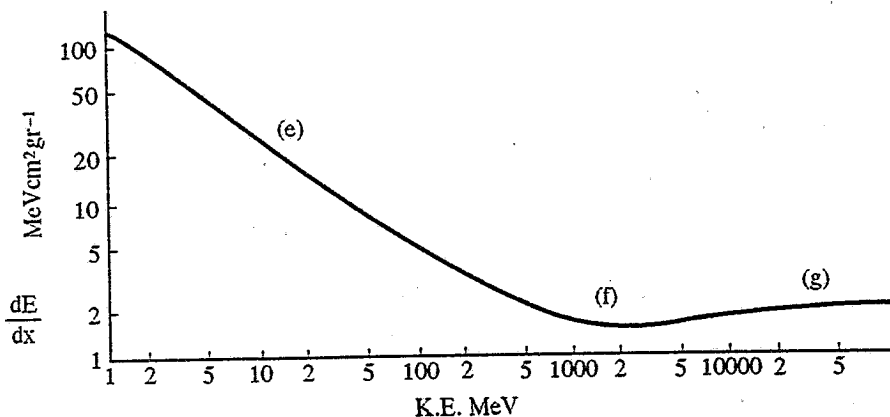
Αρχικά, σαν μαθηματικά σωστά όρια θα παίρναμε τα εξής: $b_{\max} =$ και $b_{\min} = 0$, αλλά αυτά απορρίπτονται, αφού:

Εάν $b = b_{\min} = 0$ τότε το βαρύ σωματίο θα έπεφτε πάνω στο λεκτρόνιο, με αποτέλεσμα να το μετακινήσει, αυτό όμως δεν συμφωνεί με την υπόθεση (α). Το δε $b = b_{\max} = \infty$ δεν έχει φυσική σημασία.

Οι ακριβείς τιμές b_{\max} και b_{\min} υπολογίζονται με την βοήθεια της βαντικής θεωρίας και ο τύπος (2.32) γράφεται ως εξής:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi N z^2 e^4}{m_e v^2} \left[\log \frac{2m_e v^2}{I(1-\beta^2)} - \beta^2 \right] \quad (2.33)$$

που I είναι το μέσο δυναμικό ιονισμού των ατόμων του υλικού. Π.χ. για τον αέρα είναι $I = 98$ eV. Η γραφική παράσταση για την σχέση $\frac{dE}{dx} = f(E_{\text{κιν}})$ με λογαριθμική κλίμακα παρουσιάζεται στο σχήμα 2.7.



Σ' αυτήν την καμπύλη διακρίνουμε τις εξής χαρακτηριστικές περιοχές:

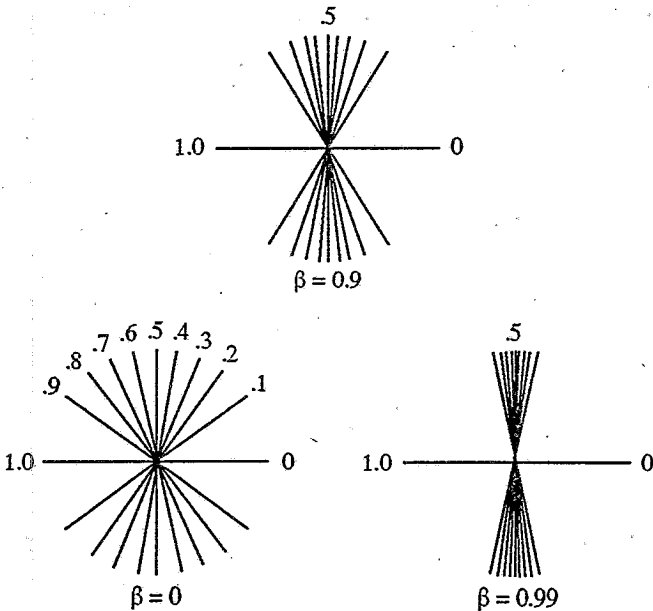
i) Περιοχή ef σε μικρές ενέργειες όπου η μεταβολή προέρχεται κυρίως από τον όρο $1/v^2$ επειδή η αύξηση του λογαριθμικού όρου μέσα στην παρένθεση της (2.33) είναι μικρότερη από το $1/v^2$.

ii) Περιοχή fg όπου $\beta \rightarrow 1$ και έτσι ισχύει το αντίστροφο του (i).

Η φυσική εξήγηση του φαινομένου είναι η ακόλουθη.

Στην περιοχή ef, αυξανόμενης της ταχύτητας v (άρα και της $E_{κιν}$) ο χρόνος διελεύσεως του βαριού σωματίου κοντά στο ηλεκτρόνιο ελαττώνεται, με αποτέλεσμα την ελάττωση της ωθήσεως του σωματίου στο e και, έτσι, ελαττώνεται η ιονιστική ικανότητα του σωματίου. Από το σημείο f και έπειτα το πεδίο \mathcal{E}_\perp αυξάνει με την ταχύτητα λόγω ρελατιβιστικής πύκνωσης των δυναμικών γραμμών (σχήμα 2.8). Η αύξηση του πεδίου \mathcal{E}_\perp είναι ταχύτερη από την ελάττωση του χρόνου διέλευσης του βαριού σωματίου κοντά από το ηλεκτρόνιο.

Σε περιοχές με πολύ μικρές ταχύτητες, άρα μικρή $E_{κιν}$ του σωματίου ο ειδικός ιονισμός ελαττώνεται, γιατί μεταξύ των άλλων φαινομένων τα οποία λαμβάνουν τότε χώρα είναι και η ενσωμάτωση στο σωματίο ηλεκτρονίων από το περιβάλλον, τα οποία μειώνουν το φορτίον του, δηλ. ελαττώνουν την ιονιστική του ικανότητα.



5 Απώλεια ενέργειας ηλεκτρονίων

Εκτός από την απώλεια ενέργειας λόγω ιονισμού τα ηλεκτρόνια λόγω της μικρής των μάζας είναι επιδεκτικά μεγάλων επιταχύνσεων και επιβραδύνσεων και συνεπώς ακτινοβολούν ενέργεια με την μορφή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Η ακτινοβολία αυτή λόγω του τρόπου παραγωγής της ονομάζεται "ακτινοβολία πέδησης" (Bremsstrahlung). Για μη ελατιβιστικά ηλεκτρόνια, δηλ. για ενέργειες πολύ μικρότερες από $m_e c^2$, οι απώλειες, λόγω ιονισμού υπερβαίνουν τις απώλειες λόγω ακτινοβολίας πέδησης, οπότε ο ειδικός ιονισμός δίνεται από την σχέση:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi e^4 N}{m_e v^2} \left(\log \frac{m_e v^2}{2I} - \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \right) \quad (2.34)$$

α σύμβολα έχουν την ίδια έννοια σαν στην σχέση (2.33).

Για τα σχετιβιστικά ηλεκτρόνια ο ειδικός ιονισμός δίνεται από την σχέση:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi e^4 N}{m_e c^2} \left(\log \frac{2m_e c^2}{I} - \frac{3}{2} \log(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \log \beta + \frac{1}{16} \right) \quad (2.35)$$

Οι τύποι (2.34) και (2.35) είναι περίπου οι ίδιοι με τους τύπους που εκφράζουν την απώλεια από ιονισμό για τα άλλα σωματίδια και διαφέρουν το πολύ κατά 10%.

2.6 Ακτινοβολία Τσερένκοβ (Cerenkov)

Όπως είναι γνωστό η διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων μέσα στην ύλη εξαρτάται από τις ιδιότητες της, και συγκεκριμένα αν η ο δείκτης διαθλάσεως κάποιου υλικού, η ταχύτητα διαδόσεως του πεδίου μέσα σ' αυτό είναι ίση με c/n .

Αν τώρα φορτισμένα σωματίδια διέρχονται μέσα από κάποιο υλικό και η ταχύτητα των, βc , είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα διαδόσεως του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σ' αυτό το υλικό, δηλ. ισχύει η σχέση:

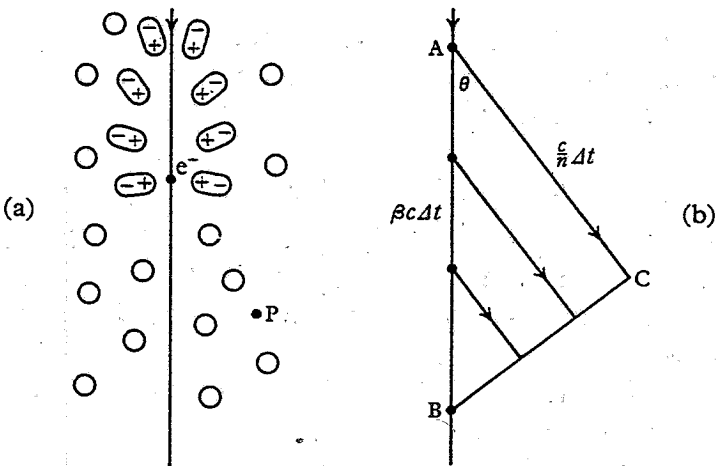
$$\beta c > \frac{c}{n}$$

εμφανίζεται νέο κύμα ηλεκτρομαγνητικής φύσεως. Αυτή η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία ονομάζεται ακτινοβολία Cerenkov. Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά αυτής της ακτινοβολίας μοιάζουν με το κρουστικό κύμα που δημιουργείται στο πρωριαίο άκρο ενός πλοίου, το οποίο κινείται μέσα στη θάλασσα. Συνεπώς, η εκπομπή των φωτονίων θα γίνεται μέσα σε κώνο με γωνία θ ίση με:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{\beta n} \right) \quad (2.36)$$

Η ακτινοβολία Cerenkov χαρακτηρίζεται από συνεχές φάσμα στην περιοχή 3000-6000 Å.

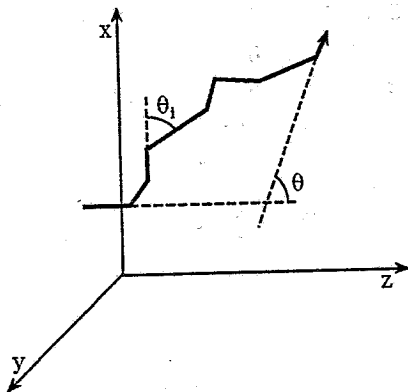
Όπως είναι φανερό η ακτινοβολία Cerenkov εκδηλώνεται μόνο όταν τα φορτισμένα σώματα υπερβούν ωρισμένη ταχύτητα. Υπάρχει δηλαδή κατώφλιο το οποίο καθορίζεται από το υλικό μέσα από το οποίο περνάει το σώμα. Επειδή έχει αυτές τις ελκτικές ιδιότητες και επειδή εκπέμπεται κατά ωρισμένες διευθύνσεις η ακτινοβολία Cerenkov χρησιμοποιείται πάρα πολύ σε πειραματικές διατάξεις για την αναγνώριση σωματίων της ίδιας μεν ορμής, αλλά διάφορης μάζας, καθώς και για τον ορισμό της φοράς των. Για ρελατιβιστικά φορτισμένα σώματα, τα οποία κινούνται μέσα σε νερό, αποδεικνύεται ότι εκπέμπονται περίπου $750 \sin^2 \theta$ φωτόνια για διαδρομή 1 cm του φορτισμένου σωματίου.



Σχήμα 2.9.

Πολλαπλός σκεδασμός

Κατά την μελέτη των απωλειών ενέργειας λόγω ιονισμού (§ 2.4) βρήθηκε ότι, το σωματίο λόγω της μεγάλης μάζας του σε σχέση με το εκτρόνιο υφίσταται μικρή αλλαγή διεύθυνσεως κατά την "κρούση" με εύθερο ηλεκτρόνιο της ύλης μέσα από την οποία διέρχεται. Οι αλλαγές ν διευθύνσεων κατά τις κρούσεις, οι οποίες χαρακτηρίζονται από νίες σκεδασμού θ_i , είναι μεν μικρές και τελείως ανεξάρτητες μεταξύ ν , λόγω, όμως, του μεγάλου πλήθους των, το συνολικό αποτέλεσμα είναι μαντικό και πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν. Παραστατική εικόνα του ινομένου δίνεται στο σχήμα 2.10.



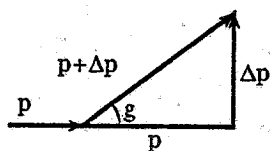
Σχήμα 2.10.

Στην § 2.4 δείχθηκε ότι η κάθετη ώθηση που δίνεται σε φορτισμένο σωματίο ze κατά την "κρούση" με πυρήνα φορτίου Ze εκφράζεται με τη σχέση:

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{2zZe^2}{b\nu p}$$

Επί πλέον για μικρές γωνίες έχουμε (σχήμα 2.11):

$$\frac{\Delta p}{p} = \theta$$



Σχήμα 2.11.

Κατά την θεώρηση του προβλήματος πρέπει να ληφθεί υπ' όψη ότι οι διάφοροι σκεδασμοί θ_i γίνονται κατά διαφορετικές διευθύνσεις στον χώρο και μάλιστα ανεξάρτητες μεταξύ των.

Παίρνουμε το αριστερόστροφο τρισσορθογώνιο σύστημα του σχήματος 2.11 όπου ο άξονας των z είναι παράλληλος προς την αρχική διεύθυνση του σωματίου, και καλούμε Θ την ολική γωνία σκεδασμού και Θ_x και Θ_y τις x , και y , συνιστώσες της. Αν επί πλέον καλέσουμε ϕ_i την αζιμουθιακή γωνία του επιπέδου σκεδασμού κάθε κρούσεως με το σύστημα συντεταγμένων παίρνουμε:

$$\Theta_x = \sum_i \theta_i \cos \phi_i$$

και

$$\Theta_y = \sum_i \theta_i \sin \phi_i$$

οπότε

$$\Theta^2 = \Theta_x^2 + \Theta_y^2 = \left(\sum_i \theta_i \cos \phi_i \right)^2 + \left(\sum_i \theta_i \sin \phi_i \right)^2$$

Η ανεξαρτησία των διαδοχικών κρούσεων ορίζει ότι:

$$\overline{\cos \phi_i \cos \psi_i} = \frac{1}{2} \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{1}{2} & i = j \end{cases}$$

όπου δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker.

Συνεπώς:

$$\langle \Theta^2 \rangle = \langle \sum_i \theta_i^2 \rangle = \sum_i \theta_i^2$$

του το σύμβολο $\langle \rangle$ υπονοεί μέση τιμή.
Εξ άλλου:

$$\langle \Theta^2 \rangle = 2\langle \Theta_x^2 \rangle = 2\langle \Theta_y^2 \rangle$$

Από τους πάρα πάνω τύπους και χρησιμοποιώντας τον συλλογισμό στον οποίο βρέθηκε ο τύπος (2.32) βρίσκουμε ότι:

$$\langle \Theta^2 \rangle = 2\pi N x \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \left(\frac{2zZe^2}{bv} \right)^2 b db = \frac{(2zZe^2)^2}{v^2 p^2} 2\pi N x \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{db}{b}$$

ηλ.:

$$\langle \Theta^2 \rangle = \frac{8\pi N x Z^2 z^2 e^4}{v^2 p^2} \log \frac{b_{\max}}{b_{\min}} \quad (2.37)$$

Από τον τύπο (2.37) προκύπτει ότι η μέση τιμή του τετραγώνου της ολικής γωνίας σκεδασμού είναι:

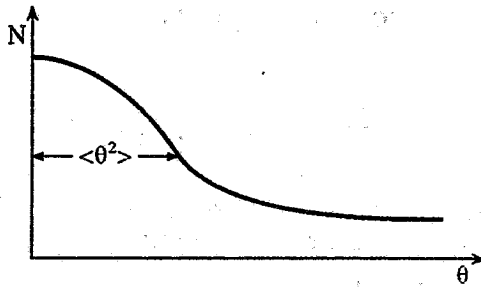
$$\langle \Theta^2 \rangle = \frac{z^2 Z^2 x}{(p\beta c)^2}$$

Η μελέτη της κατανομής της Θ_x για πλήθος σωματιών υποδεικνύει ότι για μικρές Θ_x ακολουθείται ικανοποιητικά η καμπύλη κατανομής του Gauss. Συνεπώς, μπορούμε να υποθέσουμε, ότι κατά ένα πολλαπλό σκεδασμό η πιθανότητα να σκεδασθεί το σωματίο μεταξύ των γωνιών Θ και $\Theta + d\Theta$ δίνεται από την σχέση:

$$P(\Theta_x) d\Theta_x = \frac{\exp(-\Theta_x^2 / \langle \Theta^2 \rangle)}{\sqrt{\pi \langle \Theta^2 \rangle}} d\Theta_x \quad (2.38)$$

Στο σχήμα 2.12 παρουσιάζεται γραφικά η σχέση της ολικής γωνίας σκεδασμού μονοενεργειακής δέσμης σωματιών και του αριθμού N των σωματιών, η οποία έχει πραγματικά την μορφή κατανομής

κατά Gauss, αλλά με πολύ μεγαλύτερη "ουρά" λόγω του σκεδασμού Rutherford.



Σχήμα 2.12.

2.8 Διαδρομή της ακτινοβολίας γ μέσω της ύλης

2.8.1 Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

Όπως είναι γνωστό η απορρόφηση φωτονίων από τα ηλεκτρόνια των ατόμων ακολουθείται από διέγερση ή ιονισμό, ανάλογα με την ενέργεια των απορροφουμένων φωτονίων. Ο "συντελεστής απορροφήσεως" των ακτίνων γ παρουσιάζει απότομες μεταβολές χαρακτηριστικές των σταθμών ενέργειας του υλικού. Αυτό είναι συνέπεια της κβαντικής φύσεως που ακολουθεί το φαινόμενο της απορροφήσεως.

Η φωτοηλεκτρική απορρόφηση ακολουθείται από εκπομπή δευτερογενών φωτονίων (φωσφορισμός) ή από εκπομπή ηλεκτρονίων μικρής ταχύτητας (φαινόμενο Auger). Η διεργασία του φαινομένου Auger είναι η ακόλουθη: Εάν ένα ηλεκτρόνιο πέσει π.χ. από τον φλοιό L στην κενή θέση του φλοιού K η διαφορά ενέργειας $E_K - E_L$ η οποία εμφανίζεται υπό μορφή ενός φωτονίου είναι δυνατό να μεταβιβασθεί σε άλλο ηλεκτρόνιο του φλοιού L το οποίο εκπέμπεται με κινητική ενέργεια

$$E_{\text{κιν}} = E_K - 2E_L$$

2.8.2 Σκεδασμός Thomson

Όπως είναι γνωστό η ένταση του Ηλεκτρικού πεδίου E ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος μεταβάλλεται χρονικά σε ωρισμένο σημείο του χώρου σύμφωνα με την σχέση:

$$E = E_0 \sin \omega t$$

Όταν επομένως η ακτινοβολία αυτή προσπέσει πάνω σε ένα λικό τα ηλεκτρόνια του υφίστανται την χρονική περιοδική δύναμη:

$$eE = eE_0 \sin \omega t \quad (2.39)$$

Ιηλ. το ηλεκτρόνιο αποκτάει επιτάχυνση α:

$$a = \frac{eE}{m} = \frac{eE_0}{m} \sin \omega t \quad (2.39)$$

Λόγω της επιταχύνσεως αυτής το ηλεκτρόνιο ακτινοβολεί η δε μέση ισχύς $\langle W \rangle$ της ακτινοβολίας υπολογίζεται από την κλασσική Ηλεκτροδυναμική:

$$\langle W \rangle = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \langle a^2 \rangle = \frac{2}{3} \frac{e^4 E_0^2}{m^2 c^3} \langle \sin^2 \omega t \rangle \quad (2.41)$$

$$\langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{\int_0^v \sin^2 \omega t dt}{\int_0^v dt} = \frac{1}{2} \quad (2.42)$$

όπου $v = 2\pi/\omega$.

Η (2.41) γράφεται:

$$\langle W \rangle = \frac{1}{3} \frac{e^4 E_0^2}{c^3 m^2} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 I_0$$

$$\langle W \rangle = \frac{8\pi}{3} r_0^2 I_0 \quad (2.43)$$

Στην σχέση (2.43) $r_0 = e^2/mc^2 = 2,82 \times 10^{-13}$ cm είναι δε γνωστή

"η κλασσική ακτίνα" του ηλεκτρονίου.

Η ισχύς $\langle W \rangle$ αφαιρείται από την αρχική της δέσμης και συνεπώς η ενεργός διατομή του φαινομένου θα δίνεται από την σχέση:

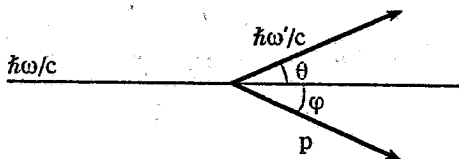
$$\sigma = \frac{dI}{I} = \frac{\langle W \rangle}{I_0} = \frac{8\pi}{3} r_0^2$$

2.8.3 Σκεδασμός Rayleigh

Εάν η μεταφορά ορμής από το φωτόνιο στο ηλεκτρόνιο είναι μικρή συγκρινόμενη με την ορμή του ηλεκτρονίου μέσα στο άτομο τότε πρέπει να προσθέσουμε την συνδρομή πολλών ηλεκτρονίων οπότε μιλάμε πλέον για τον σκεδασμό Rayleigh. Σε αυτήν την περίπτωση η ενεργός διατομή σ_R είναι της τάξεως $r_0^2 Z^2$.

2.8.4 Σκεδασμός Compton

Κατά την μέχρι τώρα ανάπτυξη δεν ελάβαμε υπ' όψιν τα κβαντικά χαρακτηριστικά των φωτονίων κατά τα οποία αυτά έχουν ενέργεια ίση με $\hbar\omega$ και ορμή ίση με $\hbar\omega/c$. Κατά την κρούση με σχεδόν ελεύθερα ηλεκτρόνια έχουμε σκεδασμό των φωτονίων σε γωνία Θ η οποία ευρίσκεται ως εξής:



Σχήμα 2.13.

Εφαρμόζουμε την αρχή διατηρήσεως της ενέργειας στο σύστημα φωτόνιο-ηλεκτρόνιο οπότε έχουμε:

Ενέργεια πριν την "κρούση" = Ενέργεια μετά την "κρούση"

Δηλ.

$$\hbar\omega + mc^2 = \hbar\omega' + \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$$

Εξ άλλου από την διατήρηση της ορμής έχουμε (σχ. 2.13):

$$(pc)^2 = (\hbar\omega')^2 + (\hbar\omega)^2 - 2(\hbar\omega')(\hbar\omega)\cos\theta \quad (2.46)$$

Η αντικατάσταση της $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi c}{\lambda}$ στην (2.46) δίνει τελικά:

$$(\lambda' - \lambda) = \frac{2\pi\hbar}{mc}(1 - \cos\theta) \quad (2.47)$$

όπου, λ , λ' το μήκος της ακτινοβολίας (φωτονίων) πριν και μετά τον σκεδασμό αντίστοιχα. Η αλλαγή της συχνότητας ονομάζεται φαινόμενο Compton.

2.9 Δίδυμη γέννεση

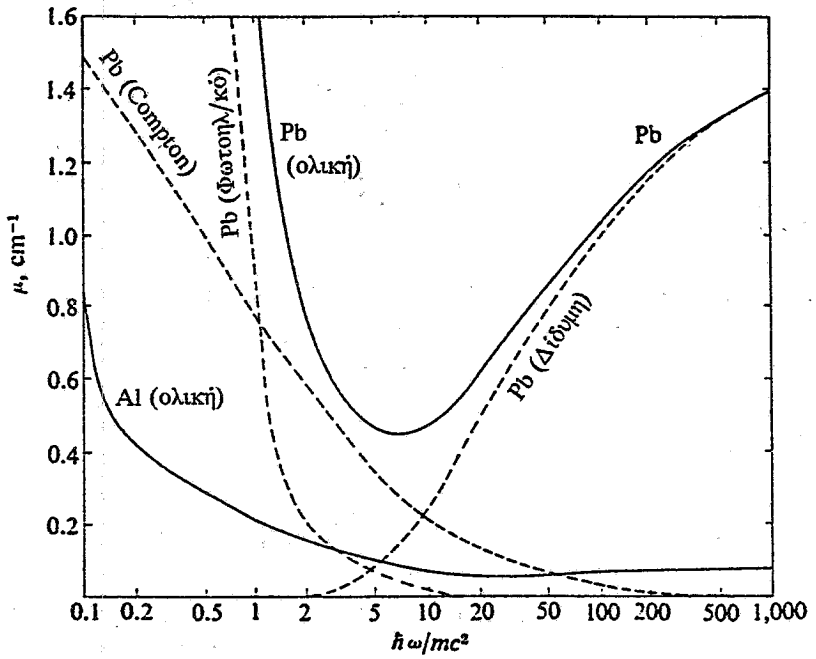
Η υλοποίηση μιας ακτίνας γ μπορεί να γίνει μόνο στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο του ατόμου ή του ηλεκτρονίου. Αυτό είναι αναγκαίο για την διατήρηση της ορμής και της ενέργειας.

Στο κέντρο μάζας του ηλεκτρονίου και ποζιτρονίου η μάζα ηρεμίας είναι: $2mc^2 = 1,022 \text{ MeV}$, όταν η υλοποίηση γίνεται μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο του πυρήνα τότε η ελάχιστη απαιτούμενη ενέργεια των ακτίνων γ είναι κοντά στην πάρα πάνω τιμή. Όταν όμως αυτή γίνεται στο ηλεκτρικό πεδίο του ηλεκτρονίου η αντίστοιχη ενέργεια είναι περίπου $4mc^2$. Η ενεργός διατομή για δίδυμη γέννεση και ρελατιβιστικές ταχύτητες είναι:

$$\sigma_{\infty} \frac{r_0^2 Z^2}{137} \quad (2.48)$$

Το αντίθετο φαινόμενο της υλοποίησως είναι η εξαύλωση, δηλαδή η μετατροπή της ενέργειας ηρεμίας του ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου σε φωτόνια. Πριν από την εξαύλωση το e^+ με το e^- σχηματίζουν σύστημα όμοιο με το άτομο, το οποίο ονομάζομε Positronium. Ο χρόνος ζωής αυτού του συστήματος είναι περίπου 10^{-12} sec . Ο συντελεστής απορροφήσεως φωτονίων σε Al και Pb συναρτήσει της ενέργειας ($\hbar\omega/mc^2$) του φωτονίου δίνεται στις καμπύλες του σχ. 2.14.

Σε αυτό το σχήμα βλέπουμε ότι για μικρές ενέργειες του φωτονίου η μεγαλύτερη απώλεια ενέργειας, προέρχεται από το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο και τον σκεδασμό Compton. Για μεγάλες ενέργειες του φωτονίου οι απώλειες ενέργειας οφείλονται αποκλειστικά στην



Σχήμα 2.14.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΡΑΔΙΕΝΕΡΓΕΙΑ

3.1 Νόμος για τις ραδιενεργές μετατροπές

Ραδιενεργή διάσπαση καλείται η αυτόματη μετατροπή ενός πυρήνα σε άλλον διαφορετικό. Ο νόμος στον οποίο υπακούει το φαινόμενο αυτό ονομάζεται νόμος των ραδιενεργών μετατροπών. Αυτός δηλώνει ότι ο αριθμός των διασπασμένων πυρήνων σε χρονικό διάστημα dt είναι ανάλογος με τον αριθμό N των πυρήνων κατά την στιγμή που έγινε η παρατήρηση:

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N \quad (3.1)$$

όπου λ η "σταθερά διασπάσεως". Από την (3.1) παίρνουμε με ολοκλήρωση:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (3.2)$$

όπου N_0 ο αρχικός αριθμός των διασπασμένων πυρήνων δηλ. την χρονική στιγμή $t = 0$. Σαν "μέσος χρόνος ζωής" των πυρήνων ορίζεται ο χρόνος

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad (3.3)$$

Δηλαδή μέσα σε χρόνο $t = \tau$ έχουμε αριθμό πυρήνων

$$N(\tau) = \frac{N_0}{e} = \frac{N_0}{3}$$

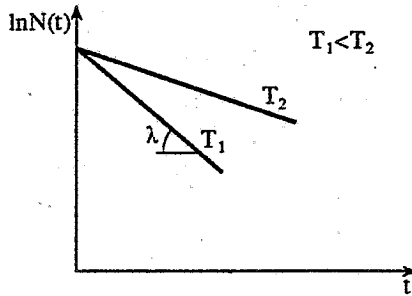
Εξ άλλου ορίζουμε σαν "χρόνο υποδιπλασιασμού" T , τον χρόνο μέσα στον οποίο διασπάται το 1/2 από τους αρχικούς πυρήνες. Δηλ.:

$$\text{Για } t = T \quad N(T) = N_0/2 \text{ άρα ισχύει}$$

$$\lambda T = \ln 2 = 2,3 \log 2 = 0,6931 \quad (3.4)$$

$$\ln(N(t)) = \ln(N_0) - \lambda t \quad (3.5)$$

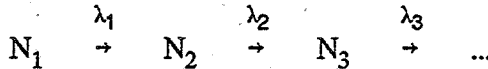
οπότε η σχέση $\ln N(t) = f(t)$ είναι γραμμική, με κλίση ίση με $-\lambda$ (σχήμα 3.1).



Σχήμα 3.1.

3.2 Διαδοχικές ραδιενεργές μετατροπές

Έστω σειρά με τις διασπάσεις



Τον πρωταρχικό πυρήνα ονομάζουμε "μητρικό" και τους διαδοχικά από αυτόν παραγόμενους καλούμε "θυγατρικούς". Θα ζητήσουμε τύπους οι οποίοι δίνουν τον αριθμό των πυρήνων κάθε ομάδας συναρτήσει του χρόνου για την περίπτωση για την οποία ο N_3 είναι σταθερός πυρήνας. Οι διαφορικές εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν το φαινόμενο είναι:

$$\text{Διάσπαση } N_1 \quad \frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 \quad (3.6)$$

$$\text{Διάσπαση και αύξηση } N_2 \quad \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \quad (3.7)$$

$$\text{Αύξηση } N_3 \quad \frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 \quad (3.8)$$

Η λύση της δ.ε. (3.6) είναι

$$N_1 = N_1^0 e^{-\lambda_1 t} \quad (3.9)$$

Γότε η (3.7) γράφεται ως εξής:

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1^0 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 N_2$$

ή

$$\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_1^0 e^{-\lambda_1 t}$$

ή

$$\frac{d}{dt} (N_2 e^{\lambda_2 t}) = \lambda_1 N_1^0 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$

άρα

$$e^{\lambda_2 t} N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1^0 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + C \quad (3.10)$$

Η σταθερά ολοκλήρωσης C υπολογίζεται ως εξής:

Αν για $t = 0$, $N_2 = 0$ τότε $C = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1^0$ και η (3.10) γίνεται:

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1^0 (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \quad (3.11)$$

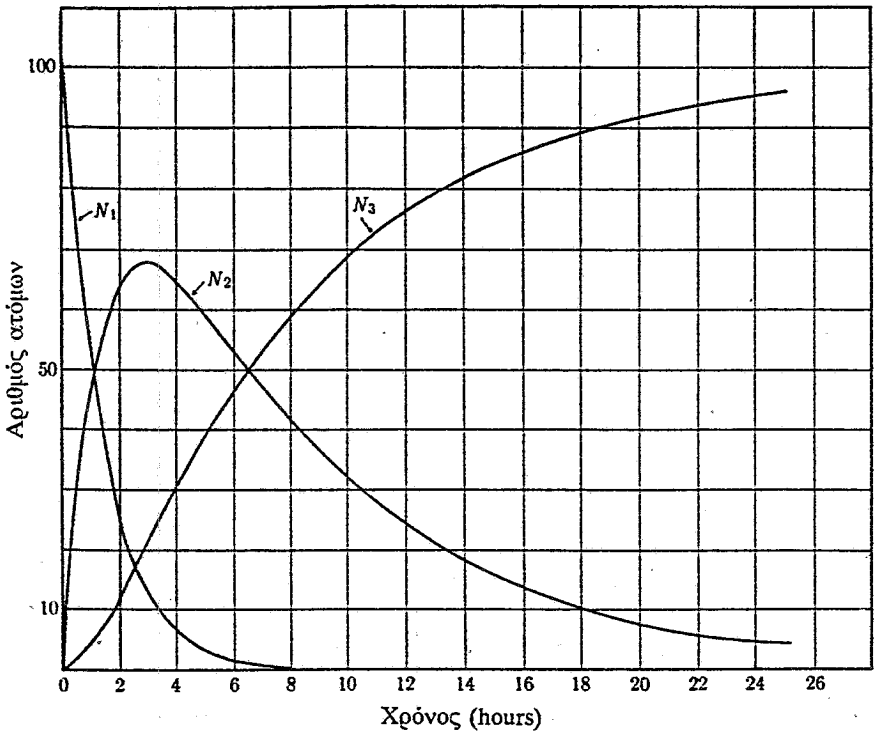
Κατόπιν με ολοκλήρωση της (3.8) ευρίσκουμε

$$N_3 = N_1^0 \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \right) \quad (3.12)$$

Ο αριθμός των πυρήνων N_1, N_2, N_3 συναρτήσει του χρόνου, δίνεται για την περίπτωση:

$$\frac{T_2}{T_1} = 5$$

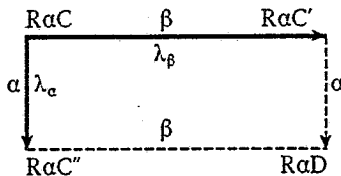
στο σχήμα 3.2.



Σχήμα 3.2.

3.2.1 Διακλάδωση (Branching)

Πυρήνες πολλές φορές διασπώνται κατά δύο διαφορετικούς τρόπους, όπως π.χ. το RaC με ακτινοβολία β μετατρέπεται σε RaC' ενώ με ακτινοβολία α σε RaC'' . Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται διακλάδωση (branching) και φαίνεται παραστατικά στο σχήμα 3.3.



Σχήμα 3.3.

Αν ονομάσουμε λ_{α} και λ_{β} τις αντίστοιχες σταθερές διασπάσεως

$$\lambda = \lambda_{\alpha} + \lambda_{\beta}$$

3 Δοσιμετρία και μονάδες ραδιενέργειας

Η ένταση της ραδιενέργειας μετρείται συνήθως από τον αριθμό των πυρηνικών διασπάσεων στη μονάδα του χρόνου ή από το αριθμό των ωματίων τα οποία εκπέμπονται στην μονάδα του χρόνου και τα οποία ετριοούνται από έναν απαριθμητή.

Ο μέσος αριθμός διασπάσεων που προέρχεται από 1 gr Ra είναι $3,7 \times 10^{10}$ διασπ/sec και ονομάζεται δράση 1 Curie (1 Ci). Άλλη μονάδα δράσεως είναι το Rutherford (rd), το οποίο είναι ίσο με 10^6 διασπ/sec. Ήπειδή φυσιολογικά και φυσικά έχει σημασία όχι ο αριθμός των διασπάσεων αλλά η ενέργεια η οποία εκλύεται και ο αριθμός των παραγομένων όντων, ωρίσθηκε σαν ποσότητα ακτινοβολίας, το Roentgen (R) το οποίο αντιστοιχεί στην ακτινοβολία η οποία κατά την διαδρομή της μέσα από μάζα 0,001293 gr αέρα παράγει 1 esu και από τα δύο φορτία. Αυτή η μάζα αέρα αντιστοιχεί σε 1 cc ξηρού αέρα σε θερμοκρασία 0°C, και πίεση 1 atm.

Από την γνωστή μέση ενέργεια ιονισμού του αέρα, η οποία είναι περίπου ίση με 32,5 eV έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} 1R &= \frac{32,5 \times 1,60 \times 10^{-12}}{4,8 \cdot 10^{-12}} \\ &= 0,0108 \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \text{αέρος}} = 6,77 \times 10^4 \frac{\text{MeV}}{\text{cm}^3 \text{αέρος}} \end{aligned}$$

Σαν μονάδα ακτινοβολίας παίρνουμε το Roentgen ανά ώρα και σε απόσταση 1 mm από την πηγή (Rhm).

Για την μέτρηση της ακτινοβολίας χρησιμοποιούνται μικροί θάλαμοι ιονισμού και όπως είναι ευνόητο η σύσταση και το πάχος του τοιχώματος του θαλάμου έχει μεγάλη επίδραση στα αποτελέσματα των μετρήσεων γι' αυτό χρησιμοποιούνται και ειδικοί θάλαμοι για κάθε είδος μετρήσεως.

Εκτός από αυτήν την μονάδα ακτινοβολίας (R) χρησιμοποιείται και το Rad, το οποίο αντιστοιχεί σε έκλυση 100 erg/gr σε σάρκα.

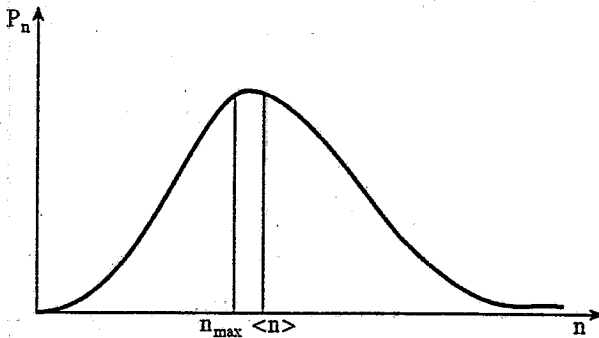
Τα διάφορα όργανα ή μέλη του ανθρωπίνου σώματος έχουν διάφορη ευαισθησία στις επιδράσεις της ακτινοβολίας. Γι' αυτόν τον λόγο ωρίσθηκαν φυσιολογικές μονάδες μετρήσεως ακτινοβολίας όπως το Rep (Roentgen equivalent physical).

Το κεφάλαιο των μεθόδων και μονάδων μετρήσεως της ραδιενέργειας έχει μεγάλη σημασία, αλλά περισσότερες λεπτομέρειες γι' αυτό δεν μπορούν να παρουσιασθούν στα πλαίσια αυτών των Πανεπιστημιακών παραδόσεων.

3.4 Διακυμάνσεις ραδιενεργών μετατροπών

Τα πειραματικά αποτελέσματα κατά την μελέτη ενός φαινομένου υπόκεινται σε στατιστικές διακυμάνσεις, δηλ. μετρήσεις του ίδιου φαινομένου επαναλαμβανόμενες υπό τις ίδιες ακριβώς συνθήκες ελέγχου δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα.

Σε φαινόμενα μικρής συχνότητας η πιθανότητα P ότι μία μέτρηση θα δώσει αποτέλεσμα τον αριθμό n μετρο. sec^{-1} δίνεται από την ακόλουθη "κατανομή Poisson" (βλέπε σχήμα 3.4).



Σχήμα 3.4.

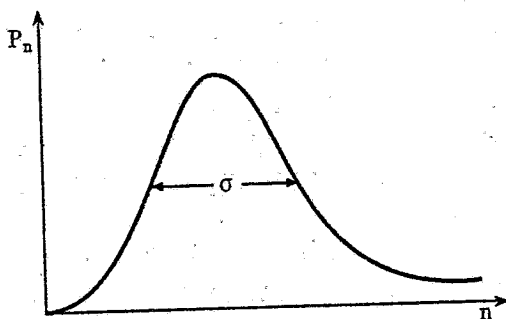
$$P_n = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle}$$

και είναι

$$\langle n \rangle = \frac{1}{N} \sum_i n_i$$

όπου $\langle n \rangle$ η μέση τιμή. Το μέγιστο της συναρτήσεως, n_{\max} αντιστοιχεί σε τιμή με τετμημένη $\langle n \rangle = \frac{1}{2}$.

$$P_n = \frac{\exp\left(-\frac{(n - \langle n \rangle)^2}{2 \langle n \rangle}\right)}{[2\pi \langle n \rangle]^{1/2}}$$



Σχήμα 3.5.

Μέτρο της διασποράς μιας καμπύλης κατανομής είναι η ονομαζόμενη "σταθερή απόκλιση" (Standard deviation) σ , η οποία γενικά δίνεται από τον τύπο

$$\sigma_{(n)}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (n_i - \langle n \rangle)^2$$

Το σφάλμα $\sigma_{\langle n \rangle}$ της μέσης τιμής n ορίζεται ως:

$$\sigma_{\langle n \rangle}^2 = \sigma_{(n)}^2 / N$$

δηλ. το σφάλμα της μέσης τιμής είναι το $1/\sqrt{N}$ της "σταθεράς αποκλίσεως" της καμπύλης κατανομής P_n οπότε η ακρίβεια της μέσης τιμής αυξάνει όταν αυξάνεται ο αριθμός των μετρήσεων τις οποίες παίρνουμε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

Ο ΠΥΡΗΝΑΣ

4.1 Γενικά

Η εύρεση των ιδιοτήτων του πυρήνα συνίσταται στην μελέτη των φυσικών ιδιοτήτων του. Δηλ. του φορτίου, της μάζας, της ακτίνας, του Spin, της μαγνητικής ροπής, των ραδιενεργών μεταβολών του κ.λ.π.

Μερικά από τα αναφερθέντα φυσικά μεγέθη όπως η μάζα και το φορτίο έχουν μετρηθεί από πολύ καιρό και με μεγάλη ακρίβεια. Άλλα φυσικά μεγέθη απαιτούν ιδιαίτερο χειρισμό αφού το αποτέλεσμα των μετρήσεων μπορεί να είναι συνάρτηση της μεθόδου μετρήσεως, όπως π.χ. η ακτίνα του πυρήνα. Όταν η ακτίνα μετρηθεί με τον σκεδασμό ηλεκτρονίων από τον πυρήνα, μας δίνει τις ηλεκτρομαγνητικές διαστάσεις του πυρήνα, ενώ εάν χρησιμοποιηθεί δέσμη νετρονίων παίρνουμε τις πυρηνικές διαστάσεις του.

Η ερμηνεία των πειραματικών αποτελεσμάτων χρησιμοποιείται για την ανεύρεση του θεωρητικού σχήματος των πυρηνικών δυνάμεων. Για το άτομο το υπόδειγμα του Rutherford ήταν βασικά ακριβές και έδωσε μία εξαιρετική ιδέα της μορφής του, διευκόλυνε δε πάρα πολύ την λύση του προβλήματος. Δυστυχώς μέχρι στιγμής δεν υπάρχει ανάλογο υπόδειγμα για τους πυρήνες και έτσι λείπουν οι ενδείξεις για μια ακριβή, θεωρητική λύση του προβλήματος.

Γι' αυτό μετρούμε και καταγράφουμε όλες τις φυσικές ιδιότητες των πυρήνων και προσπαθούμε να τελειοποιήσουμε τα υπάρχοντα θεωρητικά υποδείγματα των πυρήνων και να ανακαλύψουμε καινούργια και συνεχώς παραβάλλουμε τις προβλέψεις των με τα πειραματικά δεδομένα.

Φυσικές Ιδιότητες του Πυρήνα

4.2 Φορτίο

Όπως είναι γνωστό το φορτίο του πυρήνα προέρχεται από τα πρωτόνια που είναι μέσα του και είναι ισό με Ze , όπου Z ακεραίος αριθμός (ατομικός αριθμός) και e το φορτίο του ηλεκτρονίου με τιμή

$$|e| = [4,8032068(15)] \times 10^{-10} \text{ e.s.u} = [1.60217733(49)] \times 10^{-19} \text{ C}$$

Τα άτομα είναι εντελώς ουδέτερα γιατί το φορτίο των πρωτονίων ουδετερώνεται από ισάριθμα ηλεκτρόνια.

Ευρέθηκε πειραματικά ότι το ολικό φορτίο του ατόμου είναι κρότερο από 10^{-18} e καθώς και ότι το φορτίο του νετρονίου είναι $= (-0.4 \pm 1.1) \times 10^{-21}$ e.

Ένα άλλο πειραματικό δεδομένο είναι η ισότητα, κατ' απόλυτο μή, μεταξύ των φορτίων q_p του πρωτονίου και q_e του ηλεκτρονίου. υρέθηκε ότι $|q_p + q_e| \leq 1.0 \cdot 10^{-21}$ e. Με αυτό αποδεικνύεται ότι μία από τις βασικότερες κβαντισμένες ποσότητες στην φύση είναι το φορτίο (e).

Μερικές νέες θεωρίες προβλέπουν ότι τα στοιχειώδη σωματίδια αποτελούνται από δομικά στοιχεία, τα οποία καλούνται κουόρκς και έχουν φορτίο ίσο με $1/3$ e και $2/3$ e. Παρά τις συστηματικές προσπάθειες όμως νευρέσεως του κουόρκς αυτά δεν έχουν εντοπισθεί σε ελεύθερη ατάσταση. Οι ιδιότητες των στοιχειωδών σωματίων τις οποίες ανακαλύτομε αυξάνονται ολοένα και περισσότερο, το φάσμα των μαζών και αυτό πεκτείνεται οπότε και οι θεωρίες γίνονται πολυπλοκώτερες. Έτσι ότι τοιχεία δώσει κανείς ποτέ δεν είναι πλήρη γιατί νέες θεωρίες προδικάουν την ύπαρξη και άλλων σωματίων, με επιπλέον κβαντικούς αριθμούς.

3 Μάζα

Για την μέτρηση της μάζας του πυρήνα χρησιμοποιούνται βασικά δύο μέθοδοι:

- άμεσοι μέθοδοι δηλ. με χρήση φασματογράφων ή φασματοσκοπικών μάζας, και
- έμμεσοι μέθοδοι, δηλαδή υπολογισμός της μάζας από την κλυομένη ενέργεια σε διάφορες αντιδράσεις.

Πάρα κάτω παρουσιάζουμε μερικές από τις μεθόδους περιληπτικά.

1.3.1 Φασματογράφος Μάζας

Ένα όργανο, από τα πρώτα τα οποία εχρησιμοποιήθησαν, είναι ο φασματογράφος μάζας ο οποίος βασίζεται στην επίδραση μαγνητικού και ηλεκτρικού πεδίου στα ιόντα. Από αυτήν την επίδραση μετριέται ο λόγος q/m όπου q και m το φορτίο και η μάζα του εξεταζομένου ιόντος αντίστοιχα.

Στον φασματογράφο μάζας του Thomson τα δύο πεδία, ηλεκτρικό E και μαγνητικό B είναι μεταξύ των παράλληλα. Όταν ένα ιόν με ταχύτητα v εισέρχεται μέσα σ' αυτά τα πεδία υφίσταται τις επιταχύνσεις από το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα.

Όπως είναι γνωστό:

$$\alpha_E = \frac{F}{m} = \frac{Ze}{m} E \quad (\acute{\alpha}\xi\omicron\nu\alpha\varsigma \ \tau\omega\nu \ y) \quad (4.1)$$

και

$$\alpha_B = \frac{F}{m} = \frac{Ze}{mc} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (\acute{\alpha}\xi\omicron\nu\alpha\varsigma \ \tau\omega\nu \ z) \quad (4.2)$$

Εάν το μήκος των πλακών ηλεκτροστατικής αποκλίσεως είναι l αποδεικνύεται ότι η απόκλιση λόγω ηλεκτρικού πεδίου είναι:

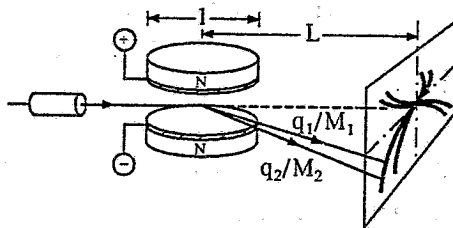
$$y_E = \frac{1}{2} \frac{Ze}{m} E t^2 = \frac{1}{2} \frac{Ze}{m} E \left(\frac{l}{v} \right)^2 \quad (4.3)$$

Η απόκλιση λόγω μαγν. πεδίου είναι:

$$z_B = \frac{1}{2} \frac{Ze}{mc} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \left(\frac{l}{v} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{Ze}{mc} v B \left(\frac{l}{v} \right)^2$$

Από τις (4.3) και (4.4) προκύπτει ότι μεταξύ των αποκλίσεων y και z ισχύει η σχέση:

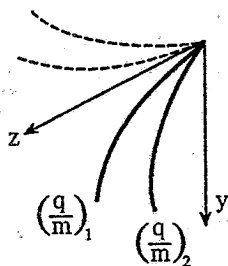
$$y_E = \frac{2Ec^2}{l^2 B^2} \frac{m}{Ze} z_B^2 \quad (4.5)$$



Σχήμα 4.1.

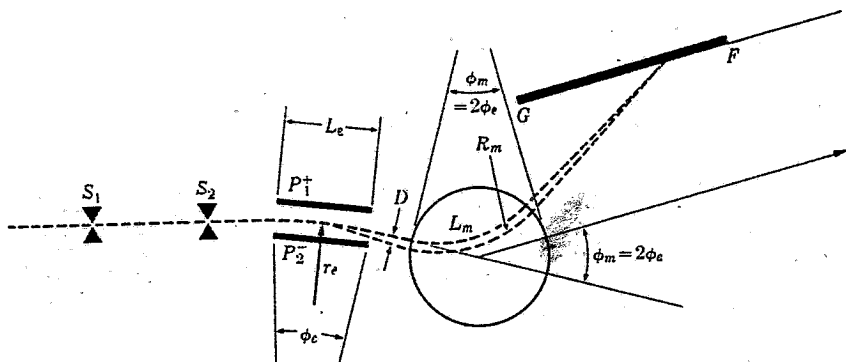
Η σχέση (4.5) είναι εξίσωση παραβολής κάθε σημείο της οποίας αντιστοιχεί σε διαφορετική αρχική ταχύτητα των ιόντων.

Όπως είναι γνωστό η μάζα είναι κβαντισμένο φυσικό μέγεθος. Γι' αυτό εάν δοθούν σωμάτια με διάφορες μάζες παίρνουμε στην οθόνη του φασματογράφου διάκριτες παραβολές (σχήμα 4.2). Εάν ο αριθμός των σωματιών, τα οποία ανήκουν σε μία παραβολή, είναι μικρός, τότε αυτή είναι πολύ ασθενής και συνεπώς η ανίχνευσή της δύσκολη. Για να ποφευχθεί η δυσκολία αυτή ο Aston επρότεινε τον ομώνυμο φασματογράφο.



Σχήμα 4.2.

Σε αυτόν το ηλεκτρικό πεδίο E είναι κάθετο στο μαγνητικό B . Η διαδοχή των δύο πεδίων και η θέση των είναι τέτοια, ώστε στην φωτογραφική πλάκα του φασματογράφου (σχήμα 4.3) να εστιάζονται σωμάτια με τον ίδιο λόγο q/m αλλά με διάφορες ταχύτητες (δράση ανάλογη φακού).



Σχήμα 4.3.

Το ποσοστό των σωματιών με τον ίδιο λόγο q/m εξαρτάται από

φωτογραφικής πλάκας (μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και απαριθμητή ιόντων με σύστημα αυτόματης αναγραφής).

4.3.2 Έμμεσοι μέθοδοι και αποτελέσματα

Η αρχή των έμμεσων μεθόδων μετρήσεως της μάζας πυρήνων βασίζεται στη μελέτη αντιδράσεων της μορφής



όπου το βλήμα a με κινητική ενέργεια T_a πίπτει στον (συνήθως ακίνητο με $T_A = 0$) στόχο A . Τα προϊόντα της αντιδράσεως b και B έχουν αντίστοιχα κινητικές ενέργειες T_b και T_B . Η Q της αντιδράσεως ορίζεται σαν

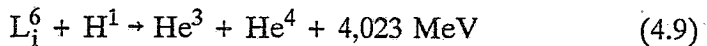
$$Q = T_B + T_b - T_a \quad (4.7)$$

και εάν λάβουμε υπ' όψιν την ενεργειακή εξίσωση η Q είναι ίση με

$$Q = [(m_a + m_A) - (m_b + m_B)] c^2 \quad (4.8)$$

μπορεί δε να λάβει θετικές ή αρνητικές τιμές οπότε λέμε για εξώθερμες ή ενδόθερμες αντιδράσεις αντίστοιχα. Στην τελευταία περίπτωση η ελάχιστη ενέργεια στο σύστημα εργαστηρίου που χρειάζεται να έχει το βλήμα a ώστε να μπορέσουν να παραχθούν τα σωματίδια b και B λέγεται "ενέργεια κατωφλίου".

Μια τέτοια αντίδραση είναι η κάτωθι



Από τις γνωστές μάζες των τριών από τους συμμετέχοντες πυρήνες και της ενέργειας Q ευρίσκεται η μάζα του τετάρτου πυρήνα.

Μερικά χρήσιμα αποτελέσματα από τους αναφερθέντες τρόπους συνοψίζονται στον πίνακα 4.1.

Πίνακας 4.1.

ΣΤΑΘΕΡΟΙ ΠΥΡΗΝΕΣ		
Z \ A	Άρτιος	Περιττός
Άρτιος	162	4
Περιττός	55	53

- Από τον πίνακα αυτόν προκύπτουν οι ακόλουθες παρατηρήσεις:
- 1) Πυρήνες με περιττό Z και άρτιο A είναι ασταθείς εκτός από τέσσερις πυρήνες, H^2 , L_i^6 , B^{10} , N^{14} .
 - 2) Οι περισσότεροι πυρήνες έχουν Z και A άρτιο
 - 3) Πυρήνες με A περιττό είναι λίγοι.

4.3.3 Ενέργεια Συνδέσεως και Κλάσμα Συνδέσεως

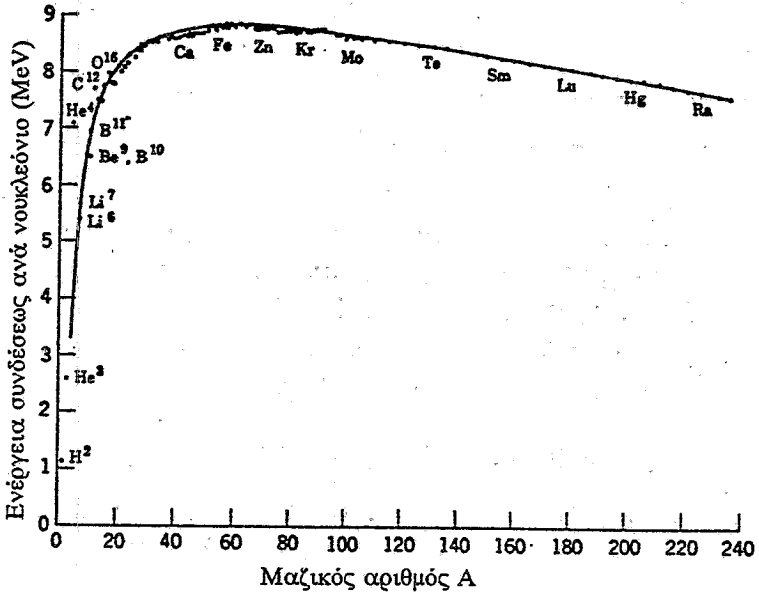
Δύο άλλες ενδιαφέρουσες ποσότητες είναι η "ενέργεια συνδέσεως" και το "κλάσμα συνδέσεως". Το τελευταίο συμβολίζεται με f και ορίζεται σαν

$$f = \frac{M-A}{A} \quad (4.10)$$

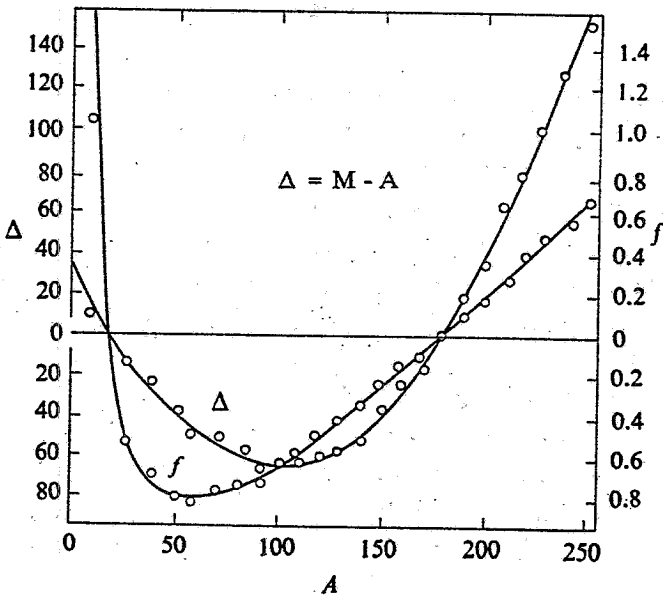
Στο σχήμα 4.4 παρατηρούμε ότι η ενέργεια συνδέσεως ακολουθεί γενικά μία καμπύλη εκτός από δύο σημεία στα οποία παρουσιάζονται απότομες μεταβολές, δηλ. στα σημεία με τετμημένη $A = 4$ (He) και $A = 16$ (O_2). Συγκεκριμένα, η ενέργεια συνδέσεως ανά νουκλεόνιο των He και O_2 είναι πολύ μεγαλύτερη από εκείνη των πλησίων πυρήνων και οι αντίστοιχοι πυρήνες είναι πολύ σταθερότεροι. Οι σταθερότεροι πυρήνες είναι το μέσο του περιοδικού συστήματος όπου η ενέργεια συνδέσεως ανά νουκλεόνιο παρουσιάζει μέγιστο (Maximum) και το κλάσμα συνδέσεως παρουσιάζει ελάχιστο (minimum). Η ερμηνεία της μικρότερης ενέργειας συνδέσεως ανά νουκλεόνιο στους πυρήνες με μικρούς και μεγάλους μαζικούς αριθμούς δίνεται πάρα κάτω.

Στην καμπύλη του σχήματος 4.5 το πρώτο σημείο με τετμημένη μηδέν πρέκυψε από το γεγονός ότι σαν μονάδα των M επήραμε το

$\frac{1}{12}C^{12}$. Εξ άλλου παρατηρούμε ότι για πυρήνες με μικρό A το f μεταβάλλεται απότομα.



Σχήμα 4.4.



1.4 Ημιεμπειρικός Τύπος Μάζας του Weizsaker

Αυτός είναι γνωστός και σαν υπόδειγμα υγρής σταγόνας (liquid drop model).

Αυτό είναι υπόδειγμα αρκετά απλό, ασχολείται μόνο με την μάζα αλλά προσεφέρθηκε για την λύση πολλών προβλημάτων της Πυρηνικής Φυσικής. Στο υπόδειγμα αυτό ο πυρήνας θεωρείται σαν σύστημα νουκλεονίων, τα οποία συνδέονται με ισχυρές δυνάμεις μικρής εμβέλειας, όπως ακριβώς τα μόρια υγρού συνδέονται μεταξύ τους στον σχηματισμό υγρής σταγόνας με τις δυνάμεις Van de Wall. Με αυτόν τον τρόπο θεωρείται ότι κάθε νουκλεόνιο με τις πυρηνικές του δυνάμεις επιδρά μόνο στα γειτονικά του νουκλεόνια. Λόγω των δυνάμεων αυτών τα εξωτερικά νουκλεόνια έλκονται μονόπλευρα και ο πυρήνας παρουσιάζει έτσι μία 'επιφανειακή ενέργεια' ανάλογη με εκείνη η οποία εμφανίζεται σε μία υγρή σταγόνα.

Υποτίθεται επίσης (όπως περίπου συμβαίνει πράγματι) ότι η ενέργεια συνδέσεως ανά νουκλεόνιο είναι σταθερή και ότι η πυκνότητα του πυρήνα είναι ανεξάρτητη από τον όγκο του. Έτσι η μάζα του πυρήνα παρουσιάζεται σαν άθροισμα όρων κάθε ένα από τους οποίους είναι συνάρτηση των A , Z και q , δηλ. μαζικού αριθμού, ατομικού αριθμού, φορτίου κλπ αντίστοιχα.

$$M = \sum M_i = \sum a_i F(A, Z, q, \dots) \quad (4.11)$$

όπου a_i είναι συντελεστές οι οποίοι πρέπει να προσδιοριστούν από τις γνωστές τιμές των μαζών.

Οι δύο πρώτοι όροι του αθροίσματος (4.11) προέρχονται από το άθροισμα των μαζών m_p των πρωτονίων και m_n των νετρονίων, δηλ.:

$$(A-Z)m_n + zm_p$$

Έπειτα προστίθεται ο όρος της συνολικής ενέργειας συνδέσεως, ο οποίος είναι αρνητικός δηλ.:

$$M_1 = -a_1 A$$

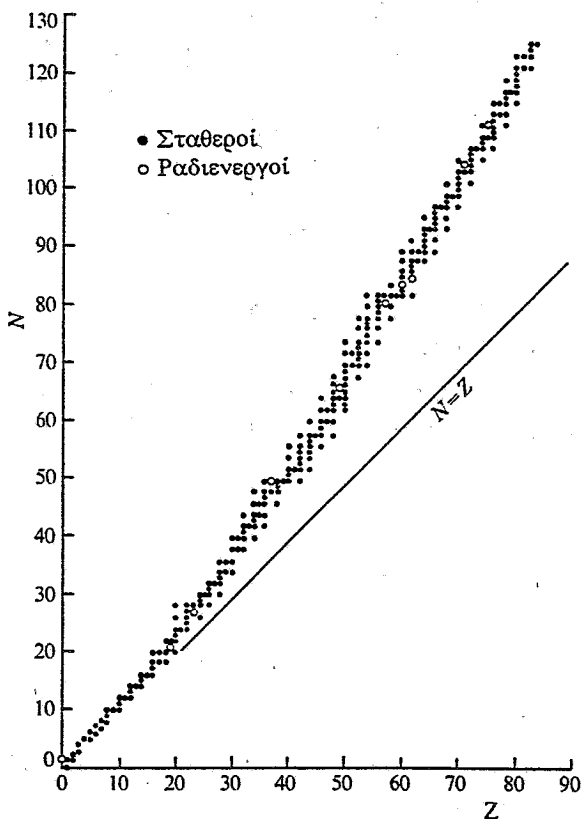
όπου a_1 η ενέργεια συνδέσεως ανά νουκλεόνιο. Η επιφανειακή ενέργεια θα είναι ανάλογη με τον αριθμό των νουκλεονίων στην επιφάνεια του πυρήνα η οποία είναι ανάλογη της ακτίνας του πυρήνα R . δηλ.

$$\propto R^2 = (r_0 A^{\frac{1}{3}})^2$$

Δηλ. αυτός ο όρος θα είναι

$$M_2 = a_2 A^{\frac{2}{3}} \quad a_2 > 0 \quad (4.13)$$

Ο επόμενος όρος οφείλεται στην σταθερότητα ή μη των πυρήνων, η οποία σχετίζεται με την αναλογία πρωτονίων-νετρονίων στον πυρήνα. Αν χαραχθεί το διάγραμμα του αριθμού των νετρονίων $N = (A-Z)$ συναρτήσει του ατομικού αριθμού Z των πυρήνων παρατηρείται (σχήμα 4.6) ότι οι περισσότεροι, σταθεροί πυρήνες κείνται πλησίον μιας καμπύλης, της "καμπύλης ευσταθείας".



Για μικρές τιμές του Z η καμπύλη αυτή προσεγγίζει την ευθεία $Z=N$. Για μεγάλες τιμές του Z παρατηρείται ότι το πιο σταθερό ή το ισοβαρές με την μικρότερη ενέργεια είναι αυτό για το οποίο $Z < N$. Αυτή όμως η απόκλιση από την συμμετρία οφείλεται στην ύπαρξη ισχυρών δυνάμεων Coulomb στους βαρύν πυρήνες. Το φαινόμενο συμμετρίας ερμηνεύεται με την βοήθεια κβαντικών φαινομένων υπολογίζοντας την μέση κινητική ενέργεια των νουκλεονίων μέσα στον πυρήνα.

Υποθέτουμε ότι ο πυρήνας είναι όπως ένα ιδανικό αέριο και αποτελείται από Z πρωτόνια και $N = (A-Z)$ νετρόνια, τα οποία ως Φερμιόνια υπακούουν στην απαγορευτική αρχή του Pauli. Τα νουκλεόνια κινούνται λοιπόν σε όγκο V (με ακτίνα R) όπως θα έκανε ένα αέριο Fermi. Ο αριθμός των καταστάσεων εκάστου νουκλεονίου με ορμή μεταξύ p και $p + dp$ σε όγκο V είναι $2V 4\pi p^2 dp / (2\pi\hbar)^3$. Ο παράγοντας 2 προέρχεται από την ύπαρξη του spin του νουκλεονίου που μπορεί να ευρίσκεται σε δύο καταστάσεις.

Η θεμελιακή κατάσταση του αερίου αντιστοιχεί σε μηδενική "θερμοκρασία" και η κατανομή των θερμοκρασιών είναι από $p = 0$ έως την μέγιστη τιμή της ορμής του Fermi P_F . Ο αριθμός των πρωτονίων θα είναι τότε

$$Z = \int_0^{P_{Fp}} \frac{2V4\pi}{(2\pi\hbar)^3} p^2 dp = \frac{8\pi V}{h^3} \frac{(P_{Fp})^3}{3} \quad (4.13)$$

από αυτήν βρίσκουμε ότι η ορμή Fermi για τα πρωτόνια θα είναι

$$P_{Fp} = h \left(\frac{3}{8\pi} \frac{2}{V} \right)^{\frac{1}{3}} = h \left(\frac{3}{8\pi} \rho_p \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.14)$$

όπου ρ_p είναι η πυκνότητα των πρωτονίων. Η ίδια σχέση θα ισχύει και για τα νετρόνια, δηλ.

$$P_{Fn} = h \left(\frac{3}{8\pi} \rho_n \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.15)$$

Για τα δύο νουκλεόνια έχουμε

$$\rho_A = \frac{A}{V} = \frac{N + Z}{V} \quad \text{και}$$

$$P_{FA} = h \left(\frac{3}{16\pi} \rho_A \right)^{\frac{1}{3}}$$

Η κινητική ενέργεια για τα πρωτόνια θα είναι (γράφουμε P_F αντί του P_{FP})

$$\begin{aligned} (KE)_p &= \int_0^{P_F} \left(2V \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} \frac{p^2}{2M} \right) = \frac{8\pi V}{2mh^3} \frac{P_F^5}{5} \\ &= \frac{4\pi V}{5mh^3} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{\frac{5}{3}} \frac{h^5}{V^{\frac{5}{3}}} Z^{\frac{5}{3}} = \frac{4\pi}{5M} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{\frac{5}{3}} \frac{h^2}{V^{\frac{5}{3}}} Z^{\frac{5}{3}} \end{aligned} \quad (4.16)$$

και η ίδια σχέση θα ισχύει για τα νετρόνια όταν αντικαταστήσουμε την μάζα M του πρωτονίου με την αντίστοιχη του νετρονίου (η οποία έτσι και αλλιώς είναι σχεδόν ίδια) και τον αριθμό Z των πρωτονίων με τον αριθμό N των νετρονίων, η ολική κινητική ενέργεια θα είναι

$$KE = \frac{4\pi}{5M} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{\frac{5}{3}} \frac{h^2}{V^{\frac{5}{3}}} \left(Z^{\frac{5}{3}} + N^{\frac{5}{3}} \right) = \alpha_{KE} \frac{(Z^{\frac{5}{3}} + N^{\frac{5}{3}})}{V^{\frac{5}{3}}} \quad (4.17)$$

Εάν ορίσουμε $T = (N-Z)/2$ τότε $Z = \frac{A}{2} + T$ και $N = \frac{A}{2} - T$ επίσης εάν λάβουμε υπ' όψη ότι $V \propto R^3$ και $R = r_0 A^{1/3}$ τότε μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση (4.17).

$$KE = \alpha_{KE} \frac{A^{5/3}}{A^{2/3}} \left[\left(1 - \frac{2T}{A} \right)^{\frac{5}{3}} + \left(1 + \frac{2T}{A} \right)^{\frac{5}{3}} \right] \quad (4.18)$$

και εφόσον $T \ll A$ μπορούμε να αναπτύξουμε την (4.18) και να αγνοήσουμε όρους μεγαλύτερους του τετραγώνου και έχουμε

$$KE \propto 2 \frac{A}{2^{5/3}} \left[1 + \frac{20}{9} \frac{T^2}{A^2} \right]$$

$$\langle KE \rangle = bA + C_2 \frac{T^2}{A} \quad (4.19)$$

που αναλυτικά το

$$b = \frac{8\pi}{5M} \left(\frac{3}{16\pi} \right)^{\frac{5}{3}} h^2 \left(\frac{4}{3} \pi r_0^3 \right)^{\frac{2}{3}}$$

και

$$C_2 = \frac{20}{9} \frac{8\pi}{5} \left(\frac{3}{16\pi} \right)^{\frac{5}{3}} h^2 \left(\frac{4}{3} \pi r_0^3 \right)^{\frac{2}{3}}$$

Ο όρος της $\langle KE \rangle$ που είναι ανάλογος του A συγχωνεύεται στην (4.12) και θα έχουμε στην εξίσωση (4.11) ένα όρο

$$M_3 = \alpha_3 (A - 2Z)^2/A \quad (4.20)$$

ο οποίος περιγράφει χονδρικά το φαινόμενο συμμετρίας.

Χρειάζεται επί πλέον ένας όρος στο άθροισμα (4.11) ο οποίος οφείλεται στην ενέργεια του πυρήνα λόγω του πεδίου Coulomb μεταξύ των πρωτονίων.

Αποδुकνείσαι εύκολα ότι όταν έχουμε Z πρωτόνια ομοιογενώς καταναμημένα μέσα σε σφαίρα ακτίνας $R = r_0 A^{1/3}$ η ηλεκτροστατική ενέργεια είναι

$$E_{\text{Coulomb}} = \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)e^2}{R} = \text{σταθ. } Z^2 A^{-\frac{1}{3}}$$

οπότε ο τέταρτος όρος για την μάζα θα είναι

$$M_4 = \alpha_4 Z^2 A^{-1/3} \quad (4.21)$$

Για να χρησιμοποιήσουμε έναν τέτοιο εμπειρικό τύπο μάζης πρέπει να λάβουμε υπ' όψη και τα αποτελέσματα τα οποία αναφέραμε στην § 4.3.2 και παρουσιάσαμε στον πίνακα 4.1. Π.χ. για N και Z άρτιο έχουμε 162 σταθερούς πυρήνες ενώ για N περιττό και Z περιττό έχουμε μόνο 4. Για να εξηγήσουμε αυτήν την κατανομή των σταθερών πυρήνων πρέπει να υποθέσουμε την ύπαρξη μιας ενέργειας λόγω παρουσίας ζευγών (pairing energy) και χρησιμοποιούμε στον τύπο της μάζας έναν

όρο $\delta(N,Z)$ ο οποίος (έχει μικρή τιμή) και εξαρτάται από το εάν τα N και Z είναι άρτια (α) ή περιττά (π).

Τελικά έχουμε τον τύπο του Weizsäcker ο οποίος δίνει τις μάζες των πυρήνων.

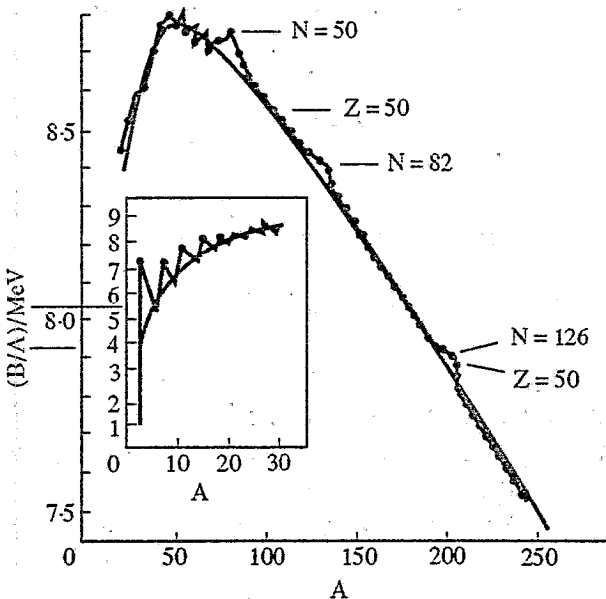
$$M = (A-Z)m_n + Zm_p - \alpha_1 A + \alpha_2 A^{2/3} + \alpha_3 (A-2Z)^2 A^{-1} + \alpha_4 Z^2 A^{1/3} + \delta(N,Z) \quad (4.22)$$

Από τα δεδομένα όλων των γνωστών πυρήνων μπορούμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Ένας τέτοιος προσδιορισμός έδωσε τις παρακάτω τιμές σε MeV

$$\alpha_1 = 15.6, \quad \alpha_2 = 17.2, \quad \alpha_3 = 23.3, \quad \alpha_4 = 0.7 \quad \text{και}$$

$$\delta(\alpha, \alpha) = -33 \frac{1}{2} A^{-3/3}, \quad \delta(\alpha, \pi) = \delta(\pi, \alpha) = 0 \quad \text{και}$$

$$\delta(\pi, \pi) = +33 \frac{1}{2} A^{-3/4}$$



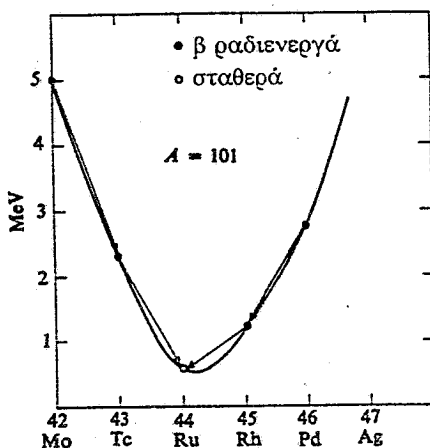
Η προσαρμογή της υπολογισθείσας καμπύλης στα πειραματικά δεδομένα παρουσιάζεται στο σχήμα 4.7. Για λόγους ευκολίας παρουσιάζει η ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο (B/A) σε MeV συναρτήσει του ατομικού αριθμού.

5. Ισοβαρείς Μεταπτώσεις

Όπως φαίνεται από τον τύπο (4.22) μπορούν να λάβουν χώρα δύο κατηγορίες μεταπτώσεων.

α) Για A περιττό:

Αν ληφθούν οι ισοβαρείς πυρήνες με το ίδιο περιττό A , έστω $A = 11$, τότε $\delta(N,Z) = 0$, και η μάζα των πυρήνων αυτών θα δίνεται από ευτεροβάθμιο συνάρτηση του Z . Δηλαδή σε διάγραμμα $M-Z$ οι ισοβαρείς πυρήνες θα κείνται σε μία παραβολή όπως στο σχήμα 4.8.



Σχήμα 4.8.

Στο σχήμα 4.8 παρατηρούμε ότι ο σταθερότερος από τους πυρήνες του παραδειγματός μας είναι ο Ru, ο οποίος έχει την μικρότερη μάζα, για και την μεγαλύτερη ευστάθεια. Εξ άλλου βλέπουμε ότι πυρήνας με $A = 101$ μπορεί να μεταπέσει σε άλλον του ίδιου A , αλλά μεγαλύτερου Z κατά μία μονάδα, με εκπομπή σωματίου β^- ή σε άλλον ατομικού αριθμού $Z-1$ με εκπομπή σωματίου β^+ . Με τέτοιες μεταπτώσεις καταλήγουμε πάντοτε στο Ru.

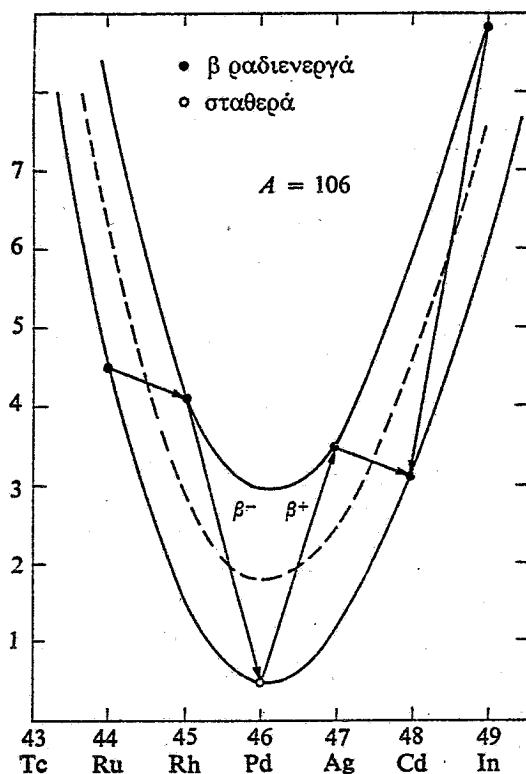
Η πιθανότητα μεταπτώσεως κατά 2 ατομικούς αριθμούς είναι πολύ μικρή.

Αν π.χ. ο $A = 106$ έχουμε

$$\delta = -33 \frac{1}{2} (106)^{-\frac{3}{4}} \quad \text{ή} \quad \delta = +33 \frac{1}{2} (106)^{-\frac{3}{4}}$$

εάν ο Z είναι άρτιος ή περιττός αντίστοιχα.

Στο διάγραμμα $M-Z$ οι ισοβαρείς πυρήνες θα κείνται πάνω σε δύο παραβολές (σχήμα 4.13), οι οποίες απέχουν κατά $|\delta| = 33 \frac{1}{2} (106)^{-\frac{3}{4}}$ από την παραβολή με $\delta = 0$ η οποία παρουσιάζεται στο σχήμα 4.9 με διακεκομμένη γραμμή.



Σχήμα 4.9.

Και εδώ η πιθανότητα μεταβολής του Z κατά 2 μονάδες, με μετάπτωση είναι πολύ μικρή. Επίσης μετάπτωση πυρήνα μιας παραβολής

ε άλλον της ίδιας παραβολής είναι μικρής πιθανότητας, γιατί τότε θα είχαμε μεταβολή του ατομικού αριθμού κατά 2 μονάδες.

Με το υπόδειγμα υγρής σταγόνας έχουν λυθεί πολλά προβλήματα υπολογισμός μάζας πυρήνων, μελέτη σχάσεως κ.λ.π.), δεν δίνει όμως απαντήσεις σε πολλά άλλα θέματα. Και αυτό γιατί, στο υπόδειγμα αυτό δεν λαμβάνονται υπ' όψιν άλλες ιδιότητες του πυρήνα σαν το spin, η μαγνητική ροπή του κ.λ.π. Τέτοια ποιο λεπτομερή υποδείγματα θα παρουσιασθούν σε άλλο κεφάλαιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΡΟΠΕΣ ΤΟΥ ΠΥΡΗΝΑ

5.1 Ακτίνες πυρήνων

Οι διαστάσεις του πυρήνα εξαρτώνται όπως αναφέρθηκε στην (4.1) από την χρησιμοποιούμενη μέθοδο μετρήσεώς των.

Έτσι εάν χρησιμοποιήσουμε δέσμη ηλεκτρονίων μετράμε τις ηλεκτρομαγνητικές διαστάσεις του πυρήνα ενώ εάν χρησιμοποιήσουμε δέσμη πρωτονίων (νετρονίων) παίρνουμε τις πυρηνικές διαστάσεις του.

5.2 Πυρηνική Μέθοδος

Πρώτος ο Rutherford εχρησιμοποίησε δέσμη σωματίων α και ευρήκε ότι η ακτίνα του πυρήνα δίνεται από την προσεγγιστική σχέση:

$$R = r_0 A^{1/3} \quad (5.1)$$

όπου $r_0 = 1,2$ Fermi.

Την ακτίνα του πυρήνα μπορούμε να μετρήσουμε, επίσης, χρησιμοποιώντας νετρόνια ενέργειας μεταξύ 10 MeV και 20 MeV, νετρόνια δηλαδή για τα οποία το μήκος κύματος de Broglie έχει μέγεθος της τάξεως των διαστάσεων των πυρήνων. Η ενεργός διατομή σ των χρησιμοποιούμενων νετρονίων δίνεται από την σχέση:

$$\sigma = 2\pi R^2 \quad (5.2)$$

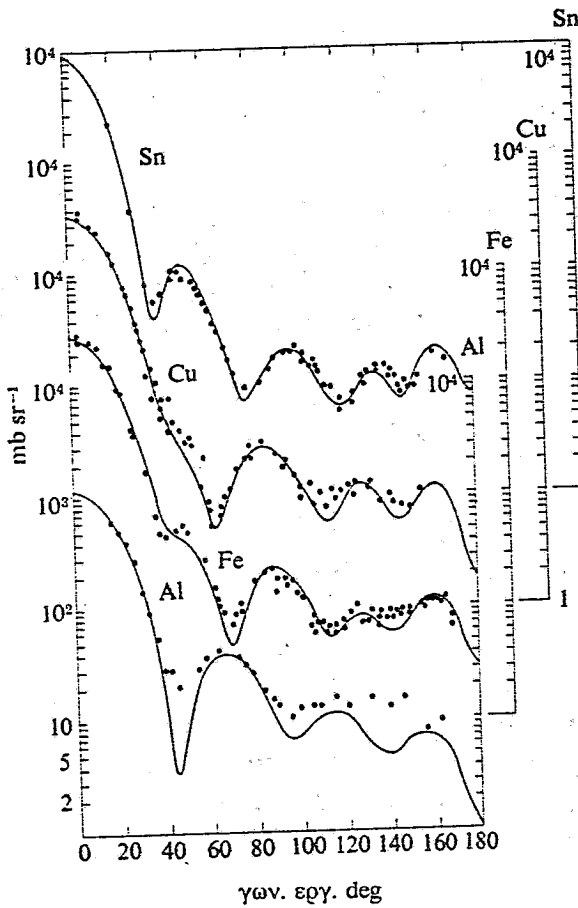
Επομένως με μετρήσεις της σ υπολογίζεται η R . Εξ άλλου για την μελέτη των διαστάσεων των πυρήνων μπορούμε κατά το "οπτικό υπόδειγμα" να χρησιμοποιήσουμε τον περιθλαστικό σκεδασμό (Diffraction Scattering) των βλημάτων.

Όπως είναι γνωστό, σωματίο με ορμή p χαρακτηρίζεται από μήκος κύματος De Broglie $\lambda = h/p$. Εάν δέσμη τέτοιων σωματίων πέσει σε πυρήνα ακτίνας R μέρος της ακτινοβολίας απορροφάται μέρος όμως

εδάζεται περιθλαστικά όπου η διαφορική ενεργός διατομή $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ δίνεται από την σχέση:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\pi^2 R^2}{\sin^2\Theta} J_1^2\left(\frac{R\sin\Theta}{\lambda}\right) \quad (5.3)$$

του J_1 η συνάρτηση Bessel πρώτης τάξεως.



Σχήμα 5.1.

Η μορφή της εξίσωσης (5.3) δίνεται από την καμπύλη του σχήματος 5.1 για την περίπτωση μερικών πυρήνων και δέσμη

νετρονίων ενέργειας $E = 14 \text{ MeV}$. Σ' αυτήν την καμπύλη το πρώτο ελάχιστο αντιστοιχεί στην γωνία θ με:

$$\sin \Theta = 0,610 \frac{2\pi\lambda}{R} \quad (5.4)$$

Λεπτομερέστερη μελέτη των ακτίνων των πυρήνων έχει γίνει με ηλεκτρόνια μεγάλης ενέργειας, $\sim 1 \text{ GeV}$. Τελευταία, χρησιμοποιούνται και ηλεκτρόνια ενέργειας μέχρις 10 GeV και άνω. Η μέθοδος βασίζεται πάλι στην μέτρηση της διαφορικής ενεργού διατομής $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ του περιθλαστικού σκεδασμού των ηλεκτρονίων από τον πυρήνα.

5.3 Σκεδασμός Ηλεκτρονίων

Αν θεωρηθεί ότι το φορτίο του πυρήνα είναι συγκεντρωμένο σ' ένα σημείο και ότι αυτός έχει ιδανική μαγνητική ροπή είναι δυνατόν να υπολογισθεί θεωρητικά η διαφορική ενεργός διατομή $(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\text{σημείου}}$ για σκέδαση ηλεκτρονίου με σπιν και μαγνητική ροπή από τον ιδανικό πυρήνα που αναφέραμε.

Στην πραγματικότητα όμως η ανώτερη υπόθεση δεν ισχύει και η διαφ. ενεργός διατομή $(\frac{d\sigma}{d\Omega})$ που μετράμε είναι διάφορη από την $(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\text{σημείου}}$. Δηλ.:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{σημείου}} |F(q)|^2 \quad (5.5)$$

όπου $F(q)$ είναι η λεγόμενη "συνάρτηση σχήματος" (Form factor), η οποία δείχνει (μετράει) την απόκλιση της ηλεκτρομαγνητικής κατανομής του πεδίου του πυρήνα από την ιδανική περίπτωση σημειακού φορτίου.

Στην περίπτωση ελαστικού σκεδασμού ηλεκτρονίου αρχικής τετραορμής (p_0, E_0) και τελικώς (p', E') έχουμε ότι η τετραορμή μεταφοράς q είναι

$$q = 2\sqrt{E_0 E'} \sin \frac{\theta}{2} \quad (5.6)$$

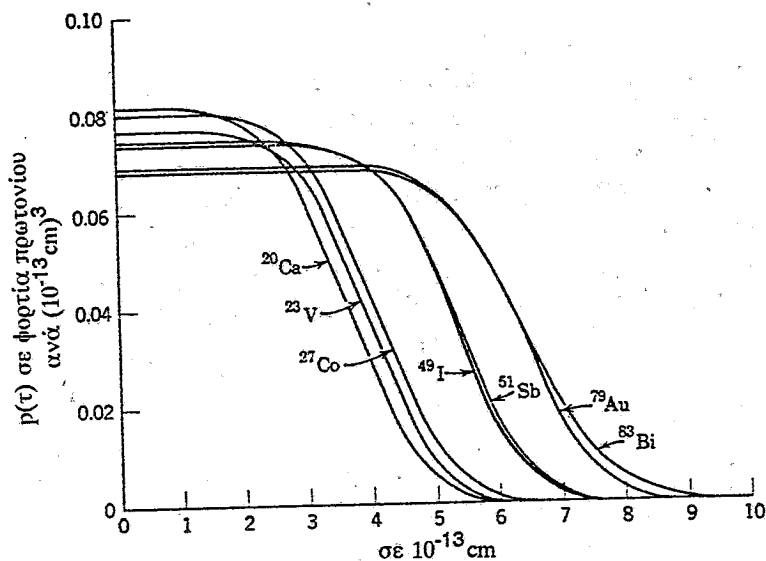
όπου θ η γωνία σκεδάσεως του ηλεκτρονίου.

Με τον πάρα πάνω τρόπο ο R. Hofstadter χρησιμοποιώντας ηλεκτρόνια καταλλήλου ενέργειας μέτρησε την πυρηνική πυκνότητα

ορτίου $\frac{-C_p(r)}{\text{cm}^3}$ η οποία στην περίπτωση των πυρήνων Ca, Co, I, Au

λ.π. ευρέθηκε ότι έχει την μορφή των καμπύλων του σχήματος 5.2.

Σε λεπτομερέστερη μελέτη λαμβάνεται υπ' όψη και η επίδραση της μαγνητικής ροπής των πυρήνων στα ηλεκτρόνια ανάκρουσης του πυρήνα κατά την σκέδαση. Η μελέτη αυτή έχει προχωρήσει μέχρι μικρών ποσοτήσεων από το κέντρο του νουκλεονίου καταβάλλονται όμως πάντοτε ειραματικές προσπάθειες να εισχωρήσουμε όσο το δυνατό βαθύτερα έσα στο νουκλεόνιο χρησιμοποιώντας ηλεκτρόνιο με ολοένα μεγαλύτερη ενέργεια.



Σχήμα 5.2.

5.4 Οπτικά φάσματα και ακτίνες X

Επειδή ο πυρήνας έχει πεπερασμένο μέγεθος το πεδίο δυνάμεως το οποίον εξασκεί στα ατομικά ηλεκτρόνια που είναι πλησίον του πυρήνα δεν θα είναι $\propto r^{-2}$. Εάν λοιπόν οι ενεργειακές στάθμες των ατομικών ηλεκτρονίων μπορεί να υπολογισθούν ακριβώς για σημειακό φορτίο του πυρήνα και συγκριθούν με τις πειραματικά μετρηθήσες τιμές, από την διαφορά των μπορεί να ευρεθεί το μέγεθος του πυρήνα. Οι υπολογισμοί όμως αναφέρονται στο πολύ δύσκολο πρόβλημα των πολλών σωματίων.

πλησιέστερα στον πυρήνα, οι υπολογισμοί είναι πολύ δύσκολοι λόγω της αβεβαιότητας υπολογισμού της επιδράσεως των εξωτερικών ηλεκτρονίων (screening effect). Στα ισότοπα όμως έχουμε τον ίδιο αριθμό πρωτονίων αλλά διαφορετικό αριθμό νετρονίων, οπότε προσδιορίζοντας τις διαφορές που υπάρχουν στις ακτίνες X μεταξύ των ισοτόπων ενός στοιχείου παίρνουμε χρήσιμες πληροφορίες για την πυρηνική μάζα και τις διαστάσεις του πυρήνα. Γι' αυτό μπορούμε να πούμε ότι η μέθοδος της "ισοτοπικής μετατοπίσεως" χρησιμοποιείται κυρίως για τον προσδιορισμό της κατανομής του φορτίου μέσα στον πυρήνα όταν προσθέτουμε νετρόνια.

5.5 Μεσονικά φωτόνια

Εκτός από τα γνωστά μας σωματία, νουκλεόνια, ηλεκτρόνια, κ.λ.π. χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό των διαστάσεων του πυρήνα και τα μεσόνια ειδικότερα το μ^- μεσόνιο και K^- μεσόνιο. Το πρώτο είναι λεπτόνιο δηλαδή έχει μόνο φορτίο δεν έχει πυρηνικές δυνάμεις είναι ~207 φορές βαρύτερο από το ηλεκτρόνιο και είναι ασταθές με μέσο χρόνο ζωής ~ 2,2 μsec . Το K^- μεσόνιο εκτός από τις άλλες τους ιδιότητες (οι οποίες δεν μας αφορούν εδώ) είναι αδρόνιο δηλ. αντιδρά με τα νουκλεόνια μέσω πυρηνικών δυνάμεων, είναι ~ 966 φορές βαρύτερο από το ηλεκτρόνιο και αυτό είναι ασταθές με μέσο χρόνο ζωής $1.24 \cdot 10^{-8}$ sec.

5.5.1 μ -μεσονικά άτομα

Τα αρνητικά μ -μεσόνια σχηματίζουν με τους πυρήνες "μεσονικά άτομα" τα οποία έχουν ακτίνες των τροχειών ~ 200 φορές μικρότερες, από τις ακτίνες που έχουν τα άτομα με τα ηλεκτρόνια.

Για βαρύν πυρήνες, όπου του Pb, η χαμηλότερη ακτίνα του Bohr είναι τέτοια ώστε το μ -μεσόνιο καταναλώνει μεγάλο μέρος (50%) του χρόνου του μέσα στον πυρήνα. Η επίδραση, όπως είναι φανερό, των διαστάσεων του πυρήνα είναι μεγάλη και ελατώνει πάρα πολύ τις ενέργειες μεταπτώσεως του μεσονίου από την μία τροχειά στην άλλη. Για μια μετάπτωση $2P_{3/2} \rightarrow 1S_{1/2}$, η οποία για σημειακό πυρήνα έχει υπολογιστεί ότι είναι 16.41 MeV, η μετρηθείσα τιμή είναι 6.02 MeV.

Το μ -μεσονικό άτομο, βεβαίως, έχει μικρό χρόνο ζωής γιατί το μ -μεσόνιο ή διασπάται ή, περίπου τις μισές φορές, αντιδράει με το πρωτόνιο κατά την αντίδραση

Αυτή είναι μια "ασθενής αντίδραση" γι' αυτό τον λόγο το μ-μεσόνιο ιερέχεται πολλά μέτρα πυρηνικής μάζας, με πυκνότητα $\sim 3 \cdot 10^{17} \text{ Kg m}^{-3}$, τρωτού αντιδράσει.

Οι θεωρητικοί υπολογισμοί είναι εξ' ίσου δύσκολοι με τους υπολογισμούς των ηλεκτρονικών ακτίνων -X, αλλά οι αβεβαιότητες έχουν περιορισθεί. Αυτό ωφείλεται κυρίως στην αρκετά σημαντική ενέργεια αντιδράσεως μεταξύ πυρήνα και μ-μεσονίου, η οποία είναι περίπου 200 φορές μεγαλύτερη σε σύγκριση με την ενέργεια ηλεκτρονίου-πυρήνα.

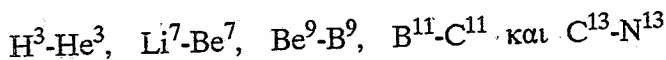
Επειδή το μήκος κύματος του δεσμευμένου μ-μεσονίου είναι αρκετά μεγάλο (κατά προσέγγιση είναι ίσο με την ακτίνα της αντίστοιχης τροχιάς του Bohr) με αυτόν τον τρόπο, μετριέται η μέση ακτίνα του πυρήνα και δεν παίρνουμε πληροφορίες για την κατανομή του φορτίου. Αυτή η μέτρηση είναι όμως μεγάλης ακριβείας και πάρα πολύ χρήσιμη.

5.5.2 K-Μεσονικά άτομα

Στα K-μεσονικά άτομα έχουμε τροχιές με ακόμα πιο μικρές ακτίνες. Το K-μεσόνιο αντιδράει μέσω του πυρηνικού του πεδίου, με τα "αδρόνια" οπότε απορροφάται από διηγευμένες τροχιές του Bohr, από τα νουκλεόνια τα οποία βρίσκονται στην ουρά της κατανομής της ύλης του πυρήνα. Τα προϊόντα της αντιδράσεως $K^+ + p$ διαφέρουν από τα προϊόντα της αντιδράσεως $K^+ + n$, έτσι οι μετρήσεις με K-μεσόνια βοηθούν στην κατανόηση των λεπτομερειών της κατανομής των νουκλεονίων στην επιφάνεια του πυρήνα.

5.6.1 Κατοπτρικοί πυρήνες

Όταν δύο νουκλεΐδια έχουν τον ίδιο αριθμό νουκλεονίων και ο αριθμός των πρωτονίων του ενός είναι ίσος με τον αριθμό των νετρονίων του άλλου και αντίστροφα, τότε λέμε ότι αυτά είναι "κατοπτρικοί πυρήνες" (Mirror Nuclei). Ως παράδειγμα κατοπτρικών πυρήνων αναφέρουμε



Τα τελευταία έχουν $Z = 6, N = 7$ και $Z = 7, N = 6$, όπου N ο αριθμός των νετρονίων. Οι περισσότερες μετρήσεις αναφέρονται σε ζεύγη κατοπτρικών πυρήνων οι οποίοι έχουν $|N-Z| = 1$.

Στους κατοπτρικούς πυρήνες έχει αντικατασταθεί ένα νετρόνιο με

παραμένει η ίδια. Έτσι οι διαφορές των μαζών των προέρχεται από τις διαφορές μαζών μεταξύ του p με το n και την ηλεκτροστατική αντίδραση μεταξύ πρωτονίων (μέσα στους πυρήνες).

5.6.2 Ηλεκτροστατική διαφορά ενέργειας κατοπτρικών πυρήνων

Για μια ομοιογενή κατανομή του φορτίου μέσα στον πυρήνα η ηλεκτροστατική ενέργεια του πυρήνα είναι

$$E_C = \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)e^2}{R} \quad (5.8)$$

η σχέση αυτή έχει βρεθεί υποθέτοντας ότι το p αντιδρά με όλα τα άλλα p μέσω της δύναμης Coulomb αλλά όχι με τον εαυτό του. Η διαφορά τότε της ηλεκτροστατικής ενέργειας μεταξύ δύο πυρήνων ενός με φορτίο Z και του άλλου με φορτίο $(Z-1)$ και σχεδόν την ίδια ακτίνα θα είναι

$$\Delta E_c = \frac{3}{5} \frac{e^2}{R} 2(Z-1) \quad (5.9)$$

Η διαφορά ενέργειας τότε είναι

$$\Delta Mc^2 = [M(A, Z+1) - M(A, Z)]c^2 = (m_p + m_e - m_n)c^2 + \frac{3}{5} \frac{2(Z-1)e^2}{R} \quad (5.10)$$

Όταν έχουμε μετατροπή του ενός κατοπτρικού πυρήνα στον άλλο με εκπομπή ακτινοβολίας β^+ (βλέπε κεφ. ακτινοβολίας β), τότε θα έχουμε ότι η διαφορά ενέργειας θα είναι ίση

$$\Delta Mc^2 = m_e c^2 + E_{KIN} + m_\nu c^2 \quad (5.11)$$

όπου m_ν είναι η μάζα του νετρίνου που είναι ίση με μηδέν και E_{KIN} είναι η κινητική ενέργεια όλων των σωματιών και του πυρήνα. Εάν πάρουμε την μέγιστη κινητική ενέργεια της ακτίνας β^+ ($T_{\beta max}$) τότε θα έχουμε

$$\Delta mc^2 = m_e c^2 + T_{\beta max} \quad (5.12)$$

γιατί οι κινητικές ενέργειες των άλλων σωματιών θα είναι αμεληταίες. Εξισώνοντας τις εξισώσεις (5.12) και (5.10) θα έχουμε

$$m_e c^2 + T_{\beta\max} = (m_b - m_n) c^2 + m_e c^2 + \frac{3}{5} \frac{2(Z-1)e^2}{R}$$

$$T_{\beta\max} = \Delta(m_p - m_n) c^2 + \frac{3}{5} \frac{2(Z-1)e^2}{R} \quad (5.13)$$

Από μετρήσεις των τιμών $T_{\beta\max}$ με την μέθοδο του διαγράμματος Curie (βλέπε κεφάλαιο ακτινοβολίας β), μπορούμε από την σχέση (5.13) α προσδιορίσουμε την ακτίνα του πυρήνα.

Επίσης μπορούμε να μετρήσουμε την διαφορά μάζας από την αντίδραση, σε ενέργεια κατωφλίου (βλέπε § 4.3.2) παραγωγής νετρονίων υπό πρωτόνια σε πυρήνες (A, Z) δηλ.

$$m_p c^2 + M(A, Z) c^2 + m_e c^2 = M(A, Z+1) c^2 + m_n c^2 + Q$$

$$\Delta M c^2 = m_p c^2 + m_e c^2 - m_n c^2 - Q \quad (5.14)$$

Από πειραματικά δεδομένα και των δύο μεθόδων ευρέθηκε ότι $r = r_0 A^{1/3}$ αλλά η τιμή για το $r_0 = 1.46$ fm είναι λίγο μεγαλύτερη από την τιμή την οποία βρίσκουμε με άλλες μεθόδους.

Αυτό οφείλεται εις την υπόθεση ότι το ηλεκτρικό φορτίο είναι ομοιογενώς κατανεμημένο μέσα στον πυρήνα. Εάν ληφθεί υπ' όψιν μία πιο ρεαλιστική κατανομή φορτίου στον πυρήνα και γίνουν οι κατάλληλες διορθώσεις, τότε η τιμή του r_0 η οποία υπολογίζεται είναι $r_0 = 1.28 \pm 0.05$ fm.

5.7 Συμπεράσματα για το μέγεθος του πυρήνα

Όπως έχουμε αναφέρει (στην § 5.2) από τα πρώτα πειραματικά δεδομένα είχε ευρεθεί ότι η ακτίνα του πυρήνα $R \propto A^{1/3}$ δηλ. η πυρηνική πυκνότητα είναι σταθερή.

Αργότερα όμως μετρήσεις μεγαλύτερης ακρίβειας έδειξαν ότι ενώ αυτό αληθεύει για το κέντρο του πυρήνα στην περιφέρειά του η πυκνότητα $\rho(r)$ δεν πέφτει απότομα στο μηδέν, αλλά σταδιακά όπως φαίνεται στο σχήμα 5.2. Αυτή η κατανομή περιγράφεται προσεγγιστικά από την συνάρτηση (Fermi)

$$\rho(r) \propto \left| 1 + \exp \left(\frac{r-R}{a} \right) \right|^{-1} \quad (5.15)$$

όπου η "ακτίνα του πυρήνα" R είναι η ακτίνα στο μισό της πυκνότητας και η παράμετρος a προσδιορίζει την ζώνη, κοντά στην επιφάνεια του πυρήνα, που η πυκνότητα πέφτει σταδιακά στο μηδέν.

Η παράμετρος έχει ευρεθεί ότι είναι $a \approx 0.5$ fm και ανεξάρτητη από το μέγεθος το πυρήνα, η δε ακτίνα

$$R = r_0 A^{1/3} \quad \text{με } r_0 = 1.1 \text{ fm}$$

Εδώ βεβαίως παρουσιάζονται οι πυρήνες σαν να έχουν σφαιρικό σχήμα ενώ έχει ευρεθεί ότι μερικοί πυρήνες έχουν αρκετά μεγάλη τετραπολική ροπή, η οποία είναι ενδεικτική ότι αυτά δεν έχουν σφαιρική συμμετρία. Όλα, όμως, τα πειράματα από τα οποία έχουν χρησιμοποιηθεί τα δεδομένα για τον προσδιορισμό της ακτίνας έχουν χρησιμοποιήσει στόχους στους οποίους οι πυρήνες δεν ήταν προσανατολισμένοι. Έτσι οι μετρήσεις δίνουν μία "εικόνα" της μέσης τιμής σε χρόνο και χώρο των διαστάσεων του πυρήνα, η οποία αναγκαστικά έχει σφαιρική συμμετρία. Αυτή η εικόνα παρουσιάζει μία σταδιακή πτώση της πυκνότητας μεγαλύτερη της πραγματικής και δίνει μία μεγαλύτερη τιμή της παραμέτρου a .

5.8 Το σπιν του Πυρήνα

Οι πυρήνες έχουν και αυτοί κβαντισμένη στροφορμή, η οποία προέρχεται από το συνδιασμό των σπιν των νουκλεονίων και της στροφορμής λόγω περιφοράς των. Ο ακριβής τρόπος συνδιασμού του σπιν θα μίας απασχολήσει στα επί μέρους υποδείγματα του πυρήνα. Εδώ θα πούμε ότι γενικά για πυρήνες με $A =$ άρτιο το σπιν των είναι πολλαπλάσιο του \hbar και για $A =$ περιττό είναι πολλαπλάσιο του $(1/2)\hbar$. Με την κβαντισμένη στροφορμή θέλουμε να πούμε ότι η μέτρηση του I^2 πάντοτε δίνει το αποτέλεσμα $I(I+1)$ και η μέτρηση της συνιστώσης I_z του I μπορεί να δώσει τις τιμές, $I, I-1, I-2, \dots -I$.

Οι κύριες ιδιότητες του σπιν ενσωματώνονται στις σχέσεις αντιμεταθέσεως (commutation relations)

$$I_x I_y - I_y I_x = I_z$$

$$I_z I^2 - I^2 I_z = 0$$

$$\text{ιδιοτιμή του } I^2 = I(I+1)$$

$$\text{ιδιοτιμές του } I_z = I, I-1, \dots -I$$

5.9 Ροπές του Πυρήνα

Στους πυρήνες μπορούμε να μιλήσουμε για δύο ειδών ροπές τις ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΡΟΠΕΣ και τις ΜΑΓΝΗΤΙΚΕΣ ΡΟΠΕΣ. Αυτές τις ροπές τις μελετάμε ξεχωριστά αρχίζοντας από τις ηλεκτρικές ροπές.

5.10 Ηλεκτρικές ροπές

Η κατανομή του φορτίου μέσα στον πυρήνα το σχήμα του και οι κινήσεις των πρωτονίων ορίζουν τις ηλεκτρικές ροπές του πυρήνα. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι προσδιορισμού των ηλεκτρικών ροπών, εδώ θα παρουσιάσουμε μια μέθοδο η οποία χρησιμοποιεί την αντίδραση μεταξύ της πυκνότητας φορτίου $\rho(\mathbf{r})$ ενός πυρήνα με ένα ηλεκτροστατικό δυναμικό $\Phi(\mathbf{r})$, τα οποίο δημιουργούν π.χ. τα ατομικά ηλεκτρόνια ή ένα κρυσταλλικό πλέγμα. Η ηλεκτροστατική ενέργεια αυτού του συστήματος είναι

$$w = \int \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) d^3r \quad (5.16)$$

Το πεδίο αυτό μπορούμε να το αναπτύξουμε κατά Taylor γύρω από το κέντρο του πυρηνικού φορτίου, το οποίο λαμβάνουμε σαν αρχή των συντεταγμένων οπότε έχουμε

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(0) + \mathbf{r} \cdot \nabla\Phi(0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \dots \quad (5.17)$$

και

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(0) + \mathbf{r} \cdot \nabla\Phi(0) + \frac{1}{6} \sum_{i,j} (r^2 \delta_{ij} + q_{ij}) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0 + \dots \quad (5.18)$$

όπου $\Phi_{ij} = 3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}$ $i = 1, 2, 3$ και x_i, x_j συμβολίζουν τις 3 συντεταγμένες του ανύσματος \mathbf{r} .

Μεταξύ των εξισώσεων (5.17) και (5.18) έχουμε προσθέσει και αφαιρέσει

$$\frac{1}{6} r^2 \delta_{ij} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \right) \quad (5.19)$$

Εάν λάβουμε υπ' όψη ότι εξ ορισμού το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, ενώ από την εξίσωση του Laplace που ικανοποιεί το εξωτερικό πεδίο έχουμε

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2\Phi = 0 \quad (5.20)$$

Αντικαθιστώντας την (5.18) στις (5.16) και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (5.20) και (5.19) βρίσκουμε ότι

$$W_c = q\Phi(0) - \Phi \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{ij} Q_{ij} \left(\frac{\partial E_j}{\partial x_i} \right)_0 - \dots \quad (5.21)$$

όπου

$$q = \int \rho(\mathbf{r}) d^3r = Ze \quad (5.22)$$

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) d^3r \quad (5.23)$$

και

$$Q_{ij} = \int \rho(\mathbf{r}) (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) d^3r \quad (5.24)$$

Οι σχέσεις (5.22), (5.23) και (5.24) ονομάζονται αντίστοιχα το ολικό φορτίο, η ηλεκτρική διπολική ροπή και η τετραπολική ροπή του πυρήνα. Από την εξίσωση (5.21) βλέπουμε ότι το φορτίο του πυρήνα αλληλεπιδρά με το δυναμικό, η διπολική ροπή με το ηλεκτρικό πεδίο, η τετραπολική ροπή με την πρώτη παράγωγο του πεδίου, κ.ο.κ.

Οι κβαντομηχανικές εκφράσεις για τους τελεστές που αντιστοιχούν στις εξισώσεις (5.22), (5.23) και (5.24) βρίσκονται όταν αντικαταστήσουμε την πυκνότητα του φορτίου την εξίσωση

$$\rho(\mathbf{r}) d^3r = Ze |\psi_N|^2 d^3r$$

όπου ψ_N είναι η κυματοσυνάρτηση που περιγράφει την κατάσταση του πυρήνα.

Με τους κβαντομηχανικούς ορισμούς της πυκνότητας του φορτίου είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι α) η ηλεκτρική και διπολική ροπή ενός στατικού κβαντικού συστήματος μηδενίζεται και β) από την ανυσματική πρόσθεση των στροφορμών οι πυρήνες μπορεί να έχουν μη μηδενική

Η μελέτη της τετραπολικής ηλεκτρικής ροπής δίνει πολλές πληροφορίες για το σχήμα του ηλεκτρικού φορτίου στον πυρήνα και έχει διαστάσεις επιφάνειας barn (10^{-24} cm^2).

5.11 Μαγνητικές Ροπές

Όπως είναι γνωστό όταν φορτισμένο σωματίο έχει στροφορμή από την ίδια περιφορά (σπιν) παρουσιάζει μαγνητική ροπή ανάλογη του σπιν. Μελέτη της υπέρλεπτης υψής (Hyperfine Structure) των φασματικών γραμμών του ατόμου έδειξε ότι τέτοια μαγνητική ροπή δεν είναι κβαντισμένη ποσότητα η δε μονάδα μετρήσεως της είναι η πυρηνική μαγνητόνη η οποία είναι

$$\mu_n = \frac{|e|\hbar}{M_p c} = 3.15245166(28) 10^{-14} \text{ MeV T}^{-1}$$

Η διαφορά μεταξύ της πυρηνικής μαγνητόνης και της μαγνητόνης του Bohr μ_{Bohr} συνίσταται στο ότι στον υπολογισμό της πρώτης εισέρχεται η μάζα του πυρήνα σε εκείνον δε της δεύτερης εισέρχεται η μάζα του ηλεκτρονίου.

Πριν μιλήσουμε για τις μαγνητικές ροπές του πυρήνα θα κάνουμε μία μικρή εισαγωγή για τις μαγνητικές ροπές των δομικών λίθων του πυρήνα δηλ. των νουκλεονίων. Για σημειακά σωματία όπως το e και το μ -μεσόνιο έχει βρεθεί ότι η διπολική μαγνητική τους ροπή ($\delta\mu$) μπορεί να υπολογιστεί από την ηλεκτροκβαντομηχανική (eqd) με πολύ μικρή απόκλιση. Για το ηλεκτρόνιο με σπιν S ισχύει η θεωρία του Dirac όπου έχουμε για την διπολική μαγνητική ροπή

$$\mu_S = \frac{e\hbar}{m_e c} S = 2\mu_B S = 8\mu_N S$$

Το $g_S^e = 2 \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right) = 2.00232$ είναι ο συντελεστής Landé για το ηλεκτρόνιο.

Για το p και n οι αντίστοιχοι κατά Dirac υπολογισμοί θα δίνανε.

$$\mu_S^{(p)} = 2\mu_n \quad \text{και} \quad \mu_S^{(n)} = 0$$

Οι πειραματικές μετρήσεις δείξαν ότι οι $\delta\mu$ του p είναι

$$\mu_s^{(p)} = 2.7927\mu_n = 2.7927 \frac{e\hbar}{2Me} \quad \text{και} \quad g_p = 5,59$$

και του n είναι

$$\mu_s^{(n)} = -1.9131\mu_n = -1.9131 \frac{e\hbar}{2Me} \quad \text{και} \quad g_n = -3.83$$

Βασικό συμπέρασμα αυτών των πειραματικών τιμών είναι ότι τα νουκλεόνια είναι σύνθετα συστήματα. Υπάρχουν πολλές ερμηνείες με ακρίβεια 2-3% για την δομή των νουκλεονίων, μία από αυτές θα παρουσιάσουμε πάρα κάτω, αλλά μέχρις σήμερα δεν έχει αναδειχθεί μ' ένα απολύτης ικανοποιητικό υπόδειγμα για την ερμηνεία αυτών των τιμών.

Το πρωτόνιο μέσα στον πυρήνα ευρίσκεται σε τροχιακή κίνηση και ως εκ τούτου παράγει ηλεκτρικό ρεύμα με πυκνότητα φορτίου $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ το οποίο είναι μια από τις πηγές των μαγνητικών ιδιοτήτων του πυρήνα. Το ανυσματικό δυναμικό $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ σε ένα σημείο \mathbf{r} έξω από τον πυρήνα δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (5.25)$$

Επειδή $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$ μπορούμε να αναπτύξουμε το $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ σε δυνάμεις του r'/r . Ο πρώτος όρος περιέχει το $\int \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3r'$, ο οποίος για μία περιορισμένη σταθερή πυκνότητα φορτίου έχει ($\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$), οπότε μηδενίζεται εξαφανίζοντας έτσι τον όρο του μαγνητικού μονόπολου. Λαμβάνοντας υπ' όψιν αυτό το μαγνητικό ανυσματικό δυναμικό γίνεται ίσο με

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (5.26)$$

όπου μ_0 είναι η μαγνητική ροπή και είναι ίση με

$$\mu_0 = \frac{1}{2c} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3r' \quad (5.27)$$

Και εφ' όσον το ρεύμα ωφείλεται στην κίνηση των πρωτονίων με ορμή \mathbf{p}_k έχουμε

$$\mathbf{J} = \sum_{k=1}^Z \frac{e}{M} \mathbf{p}_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \quad (5.28)$$

α

$$\mu_0 = \frac{e}{2Mc} \sum_{k=1}^Z \mathbf{r}_k \times \mathbf{p}_k = \frac{e\hbar}{2Mc} \sum_{k=1}^Z \mathbf{l}_k \quad (5.29)$$

που \mathbf{l}_k είναι η στροφορμή του k πρωτονίου σε μονάδες \hbar .

Εκτός από την μαγνητική ροπή λόγω περιφοράς έχουμε τις αγνητικές ροπές των νουκλεονίων οι οποίες θα συνισφέρουν ολικά

$$\mu_s = \frac{e\hbar}{2Me} \left[g_p \sum_{k=1}^Z \mathbf{s}_k + g_n \sum_{k=Z+1}^A \mathbf{s}_k \right] \quad (5.30)$$

που \mathbf{s}_k είναι το σπιν εκάστου νουκλεονίου.

Για (σύνθετο) πυρήνα θα έχουμε ότι η μαγνητική του ροπή είναι η με το άθροισμα των εξισώσεων (5.29) και (5.30) ήτοι

$$\mu = \mu_n \left\{ \sum_{k=1}^Z [g_l^p \mathbf{l}_k + g_s \mathbf{s}_k] + \sum_{k=Z+1}^N g_n \mathbf{s}_k \right\} \quad (5.31)$$

που $g_l^p = 1$.

Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι η ύπαρξη της μαγνητικής σπής του πυρήνα δικαιολογείται μόνο αν θεωρήσουμε ότι ο πυρήνας έχει πιν (π.χ. I) και ορίσουμε ότι

$$\mu_I = \gamma_I \hbar I \quad (5.32)$$

που γ το πηλίκο της μαγνητικής ροπής, μ_I προς το σπιν το οποίο την προκαλεί, ονομάζεται δε "γυρομαγνητικός λόγος".

Η μαγνητική ροπή μ_I πυρήνα δίνεται επίσης από την σχέση:

$$\mu_I = g_I \cdot \mu_n \cdot I \quad (5.33)$$

που g_I είναι "πυρηνικός παράγων".

Για την μέτρηση της μαγνητικής ροπής του πυρήνα εφαρμόζονται μμεσοι και άμεσοι μέθοδοι. Οι έμμεσοι μέθοδοι βασίζονται στο

φασματικές γραμμές του φάσματος του ατόμου και εμφανίζεται η υπέρλεπτη υφή.

5.12 Πυρηνικός Μαγνητικός Συντονισμός (N.M.R.)

Άμεση μέθοδος μετρήσεως της μαγνητικής ροπής του πυρήνα είναι ο "πυρηνικός μαγνητικός συντονισμός" (Nuclear Magnetic Resonance ή N.M.R.). Το φαινόμενο του πυρηνικού μαγνητικού συντονισμού συνίσταται στα εξής:

Αν έχουμε υλικό το οποίο περιέχει N πυρήνες/cm³ κάθε ένας από τους οποίους έχει μαγνητική ροπή μ_I , μέσα σε πεδίο H , τότε θα εμφανισθεί σ' αυτό μαγνητική πόλωση P_0 :

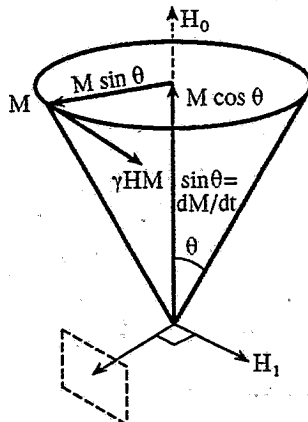
$$P_0 = N \cdot \mu_I^2 \frac{H}{kT} \frac{I+1}{I}$$

όπου kT το γνωστό γινόμενο της σταθεράς του Boltzmann επί την απόλυτο θερμοκρασία του υλικού.

Εκτός από την πάρα πάνω σχέση έχουμε επίσης την σχέση

$$P_0 = \gamma M$$

όπου M είναι η στροφορμή η οποία εξαρτάται από το Spin των σωματιών.



Λόγω της παρουσίας της στροφορμής αυτής \mathbf{M} , η μαγνητική ροπή των πυρήνων δεν προσανατολίζεται πλήρως με το πεδίο \mathbf{H} αλλ' εκτελεί μεταπτωτική κίνηση με γωνία θ (σχήμα 5.3, μετάπτωση Larmor).

Η διαφορική εξίσωση της κινήσεως των πυρήνων είναι:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{P} \times \mathbf{H} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H} \quad (5.34)$$

Πολλαπλασιασμός και των δύο μελών της (5.34) εσωτερικά επί \mathbf{H} δίνει:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} \cdot \mathbf{H} = (\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{H}$$

αλλά $(\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{H} = 0$, άρα έχουμε

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (5.35)$$

Αν τώρα πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της (5.34) εσωτερικά επί \mathbf{M} λαμβάνουμε:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} \cdot \mathbf{M} = (\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{M} = 0 \quad (5.36)$$

αλλά

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dM^2}{dt}$$

και για αυτόν τον λόγο έχουμε:

$$\frac{1}{2} \frac{dM^2}{dt} = 0$$

δηλ.

$$M^2 = \text{σταθ.}$$

Επειδή το μαγνητικό πεδίο \mathbf{H} και το μέτρο της στροφορμής είναι σταθερά συμπεραίνουμε από την (5.35) ότι η γωνία θ μεταξύ \mathbf{H} και \mathbf{M} είναι σταθερή. Την σχέση (5.33) μπορούμε να τη γράψουμε ως εξής:

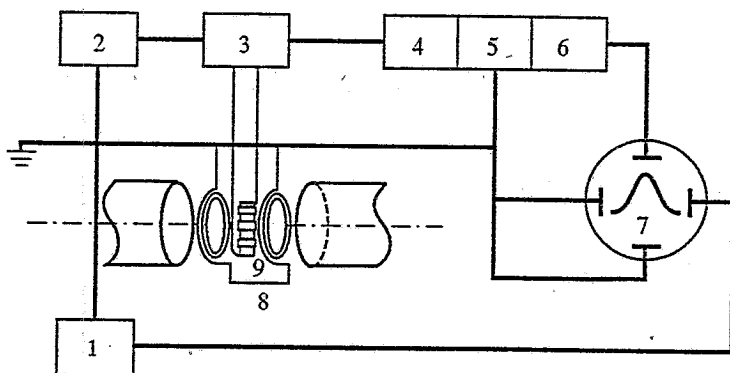
$$\frac{2\pi}{T} M \sin \theta = \gamma M H \sin \theta$$

ή

$$\omega_L = \gamma \cdot H \quad (5.37)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι το άνυσμα της στροφορμής M εκτελεί μεταπτώτικη κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_L .

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι: Αν υλικό τοποθετηθεί μέσα σε ισχυρό μαγνητικό πεδίο οι μαγνητικές ροπές των πυρήνων του υλικού εκτελούν μετάπτωση κυκλικής συχνότητας $\omega_L = (\gamma \cdot H)$. 'Αν τώρα τοποθετηθεί κάθετα προς το αρχικό πεδίο και άλλο ασθενέστερο και εναλλασσόμενο πεδίο κυκλικής συχνότητας ω , και είναι $\omega \neq \omega_L$ η μετάπτωση δεν επηρεάζεται: εάν όμως συμβεί $\omega = \omega_L$ τότε έχουμε συντονισμό και συνεπώς απορρόφηση ενέργειας. Κατά τον συντονισμό η M μεταβάλλεται εφόσον τα σπιν των πυρήνων από παράλληλα μετατρέπονται σε αντιπαράλληλα, μεταπίπτουν δηλαδή σε διεγερμένη κατάσταση (ασταθή). Στην κατάσταση αυτή τα σπιν δεν παραμένουν επί πολύ αλλ' επανέρχονται στην αρχική των κατάσταση και αποδίδουν την διαφορά ενέργειας σαν θερμική ενέργεια. Κατά το πείραμα N.M.R. (σχήμα 5.4) μετράμε την ποιότητα Q ενός πηνίου το οποίο περιβάλλει το δείγμα το οποίο μελετάμε.



Σχήμα 5.4.

1. Ταλαντωτής χαμηλής συχνότητας
3. Γέφυρα
5. Ανορθωτής υψηλής συχνότητας
7. Παλμογράφος

2. Ταλαντωτής υψηλής συχνότητας
4. Ενισχυτής υψηλής συχνότητας
6. Ενισχυτής χαμηλής συχνότητας
8. Πηνία HELMHOLTZ

Κατά τη στιγμή του συντονισμού το δείγμα απορροφά ενέργεια με αποτέλεσμα την μεταβολή της ποιότητας Q του πηνίου, η οποία ιτάλληλα ενισχυόμενη παρουσιάζεται σαν διαφορά δυναμικού σ' έναν αλμογράφο.

Για τον εντοπισμό της συχνότητας συντονισμού ακολουθείται η ζής μέθοδος.

Στο ισχυρό πεδίο του μαγνήτη H προστίθεται και άλλο ασθενέστερο, εναλλασσόμενο συχνότητας 50 c/sec, το οποίο χρησιμοποιείται και τις πλάκες οριζόντιας απόκλισης του ίδιου παλμογράφου. Έτσι το λικό μαγνητικό πεδίο H είναι ίσο με:

$$H_{ολ} = H + H_0 \eta\mu (2\pi \cdot 50t)$$

Όταν το $H_{ολ}$ κυμαίνεται γύρω από την τιμή του H για την οποία έχουμε συντονισμό, σε κάθε κύκλο μεταβολής του $H_{ολ}$ θα έχουμε δύο ορές συντονισμό, ο οποίος γίνεται αντιληπτός από τις δημιουργούμενες έσα στον παλμογράφο κορυφές (Peaks).

Στον πίνακα 5.1 δίνονται μετρηθείσες τιμές μαγνητικών ροπών ιαφόρων πυρήνων.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.1.

στοιχ.	A	Spin	Μαγν. Ροπή
n	1	1/2	-1,9130427
p	1	1/2	2,79284739
d	2	1	0,85741
T	3	1/2	2,97884
He	3	1/2	-2,12755
Li	6	1	0,82201
Li	7	3/2	3,25631
B	10	3	1,8008

5.13 Μαγνητική ροπή των Νουκλεονίων

Από τον πίνακα παρατηρούμε ότι τόσο το p αλλά και το ουδέτερο n , έχουν ανώμαλη μαγνητική ροπή, δηλαδή αυτή δεν μπορεί να εξηγηθεί με την κβαντική ηλεκτροδυναμική.

Μία από τις πρώτες ερμηνείες της ανώμαλης μαγνητικής ροπής των νουκλεονίων έγινε με την παραδοχή υπάρξεως γύρω από αυτά νέφους π -μεσονίων (Μεσονική θεωρία του Yukawa), δηλ. (π^+ , π^- , ή π^0) τα οποία αποβάλλονται και επανασυλλαμβάνονται από τα νουκλεόνια, δηλ. τα πρωτόνια και τα νετρόνια παρουσιάζονται σαν

$$p \sim n + \pi^+ \quad \text{και} \quad n \sim p + \pi^-$$

Έτσι το πρωτόνιο κατά ένα ποσοστό χρόνου (έστω τ) μετατρέπεται σε νετρόνιο και π^+ ενώ το νετρόνιο μετατρέπεται σε πρωτόνιο και π^- . Επειδή η εναλλαγή αυτή γίνεται μέσα σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα η αβεβαιότητα της ενέργειας είναι μεγάλη αφού

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar$$

Συνεπώς, αν και στις πάρα πάνω αντιδράσεις φαίνεται να μην ισχύει η αρχή της διατηρήσεως της ενέργειας, τούτο δεν μας ενοχλεί, γιατί η μεταβολή της ενέργειας κατά τις αντιδράσεις αυτές εμπίπτει στα όρια της αρχής της αβεβαιότητας.

Σύμφωνα με τις πάρα πάνω απόψεις ποσοτικά η μετρούμενη τιμή μ_p της μαγνητικής ροπής του p θα είναι άθροισμα της αναμενόμενης τιμής του "γυμνού" p , η οποία είναι ίση με 1 και της μαγνητικής ροπής του νέφους του π -μεσονίου μ_π κάθε μία πολλαπλασιαζόμενη με τα αντίστοιχα ποσοστά χρόνου υπάρξεώς των. Θα έχουμε δηλ.

$$\mu_p = \mu_\pi \tau + 1(1-\tau)$$

και για το νετρόνιο

$$\mu_n = (1-\mu_\pi)\tau$$

Είναι δε $\mu_p + \mu_n = 1$, πειραματικά δε ευρίσκουμε ότι

$$\mu_p + \mu_n = 0,87985$$

η οποία τιμή πλησιάζει αρκετά τη μονάδα.

Σήμερα γνωρίζουμε ότι τα νουκλεόνια απαρτίζονται από 3 κουάρκ και γκλουόνια έτσι γίνονται προσπάθειες να υπολογιστεί η μαγνητική πολική ροπή των από τις μαγνητικές ροπές των κουάρκ και την εισφορά των γκλουονίων. Η ακριβής δομή των νουκλεονίων δεν είναι εντελώς γνωστή γιατί νεώτερα πειράματα βρίσκουν μεγάλη συνεισφορά των γκλουονίων στην διαμόρφωση του σπιν των νουκλεονίων. Για αυτούς τους λόγους και η ακρίβεια υπολογισμού της διπολικής μαγνητικής ροπής δεν είναι πολύ ακριβής.

14 Μαγνητική Ροπή Πυρήνων

Εξετάζοντας το δευτέριο (d) παρατηρούμε ότι θα πρέπει εκτός από την μαγνητική ροπή λόγω σπιν να υπολογίσουμε και τυχόν μαγνητική ροπή λόγω της σχετικής στροφορμής μεταξύ των δύο σωματιών, τα οποία συνθέτουν. Αν υποθέσουμε ότι το d ευρίσκεται στην κατάσταση S δηλαδή έχει σχετική στροφορμή $l = 0$, τότε η μαγνητική του ροπή θα πρέπει να είναι ίση με το άθροισμα των μαγνητικών ροπών νετρονίου και πρωτονίου. Πράγματι άμα παρατηρήσουμε ότι η μαγνητική ροπή του d είναι σχεδόν ίση με το άθροισμα που αναφέραμε (-0,85741) καταλήγουμε το συμπέρασμα ότι το δευτέριο ευρίσκεται στην κατάσταση S .

Η μικρή απόκλιση από την τιμή του αθροίσματος που αναφέραμε οφείγεται αν δεχθούμε ότι το δευτέριο ευρίσκεται κατά 98% στην κατάσταση S και κατά 2% στην κατάσταση D .

Τέλος από τον πίνακα παρατηρούμε ότι το H_e^3 και H^3 έχουν σχεδόν τις ίδιες μαγνητικές ροπές με το n και p , αντίστοιχα. Αυτό συμβαίνει αφού τα νουκλεόνια είναι φερμιόνια και ακολουθούν την απαγορευτική αρχή του Pauli, κατά την οποία δεν μπορεί δύο από αυτά να υπάρχουν στην ίδια κβαντική κατάσταση. Έτσι οι μαγνητικές ροπές των ζευγαριών, $2p$ και $2n$, αλληλοαναιρούνται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

6.1 Γενικά

Όπως γνωρίζουμε η βάση στην Κλασσική Φυσική είναι οι νόμοι "Διατηρήσεως" διαφόρων φυσικών μεταβλητών όπως της ενέργειας, ορμής και στροφορμής. Αυτοί οι νόμοι αποτελούν θεμέλια της κλασσικής Φυσικής και η ύπαρξη των βοηθάει στην επίλυση πολλών προβλημάτων και τα όρια εφαρμογής των είναι καθολικά. Στη Φυσική του μικρόκοσμου όμως βάσει της αρχής της αβεβαιότητας του Heisenberg διατηρούνται τα γινόμενα συζυγών μεταβλητών όπως

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar$$

ή

$$\Delta p \cdot \Delta x \approx \hbar$$

Η ενέργεια δηλαδή μπορεί να μην διατηρηθεί ή όπως λέμε να έχει αβεβαιότητα ΔE αρκεί όμως η αβεβαιότητα στην συζυγή μεταβλητή της (ΔE) να είναι τέτοια ώστε το γινόμενό του να είναι μικρότερο ή ίσο του \hbar .

Ένα παράδειγμα τέτοιας εφαρμογής έχουμε ήδη συναντήσει στην ερμηνεία της διπολικής ροπής των νουκλεονίων υποθέτοντας την ύπαρξη νέφων πονίων.

Στην φυσική του μικρόκοσμου έχουμε βρει ότι υπησέρχονται και νέες μεταβλητές, όπως τα σπιν των σωματιδίων, οι οποίες καθορίζουν την συμπεριφορά αυτών των σωματιδίων και τους νόμους που διέπουν την κίνησή των. Βασικό εργαλείο στην αναζήτηση των νέων θεωριών είναι οι συμμετρίες. Μερικές από τις συμμετρίες και τις εφαρμογές που θα τις αναπτύξουμε πάρα κάτω αρχίζουμε όμως με την έννοια των μετασχηματισμών.

6.2 Μετασχηματισμοί

Επί πλέον των νόμων Διατηρήσεως έχουμε και τους Μετασχηματισμούς. Κλασσικό παράδειγμα είναι οι μετασχηματισμοί του Lorentz στην

εωρία της Σχετικότητας. Με αυτούς τους μετασχηματισμούς μπορούμε α συνδέσουμε φαινόμενα, τα οποία συμβαίνουν σε συστήματα αναφοράς $\xi(x, y, z, ict)$ τα οποία ευρίσκονται σε σχετική κίνηση, π.χ. ένα ακίνητο, το οποίο αναφέρεται σαν σύστημα του εργαστηρίου ή του παρατηρητή και το άλλο του κέντρου μάζας όπου το άθροισμα των ορμών P_i των σωματιδίων

είναι ίσο με το μηδέν $\left(\sum_i p_i' = 0 \right)$ και έχει σταθερή ταχύτητα $u = \beta c$

ως προς το πρώτο.

Μπορούμε να ορίσουμε δύο ειδών μετασχηματισμούς

1) τους "παθητικούς" (passive) ή μετασχηματισμούς των συστημάτων αναφοράς, όπου το φυσικό σύστημα είναι αμετάβλητο και ασχολούμεθα με την σχέση που έχει μία φυσική μεταβλητή όπως αυτή παρατηρείται σε δύο διαφορετικά συστήματα όπως τα αναφέραμε προηγουμένως. Γεωμετρικά ο μετασχηματισμός αντιστοιχεί σε μία μετάθεση (displacement) και στροφή (rotation) ενός συστήματος αναφοράς τεσσάρων διαστάσεων.

2) Τους "ενεργούς" (active) μετασχηματισμούς όπου ο μετασχηματισμός Lorentz εφαρμόζεται στο φυσικό σύστημα κατά το χρόνο τον οποίον το σύστημα του παρατηρητή παραμένει σταθερό. Γεωμετρικά αυτό αντιστοιχεί σε μία στροφή και μετάθεση του φυσικού συστήματος μέσα στα πλαίσια ενός σταθερού συστήματος αναφοράς τεσσάρων διαστάσεων.

Η μαθηματική επεξεργασία και των δύο ειδών είναι η ίδια αλλά έχουμε δύο κατηγορίες μετασχηματισμών

(α) "Κανονικοί" (Proper) μετασχηματισμοί Lorentz: αυτοί μπορούν να πραγματοποιηθούν με την ολοκλήρωση ενός μεγάλου αριθμού απειροστικών μετασχηματισμών. Παραδείγματα τέτοιων κανονικών μετασχηματισμών έχουμε μεταξύ δύο συστημάτων αναφοράς με σχετική ομαλή ταχύτητα ή σχετιζομένων με απλή περιστροφή.

(β) "Μη-κανονικοί" (Improper) μετασχηματισμοί Lorentz, οι οποίοι συνεπάγον μία ασυνέχεια (discontinuity) όπως η ανάκλαση σε επίπεδο σημείο ή χρόνο. Είναι φανερό ότι οι μη-κανονικοί μετασχηματισμοί δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν με το άθροισμα πολλών απειροστικών μετασχηματισμών.

Για πολλούς μετασχηματισμούς υπάρχουν τελεστές (U) και συναρτήσεις, οι οποίες παραμένουν αναλλοίωτες. Περιμέναμε τότε τη συμπεριφορά ενός συστήματος να μην αλλάζει η συμπεριφορά και κατά συνέπεια η Χαμιλτονιανή H του συστήματος να είναι αναλλοίωτη.

Αυτό μπορεί να γραφεί σαν

$$H' = U H U^{-1} = H,$$

ως εκ τούτου η χαμιλτονιανή μετατίθεται με τον τελεστή του μετασχηματισμού δηλαδή

$$[U, H] = 0$$

Για κανονικούς μετασχηματισμούς Lorentz έχουμε το αυτό αποτέλεσμα και για απειροστούς μετασχηματισμούς τους τελεστές των οποίων μπορούμε να παράγουμε με ανάπτυξη $U = 1 + iQ$ οπότε έχουμε και

$$[Q, H] = 0$$

Οι ιδιοτιμές του τελεστή που μετατίθενται (commute) με την Χαμιλτονιανή είναι σταθερές της κινήσεως λόγω της υπάρξεως της εξισώσεως της κινήσεως

$$i\hbar \frac{dQ}{dt} = [Q, H]$$

οπότε και οι ιδιοτιμές του Q διατηρούνται. Μπορούμε να διατυπώσουμε τον γενικό κανόνα ότι για κάθε μετασχηματισμό που αφήνει την Χαμιλτονιανή αναλλοίωτη μπορεί να υπάρχει ένας αντίστοιχος τελεστής του οποίου οι ιδιοτιμές διατηρούνται.

Στον πίνακα 6.1 δίνουμε τους κανονικούς μετασχηματισμούς των συντεταγμένων οι οποίοι αφήνουν την Χαμιλτονιανή αμετάβλητη και τις αντίστοιχες μεταβλητές που διατηρούνται.

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.1.

Μετασχηματισμός	Διατήρηση
Μετατόπιση χώρου	Ορμή
» χρόνου	Ενέργεια
Περιστροφή (γωνία)	Στροφορμή

3 Ομοτιμία

Στους μη κανονικούς μετασχηματισμούς υπάγεται η ομοτιμία η οποία είναι μια έννοια μεγάλης σημασίας για την ατομική και πυρηνική φυσική χωρίς αντιστοιχη έννοια στην κλασσική Φυσική. Είναι μία ιδιότητα της κυματοσυναρτήσεως, η οποία περιγράφει την κβαντική κατάσταση ενός συστήματος. Εάν το δυναμικό αντιδράσεως ενός συστήματος έχει ην ιδιότητα συμμετρίας, δηλ. είναι αναλλοίωτο στο μετασχηματισμό της νακλάσεως των συντεταγμένων έχουμε

$$V(x, y, z) = V(-x, -y, -z) = PV(x, y, z)$$

που ο μοναδιαίος τελεστής P έχει προσδιοριστεί και η εξίσωση του chrödinger έχει την λύση $\psi(x, y, z)$ και η $P\psi(x, y, z)$ είναι επίσης λύση της εξισώσεως. Για μια μη εκφυλισμένη περίπτωση η δεύτερη λύση πρέπει να είναι ίση με την πρώτη πολλαπλασιαζόμενη με ένα αριθμητικό συντελεστή δηλ. $P\psi(x, y, z) = \alpha\psi(x, y, z)$. Δύο ανακλάσεις πρέπει να μας φέρουν την αρχική κατάσταση, οπότε $P^2 = 1$ και $\alpha = \pm 1$. Έτσι μη εκφυλισμένες λύσεις, οι οποίες αντιστοιχούν σε τέτοια δυναμικά, έχουν ομοτιμία άρτια ($P = +1$) ή περιττή ($P = -1$).

Τα στοιχειώδη σωμάτια, έχουν συγκεκριμένη ομοτιμία (intrinsic parity) την οποία έχουμε προσδιορίσει μερικές φορές συμβατικά και άλλες φορές πειραματικά μαζί με το σπιν και τους άλλους κβαντικούς των αριθμούς, π.χ. σπιν (J) και η ομοτιμία (P) του πρωτονίου, νετρονίου και

ηλεκτρονίου είναι $J^P = \frac{1}{2}^+$ ενώ των τριών π-μεσονίων είναι 0^- .

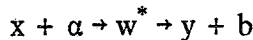
Για ένα μοναχικό σωματίο σε κεντρικό δυναμικό υπάρχει μία συσχέτιση μεταξύ της τροχειακής στροφορμής και της ομοτιμίας η οποία προέρει από την γωνιακή λύση του προβλήματος και έχουμε

άρτιο $l =$ άρτια ομοτιμία (+), περιττό $l =$ περιττή ομοτιμία (-)

Για το σύστημα πολλών σωματιών όπως είναι ο πυρήνας η ομοτιμία μπορεί να προσδιοριστεί συναρτήσει της ομοτιμίας των σωματιών που τον απαρτίζουν. Όταν ληφθεί υπ' όψη ότι η πλήρης κυματοσυνάρτηση μπορεί να αναπτυχθεί σε όρους, οι οποίοι είναι γινόμενα κυματοσυναρτήσεων των σωματιών, προκύπτει ότι η ομοτιμία του πυρήνα είναι γινόμενο των κατά μέρους ομοτιμιών.

Από πειραματικά δεδομένα έχει ευρεθεί ότι η ομοτιμία "διατηρείται" γι' ωρισμένους τύπους αντιδράσεων και συγκεκριμένα τις ηλεκτρομαγνητικές και σφοδρές δηλ. πυρηνικές αντιδράσεις. Στις ασθενείς όμως αντιδράσεις, όπως είναι η ακτινοβολία β , η ομοτιμία δεν διατηρείται. Αυτό θα μας απασχολήσει στο αντίστοιχο κεφάλαιο.

Στις αντιδράσεις που διατηρείται η ομοτιμία είναι σταθερά κινήσεως και παίζει σπουδαίο ρόλο. Εάν π.χ. έχουμε την αντίδραση



όπου η w^* είναι μία συγκεκριμένη κατάσταση συνθέτου πυρήνα (βλέπε παρα κάτω) και τα σπιν και η ομοτιμία όλων των 5 σωματιών της αντιδράσεως είναι γνωστά τότε η διατήρηση της στροφορμής και της ομοτιμίας περιορίζει σημαντικά τις τροχιακές στροφορμές που μπορεί να έχει τόσο ο στόχος a όσο και το εξερχόμενο σωματίο b . Έτσι έχουμε περιορισμούς στις γωνιακές κατανομές αλλά και στο μέγεθος της ενεργούς διατομής.

Σαν παράδειγμα μπορούμε να πάρουμε την ίδια αντίδραση με τα σωματία των οποίων γνωρίζουμε τα σπιν και τις ομοτιμίες, δηλ. το x έχει 0^+ , το a είναι πρωτόνιο με $(1/2)^+$, το w^* έχει $(3/2)^-$, το b είναι νετρόνιο με $(1/2)^+$ και τελικά το y έχει 2^+ . Από την διατήρηση της στροφορμής έχουμε ότι επειδή το w^* έχει σπιν $3/2$ η τροχιακή στροφορμή του a μπορεί να πάρει τις τιμές $l_a = 1$ ή 2 επίσης η l_b παίρνει τις τιμές $0, 1, 2, 3$ και 4 .

Από την διατήρηση της ομοτιμίας μπορούμε να αποκλήσουμε την $l_a = 2$ και τις στροφορμές της τελικής καταστάσεως, οι οποίες έχουν άρτια ομοτιμία οπότε τελικά έχουμε μόνο $l_a = 1$ και $l_b = 1$ ή 3 .

6.4 Συμμετρίες ανταλλαγής

Έχουμε πολλές φορές αναφερθεί στο σπιν του σωματιδίου. Η ανακάλυψη του σπιν του ηλεκτρονίου από τους Goudsmidt και Uhlenbeck είχε σαν αποτέλεσμα μαζί με τη θεωρία των τροχειών του Bohr να βοηθήσει στην κατανόηση των ατόμων. Βασικό ρόλο όμως στην ερμηνεία του περιοδικού συστήματος έπεξε η διατύπωση της "Απαγορευτικής Αρχής του Pauli" κατά την οποία δύο ηλεκτρόνια δεν μπορούν να κατέχουν την ίδια κβαντική κατάσταση.

Η απαγορευτική αρχή του Pauli δεν είναι τυχαία και ανεξάρτητη ιδιότητα των ηλεκτρονίων αλλά ένει τις ρίζες της σε θεμελιώδη

ακολουθούν διάφορους νόμους μεταθέσεως και αντιμεταθέσεως. Σαν συνέπεια έχουμε ότι σωματίδια ή πυρήνες με ημιακέραιο σπιν ($1/2 \hbar$, $3/2 \hbar$, ...) όπως, ηλεκτρόνια και πρωτόνια ακολουθούν την στατιστική των Fermi-Dirac και ονομάζονται γι' αυτό Φερμιόνια (Fermions). Πυρήνες ή σωματίδια σαν τα π-μεσόνια ή φωτόνια με ακέραιο σπιν (0 , $1 \hbar$, $2 \hbar$, ...) ακολουθούν την στατιστική των Bose-Einstein και ονομάζονται μποζόνια (Bosons).

Από την μελέτη των ιδιοτήτων των κυματοσυναρτήσεων, οι οποίες περιγράφουν τις ανταλλαγές των θέσεων μεταξύ δύο ιδίων σωματιδίων έχει αποδειχθεί ότι αυτές για φυσικά συστήματα περιγράφονται από συμμετρικές ή αντισυμμετρικές κυματοσυναρτήσεις. Οι τελευταίες μπορούν να γραφούν για ευκολία υπό μορφή οριζουσας (determinant of Slater). Εάν δύο σωματίδια μπορούν να καταλάβουν την ίδια κβαντική κατάσταση τότε οι κυματοσυναρτήσεις των θα είναι ίδιες και η οριζουσα του Slater μηδενίζεται: αυτή είναι βασικά η απαγορευτική αρχή του Pauli που ακολουθούν τα φερμιόνια.

Τα μποζόνια περιγράφονται από μία συμμετρική ολική κυματοσυναρτηση και γι' αυτό δεν έχουν περιορισμούς στην κατάλυση των καταστάσεων.

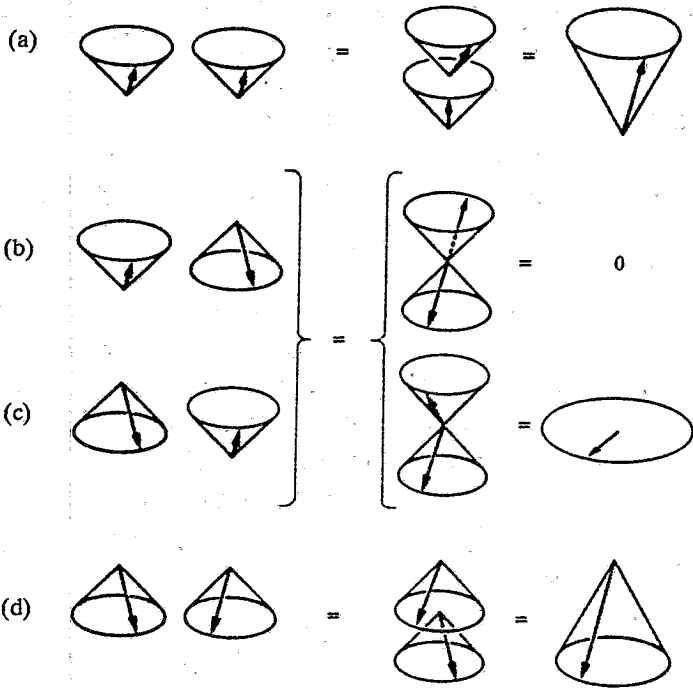
6.5 Καταστάσεις δύο Νουκλεονίων

Εάν θέλουμε να κατασκευάσουμε την κυματοσυναρτηση δύο ιδίων φερμιονίων (π.χ. δύο πρωτονίων) με σπιν $1/2 \hbar$ τότε η ολική κυματοσυναρτηση βάσει των όσον έχουμε αναφέρει πρέπει να είναι αντισυμμετρική. Η ολική κυματοσυναρτηση Φ θα είναι γινόμενο δύο κυματοσυναρτήσεων μιας (ψ) λόγω της σχετικής κινήσεως (εκ περιφοράς) μεταξύ των πρωτονίων και της κυματοσυναρτήσεως x η οποία προέρχεται από τον συνδιασμό των σπιν (σ) των. Δηλαδή θα έχουμε

$$\Phi = \psi x \quad (6.1)$$

Η Φ πρέπει να είναι αντισυμμετρική οπότε εάν η ψ είναι συμμετρική η x θα είναι αντισυμμετρική ή αντίθετα.

Οι δυνατές καταστάσεις των σπιν είναι 4 και δίνονται παραστατικά στο σχήμα 6.1.



Σχήμα 6.1.

Στο σχήμα αυτό παρατηρούμε ότι όταν δύο σπιν $\sigma = 1/2$ έχουν παράλληλες τρίτες προβολές σ_z και προστεθούν δίνουν $J = 1$ περίπτωση (a) ή $J = -1$ περίπτωση (b). Όταν όμως τα σ_z των δύο σωματίων είναι αντίθετα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, την (c) όπου οι διευθύνσεις των J είναι αντίθετες οπότε έχουμε άθροισμα $= 0$ και την (d) όπου το άθροισμα μας δίνει $J = 1$ αλλά $J_z = 0$. Η (b) είναι η κατάσταση Singlet και γράφεται σαν 1L ενώ οι άλλες τρεις περιπτώσεις (a), (c) και (d) μας δίνουν την τριαδική κατάσταση 3L .

Εάν X_α (S, S_z) είναι η κυματοσυνάρτηση του πρωτονίου, οι κυματοσυναρτήσεις του σχήματος 6.1 θα έχουν τις κυματοσυναρτήσεις $X(J, J_z)$ και γράφονται

$$X(1,1) = X_\alpha \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) X_b \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad (6.2)$$

$$X(1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ X_\alpha \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) X_b \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) + X_\alpha \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) X_b \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

$$X(1, -1) = X_\alpha \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) X_b \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \quad (6.4)$$

$$X(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ X_\alpha \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) X_b \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) - X_\alpha \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) X_b \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\} \quad (6.5)$$

Οι (6.2), (6.3), (6.4) είναι συμμετρικές και η (6.5) αντισυμμετρική.

Για τις κυματοσυναρτήσεις που περιγράφουν τα μερικά κύματα με στροφορμή l είναι συμμετρικές για $l = \text{άρτιο}$ και αντισυμμετρικές για $l = \text{περιττό}$.

Για να είναι λοιπόν η ολική κυματοσυνάρτηση (6.1) αντισυμμετρική δύο ίδια νουκλεόνια πρέπει όταν ευρίσκονται στην μοναδιαία κατάσταση να έχουν στροφορμή άρτια ήτοι

$${}^1S, {}^1D, {}^1G \text{ κτλ.}$$

στη δε τριαδική κατάσταση στροφορμή περιττή δηλ.

$${}^3P, {}^3F, \dots \text{ κτλ.}$$

Οι επιτρεπόμενες καταστάσεις δύο ομοίων νουκλεονίων (pp ή nn) είναι λοιπόν οι

$${}^1S, {}^3P, {}^1D, {}^3F, {}^1G, {}^3H, \dots \text{ κτλ.}$$

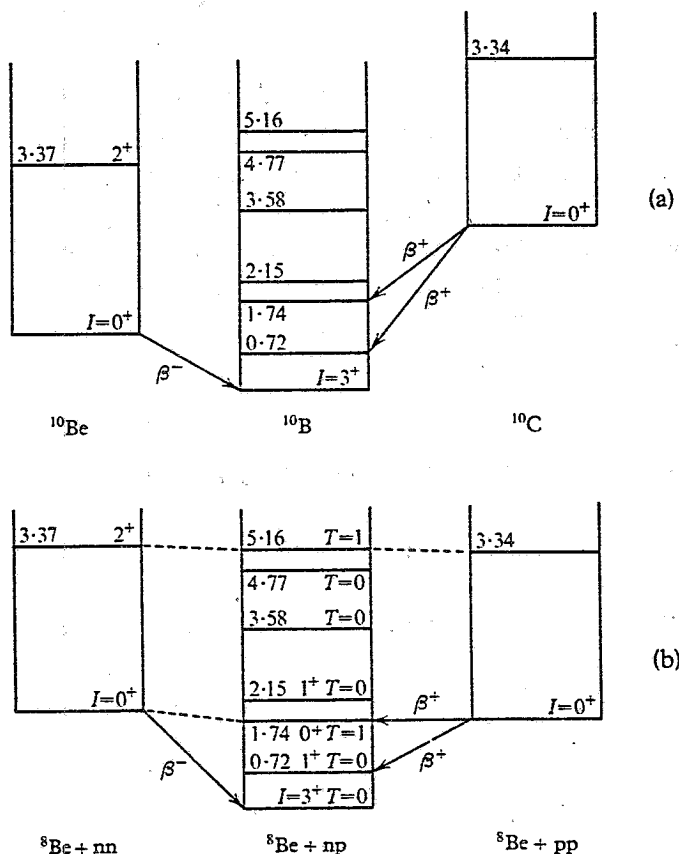
Για δύο ανόμοια νουκλεόνια (pn) δεν έχουμε αυτούς τους περιορισμούς.

Βλέπουμε λοιπόν ότι η εφαρμογή της συμμετρίας "ανταλλαγής" μας καθορίζει επακριβώς τις καταστάσεις που μπορούν να ευρισκονται δύο νουκλεόνια. Αυτή βεβαίως μπορεί να επεκταθεί σε οποιονδήποτε αριθμό νουκλεονίων ή άλλων σωματιδίων.

6.6 "Συμμετρία Φορτίου" και "Ανεξαρτησία Φορτίου"

Η μέχρις τώρα ανάλυση μας ασχολείται με χώρους τους οποίους γνωρίζουμε πολύ καλά και ξέρουμε τις ιδιότητές των. Στη φυσική του

ιδιότητες των σωματιδίων τις οποίες δεν μπορούμε να περιγράψουμε χωρίς να αναφερθούμε σε άλλους χώρους και σε νέους κβαντικούς αριθμούς. Μία τέτοια ιδιότητα των νουκλεονίων παρουσιάζεται στη μελέτη των κατοπτρικών όπως και των ισοβαρών πυρήνων. Ένα παράδειγμα ισοβαρών πυρήνων με $A = 10$ παρουσιάζεται στο σχήμα (6.2).



Σχήμα 6.2.

Στο σχήμα 6.2 έχουμε τα ενεργειακά διαγράμματα για τις θεμελιώδης και τις πρώτες διηγερωμένες στάθμες των πυρήνων ^{10}Be , ^{10}B , ^{10}C σε πραγματική αντιστοιχία δηλαδή οι θεμελιώδης στάθμες έχουν τοποθετηθεί στις ενέργειες που αντιστοιχούν στην μάζα κάθε πυρήνα.

Για να μελετήσουμε την επίδραση των πυρηνικών δυνάμεων υποθέτουμε ότι κάθε ένας πυρήνας αποτελείται από ένα ^8Be με δύο

και διορθώνουμε τα ενεργειακά των διαγράμματα για το πεδίο Coulomb στα ^{10}B και ^{10}C και την διαφορά μάζας μεταξύ p-n. Οι διορθωμένες στάθμες δίνονται στο σχήμα 6.2b. Γνωρίζουμε από την συμμετρία ανταλλαγής ότι λόγω της απαγορευτικής Αρχής του Pauli δύο όμοια νουκλεόνια n-n ή pp μπορούν να βρίσκονται μόνο στην ^1S κατάσταση ενώ το ζεύγος p-n εκτός από την ^1S βρίσκεται και στην ^3S κατάσταση. Αυτό φαίνεται καθαρά και στο σχήμα 6.1b όπου ο πυρήνας ^{10}B έχει πολύ περισσότερες στάθμες από τον $^{10}\text{B}_e$ και ^{10}C . Οι αντίστοιχες ^1S στάθμες των τριων ισοβαρών πυρήνων συνδέονται στο σχήμα b με διακεκωμένες γραμμές και παρατηρούμε ότι έχουν την ίδια πυρηνική ενέργεια συνδέσεως.

Από αυτά και άλλα παρόμοια φαινόμενα έχει βγει το συμπέρασμα ότι η ενέργεια συνδέσεως των νουκλεονίων είναι η ίδια εάν αγνοήσουμε το πεδίο Coulomb. Αυτό οδηγεί ότι η πυρηνική δύναμη μεταξύ $2p$ ή $2n$ ή pn είναι η ίδια και συμπεραίνουμε ότι οι πυρηνικές δυνάμεις έχουν "συμμετρία φορτίου".

Μία επέκταση της συμμετρίας φορτίου είναι και η "ανεξαρτησία φορτίου" κατά την οποία η δύναμη μεταξύ νουκλεονίων εξαρτάται από την κατάσταση των σπιν και της σχετικής στροφορμής. Πειραματικά αποτελέσματα στις χαμηλές ενέργειες επαληθεύουν πλήρως τις δύο παραδοχές.

5.7 Ισοτοπικό Σπιν ή Ισοσπίν

Για την περιγραφή των πάρα πάνω φαινομένων εθεωρήσαμε τα πρωτόνια και τα νετρόνια σαν δύο διαφορετικές μορφές ενός και του ίδιου τωματιδίου του νουκλεονίου. Ο μη-εκφυλισμός που το κάνει διαφορετικά τωματίδια υποτίθεται ότι εξαφανίζεται μόλις "σβήσουμε" (switch off) το πεδίο Coulomb. Αφού ο μη-εκφυλισμός είναι διπλέτα (doublet) τότε κατ' αναλογία με το κοινό σπιν που έχει τις ίδιες ιδιότητες λέμε ότι οι δύο καταστάσεις της διπλέτας αντιστοιχούν στις δύο προβολές ενός νέου φαντικού αριθμού του "ισοτοπικού σπιν ή ισοσπίν". Σε αυτή την περίπτωση έχουμε "ολικό ισοσπίν" $T = 1/2$ με δυνατές τρίτες προβολές $T_1 = \pm 1/2$ και $T_2 = -1/2$ οι οποίες αντιπροσωπεύουν το πρωτόνιο και νετρόνιο αντίστοιχα με κυματοσυναρτήσεις

$$p = \phi_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad n = \phi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Η μαθηματική επεξεργασία του "ισοσπίν" είναι παρόμοια εκείνης του σπιν. Το ισοσπίν όμως δεν έχει το αυτό φυσικό περιεχόμενο όπως η στροφορμή, και ως εκ τούτου θεωρείται ότι απεικονίζεται σε άλλον, "ισοτοπικό", χώρο, εξού και το όνομα.

Η τρίτη προβολή του ολικού ισοσπίν $T_3 =$ φορτίο και η διατήρησή του είναι ταυτόσημη με την διατήρηση του φορτίου. Επί πλέον, παραδεχόμαστε, ότι το ολικό ισοσπίν T διατηρείται κατά τις πυρηνικές αντιδράσεις. Αυτό σημαίνει ότι το T ενός συστήματος σωματιδίων τα οποία συμμετέχουν σε μία αντίδραση πριν και μετά από την αντίδραση πρέπει να είναι το ίδιο.

Γενικά λέμε ότι υπάρχει ο τελεστής $t(t_x, t_y, t_z)$ που ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\hat{t}^2 \phi_{\pm \frac{1}{2}}^{\pm \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \phi_{\pm \frac{1}{2}}^{\pm \frac{1}{2}} \quad \text{και} \quad \hat{t}_z \phi_{\pm \frac{1}{2}}^{\pm \frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{2} \phi_{\pm \frac{1}{2}}^{\pm \frac{1}{2}}$$

Για πυρήνα με A νουκλεόνια έχουμε $\hat{T} = \sum_{i=1}^A \hat{t}_i$ και ο ανυσματικός τελεστής $T (T_x, T_y, T_z)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\hat{T}^2 |T, T_z, \lambda_1\rangle = T(T+1) |T, T_z, \lambda_1\rangle$$

και

$$\hat{T}_z |T, T_z, \lambda_1\rangle = T_z |T, T_z, \lambda_1\rangle$$

Η ιδιοτιμή T είναι πολλαπλάσιο του $1/2$ με $2+1$ προβολές. T_z ισχύει δε η ανισότητα

$$-T \leq T_z \leq T$$

όπου η ιδιοτιμή της τρίτης προβολής T_z είναι

$$T_z = \sum_{i=1}^A t_{z_i} = \frac{1}{2} (Z - N) \quad (6.6)$$

Από τον τύπο βλέπουμε ότι ο υπολογισμός της τρίτης προβολής

σωματιδίων είναι πολύ εύκολο να δούμε εάν ένα σωματίδιο είναι διπλέτα (με $T = 1/2$) όπως το νουκλεόνιο ή τριπλέτα (με $T = 1$) όπως το π-μεσόνιο (π^+ , π^0 και π^-) με σχεδόν τις ίδιες μάζες και παρόμοιες ιδιότητες. Στα σύνθετα συστήματα όμως το θέμα είναι λίγο πιο πολύπλοκο και θα το αναπτύξουμε πιο διεξαγωγικά.

Όπως έχουμε αναφερθεί η μαθηματική επεξεργασία του ισοσπιν είναι ακριβώς ίδια με αυτήν του σπιν. Μπορούμε να βρούμε εύκολα συνδιασμούς δύο (ή περισσότερων) κυματοσυναρτήσεων ισοσπιν ακολουθώντας των μεθόδων που χρησιμοποιήσαμε στην § 6.5 για τα σπιν των σωματιδίων. Κατά πλήρη αντιστοιχεία με τις εξισώσεις (6.2) έως (6.5) έχουμε για δύο νουκλεόνια τις κάτωθι κυματοσυναρτήσεις ισοσπιν.

$$\tau(1,1) = v_\alpha \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) v_b \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad (6.7)$$

$$\tau(1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ v_\alpha \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) v_b \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) + v_\alpha \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) v_b \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\} \quad (6.8)$$

$$\tau(1,-1) = v_\alpha \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) v_b \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \quad (6.9)$$

$$\tau(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ v_\alpha \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) v_b \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) - v_\alpha \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) v_b \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\} \quad (6.10)$$

Από αυτές τις εξισώσεις βλέπουμε ότι δύο πρωτόνια

$$v_\alpha \left(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right) v_b \left(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right)$$

μας δίνουν μία κατάσταση με ολικό ισοσπιν $T = 1$ και τρίτη προβολή $T_z = 1$, δηλ. $\tau(1,1)$ ενώ 2 νετρόνια

$$v_\alpha \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) v_b \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

μας δίνουν την κατάσταση $\tau(1,-1)$. Ο συνδιασμός p-n μπορεί να δώσει μια από τις καταστάσεις $\tau(1,0)$ και $\tau(0,0)$. Οι καταστάσεις με $T = 1$ είναι συμμετρικές και ανήκουν στην τριαδική κατάσταση ισοσπίν, ενώ αυτή με ολικό σπιν $T = 0$ είναι αντισυμμετρική και είναι μοναδιαία κατάσταση ισοσπίν.

Από τις κυματοσυναρτήσεις ισοσπίν βλέπουμε ότι ένα πρωτόνιο και ένα νετρόνιο δεν κάνει μια κατάσταση, η οποία είναι ιδιοκατάσταση των T^2 και T_z . Στην πραγματικότητα ένα τέτοιο ζευγάρι κάνει μια κατάσταση, η οποία είναι επικάλυψη δύο ιδιοκαταστάσεων $\tau(1,0)$ και $\tau(0,0)$ και μπορούμε με κατάλληλους υπολογισμούς από τις (6.7) έως (6.10) να βρούμε ότι

$$v_a \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) v_b \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \tau(1,0) + \tau(0,0) \} \quad (6.11)$$

Η ολική κυματοσυναρτηση δύο νουκλεονίων από απόψεως χώρου, σπιν και ισοσπίν θα είναι

$$\Psi = \psi \times \tau \quad (6.12)$$

και επειδή είναι φερμιόνια πρέπει η Ψ να είναι αντισυμμετρική για την εναλλαγή μεταξύ των δύο νουκλεονίων.

Από όσα έχουμε αναφέρει μέχρι τώρα βλέπουμε ότι σύνθετα συστήματα όπως αυτά του παραδείγματος στο σχήμα 6.10 έχουν διάφορες καταστάσεις ισοσπίν. Οι πυρήνες $^{10}\text{B}_e$ και ^{10}C έχουν καταστάσεις με pp ή nn οπότε είναι μέλη τριαδικών καταστάσεων με $T = 1$ και τρίτες προβολές $T_z = +1$ και -1 αντίστοιχα. Οι στάθμες του ^{10}B έχουν όλες $T_z=0$, αλλά αυτές που αντιστοιχούν στις τριαδικές καταστάσεις έχουν $T=1$, ενώ οι άλλες έχουν $T = 0$.

Σαν παράδειγμα της χρησιμοποίησης του ισοσπίν στις πυρηνικές αντιδράσεις αναφέρουμε την αντίδραση $p \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ και δευτερίου $d(0,0)$ με τον πυρήνα $N^{14}(0,0)$ για την δημιουργία των διηγερωμένων καταστάσεων $N_{3,95}^{+14*}(0,0)$ και $N_{2,35}^{+14*}(1,0)$. Οι δείκτες αναφαιρονται στις ενέργειες διεγέρσεις των πυρήνων σε MeV. Οι αντιδράσεις

$$p + N^{14} \rightarrow N_{3,95}^{+14} + p \quad (6.13)$$

ολικό ισοσπίν T $\frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2}$

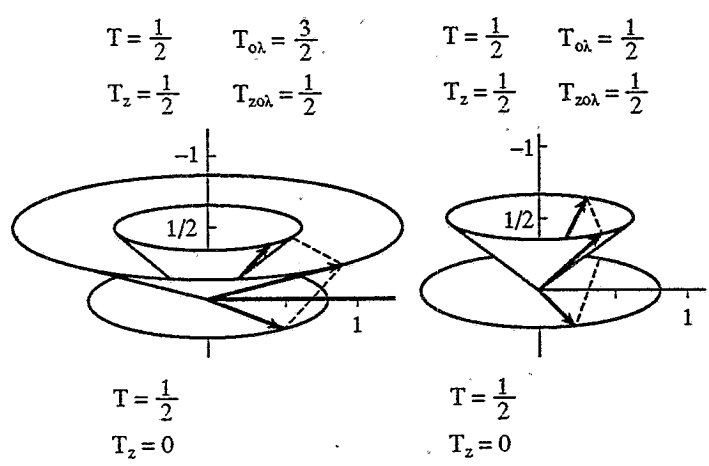
$$\begin{array}{cccc}
 d + N^{14} \rightarrow N_{3,95}^{+14} + d & & & (6.14) \\
 \text{ολικό ισοσπίν } T & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

διατηρούν το ολικό ισοσπίν γιατί όπως φαίνεται στο αριστερό και το δεξιό μέρος της αντιδράσεως έχουμε το ίδιο ολικό σπιν, 1/2 στην αντίδραση (6.13) και 0 στην (6.14).

Στην αντίδραση όμως

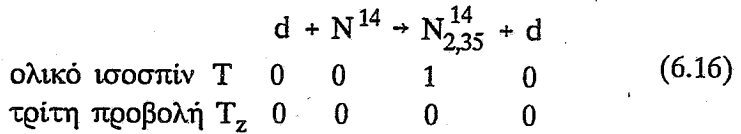
$$\begin{array}{cccc}
 p + N^{14} \rightarrow N_{2,35}^{14} + p & & & \\
 \text{ολικό ισοσπίν } T & \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & (6.15) \\
 \text{τρίτη προβολή } T_z & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}
 \end{array}$$

εκ πρώτης όψεως δε διατηρεί το ολικό ισοσπίν. Αυτό βεβαίως δεν είναι σωστό γιατί ο συνδιασμός δύο ισοσπιν $v_a(1,0)$ $v_b(1/2, 1/2)$ κάνει δύο καταστάσεις $\tau\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και $\tau\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Παρασταστικά τον συνδιασμό αυτού τον παρουσιάζουμε στο σχήμα 6.3.



Σχήμα 6.3.

Το δεξι μέρος της αντιδράσεως (6.15) έχει λοιπόν $T = 1/2$ με τρίτη προβολή $T_z = 1/2$ όπως στην περίπτωση του σχήματος 6.2β και εδώ έχουμε διατήρηση των ολικών ισοσπιν. Στην αντίδραση όμως



βλέπουμε ότι δεν έχουμε διατήρηση του ολικού ισοσπιν γιατί το αριστερό μέρος έχει $T = 0$ και το δεξι $T = 1$. Αυτή η πυρηνική αντίδραση ουδέποτε έχει παρατηρηθεί πειραματικά.

Αυτή και άλλες πολλές τέτοιες αντιδράσεις επιτρέπονται να γίνουν από όλους τους κανόνες και νόμους της Φυσικής πλην της διατηρήσεως του ολικού ισοσπιν. Η μη παρατήρηση των καθιερώνει την ύπαρξη του ισοσπιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ α

7.1 Γενικά

Όπως είναι γνωστό τα νουκλεόνια του πυρήνα ευρίσκονται μέσα στο ελκτικό δυναμικό πεδίο των πυρηνικών δυνάμεων. Πέρα από την ικτίνα δράσεως των πυρηνικών δυνάμεων υπάρχει το απωστικό πεδίο Coulomb το οποίο ακολουθεί τον νόμο:

$$V = Z \cdot q/r$$

Το δυναμικό του πυρήνα θα παρουσιάζει την μορφή του σχήματος

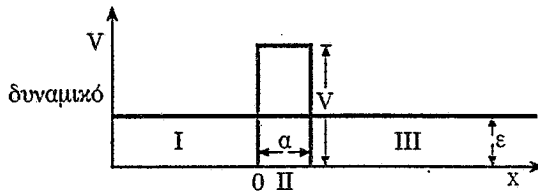
7.2. Για πυρήνες στην θεμελιώδη τους κατάσταση, έχει παρατηρηθεί ότι ουδέποτε αποβάλλουν νουκλεόνια ή δευτέρια, αλλά μόνο σωματίια α και φωμάτια κατά πολύ ελαφρότερα από τα νουκλεόνια όπως τα e^{\pm} και $\bar{\nu}$. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να ερμηνευθεί όταν ληφθεί υπ' όψιν η μεγάλη ενέργεια συνδέσεως του σωματίου α. Κατά τον σχηματισμό ενός φωματίου α από τέσσερα νουκλεόνια μέσα στον πυρήνα μέρος της ενέργειας συνδέσεως των μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια του φωματίου α η οποία συμβάλλει στην διαφυγή του από το φράγμα δυναμικού.

Μια βασική παρατήρηση είναι ότι η ενέργεια των εκπεμπομένων φωματίων α είναι μικρότερη από το ύψος του δυναμικού Coulomb. Δηλαδή το ύψος του φράγματος δυναμικού υπελογίσθηκε σε 8,6 MeV η ενέργεια των σωματίων α ευρέθηκε 4,3 MeV. Επί πλέον η έξοδος των φωματίων α γίνεται μέσα σε πεπερασμένο χρόνο.

Η ερμηνεία αυτών των δύο παρατηρήσεων με την βοήθεια της κλασσικής μηχανικής είναι αδύνατη γιατί: α) εάν τα α σωματίια είχαν ενέργεια μικρότερη από το φράγμα του δυναμικού δεν θα εξήρχοντο από τον πυρήνα και ο πυρήνας θα ήταν σταθερός και β) εάν τα σωματίια α είχαν την ενέργεια να υπερπηδήσουν το δυναμικό τότε θα διέφευγαν από τον πυρήνα σε χρόνο ίσον προς το πηλίκο της διαμέτρου του πυρήνα δια της ταχύτητας του σωματίου. Ο χρόνος αυτός ευρίσκεται ότι είναι πολύ μικρός.

7.2 Φαινόμενο Σύραγγος

Η ερμηνεία αυτού του παραδόξου εδόθη από τους Gamow, Condon και Curney το 1929 με την βοήθεια της κβαντομηχανικής. Εδώ παρουσιάζουμε μια στοιχειώδη λύση του προβλήματος. Για την απλοποίηση του δεχόμεθα ότι το φράγμα του δυναμικού είναι τετραγωνικό με βάθος V (σχήμα 7.1), το δε σωματίο έχει ολική ενέργεια E , μικρότερη από το ύψος του φράγματος V .



Σχήμα 7.1.

Η κίνηση νουκλεονίου μέσα σε τέτοιο δυναμικό περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση u , η οποία δίνεται από την γνωστή λύση της εξίσωσης του Schrödinger,

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V)u = 0 \quad (7.1)$$

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε τρεις περιοχές όπου δίνονται απλές λύσεις.

Στην περιοχή I έχουμε την λύση:

$$u_I = A_I e^{ikx} + B_I e^{-ikx} \quad -\infty < x < 0 \quad (7.2)$$

όπου

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{p}{\hbar} = \frac{1}{\lambda} \quad (7.3)$$

Στην περιοχή II έχουμε:

$$u_{II} = A_{II} e^{Kx} + B_{II} e^{-Kx} \quad 0 < x < a \quad (7.4)$$

με

$$K = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m|E-V|} \quad (7.5)$$

Και στην περιοχή III

$$u_{III} = A_{III}e^{ikx} + B_{III}e^{-ikx} \quad \alpha < x < \infty \quad (7.6)$$

αλλά $B_{III} = 0$ επειδή είναι δυνατό να έχουμε μόνο κίνηση από το φράγμα προς το άπειρο. Οι σταθερές A_I , B_I , A_{II} , B_{II} και A_{III} προκύπτουν από τις οριακές συνθήκες της u . Έτσι πρέπει η u και du/dx να είναι συνεχής στα σημεία $x = 0$ και $x = \alpha$.

Για $x = \alpha$ έχουμε:

$$A_{III}e^{ik\alpha} = A_{II}e^{K\alpha} + B_{II}e^{-K\alpha}$$

και

$$ikA_{III}e^{ik\alpha} = K(A_{II}e^{K\alpha} - B_{II}e^{-K\alpha})$$

δηλ.

$$A_{II} = \frac{A_{III}}{2} \left(1 + \frac{ik}{K} \right) e^{(ik-K)\alpha} \quad (7.8a)$$

$$B_{II} = \frac{A_{III}}{2} \left(1 - \frac{ik}{K} \right) e^{(ik+K)\alpha} \quad (7.8b)$$

Για $x = 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} A_I + B_I &= A_{II} + B_{II} \\ A_I - B_I &= (A_{II} - B_{II}) \frac{K}{ik} \end{aligned}$$

όταν $K\alpha \gg 1$ λόγω της (7.8a) έχουμε:

$$2A_I = B_{II} \left(1 - \frac{K}{ik} \right)$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν την (7.8b) έχουμε:

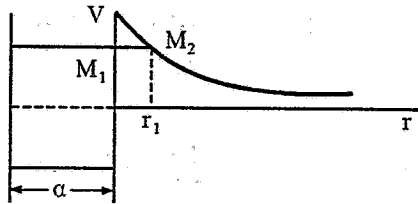
$$2A_I = \frac{A_{III}}{2} \left(1 - \frac{ik}{K}\right) \left(1 - \frac{K}{ik}\right) e^{(ik+K)\alpha}$$

Το πηλίκο $T = \frac{|A_{III}|^2}{|A_I|^2}$ καλείται διαπερατότητα του φράγματος είναι δε ίση με:

$$\frac{|A_{III}|^2}{|A_I|^2} = \frac{16k^2K^2}{(k^2 + K^2)^2} e^{-2K\alpha} = e^{-2K\alpha} = T$$

δηλαδή

$$T = \exp \left[-\frac{2}{\hbar} (2m |E-V|)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (7.9)$$



Σχήμα 7.2.

Στην πραγματικότητα όμως η διαφορά $|E-V|$ δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται με το r (σχήμα 7.2) οπότε η (7.9) γράφεται:

$$T = \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_R^{r_1} (2m |E-V|)^{\frac{1}{2}} dr \right] = e^{-2G} \quad (7.10)$$

όπου

$$G = \frac{1}{\hbar} \int_R^{r_1} (2m |E-V|)^{\frac{1}{2}} dr \quad (7.11)$$

$$V = \frac{zZe^2}{r} \quad \text{και} \quad E = \frac{zZe^2}{r_1}$$

Οπότε εάν η ταχύτης του σωματιδίου α είναι ν έχουμε

$$G = \frac{2zZe^2}{\hbar v} \gamma(\psi), \quad \psi = \frac{R}{r_1}, \quad v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

και

$$\gamma(\psi) = \arccos \sqrt{\psi} - \sqrt{\psi(1-\psi)} \quad (7.13)$$

Αν $\psi \ll 1$ και η ενέργεια E είναι πολύ μικρή τότε έχουμε

$$G = \frac{\pi zZe^2}{\hbar v} - \frac{2e}{\hbar} (2zZmR)^{\frac{1}{2}}$$

Η σταθερά διασπάσεως (λ) του πυρήνα θα εξαρτάται από τον αριθμό των κρούσεων των σωματιών α στο φράγμα ανά sec (f) και θα είναι

$$\lambda = fT = \frac{v_0}{R} T = \frac{v_0}{R} e^{-2G} \quad (7.14)$$

Έτσι για σωματία α με $v_0 = 10^9$ cm sec⁻¹ και $R = 10^{-12}$ cm έχουμε $f = 10^{21}$ απόπειρες διαφυγής.

Ο χρόνος ζωής της ραδιενεργείας α κυμαίνεται μεταξύ $3 \cdot 10^{-7}$ sec (για το ThC') και $4,5 \cdot 10^9$ έτη (για το U²³⁸) δηλ. η διαφάνεια των αντιστοιχων φραγμάτων έχει τις τιμές

$$e^{-2G} = 10^{-13} \quad \text{έως} \quad 10^{-39}$$

Από τις δοθείσες εξισώσεις έχουμε

$$\log \lambda = -\frac{\sqrt{2mB}}{\hbar} R \left(\pi \sqrt{\frac{B}{E}} - 4 \right) + \log \frac{v_0}{R} \quad (7.15)$$

όπου $B = zZe^2/R$ και είναι το ύψος του δυναμικού σε απόσταση R. Από την (7.15) παρατηρούμε ότι ο $\log \lambda$ είναι συνάρτηση της $E^{-1/2}$. Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι $R \propto A^{1/3}$ ευρίσκουμε ότι ο νόμος υποδιπλασιασμού τ σε

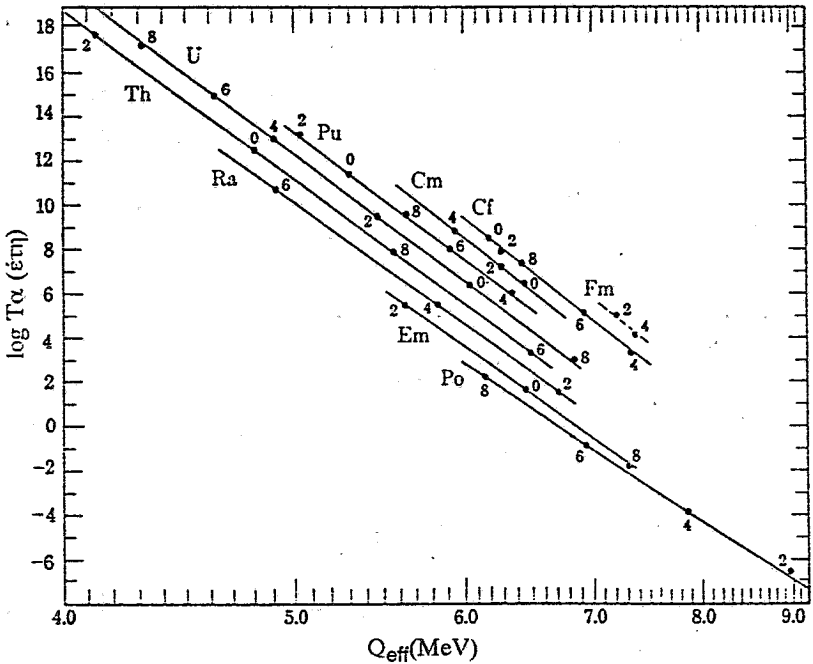
$$\log_{10} t = 1,61 (ZE^{-1/2} - Z^{2/3}) - 28,9 \quad (7.16)$$

όπου E μετριέται σε MeV:

Από την μελέτη των πειραματικών δεδομένων οι Geiger και Nuttall ανεκάλησαν ότι υπάρχει η σχέση:

$$\log \lambda = A \log R + B \quad (7.18)$$

όπου A και B σταθερές και R η εμβέλεια των α -σωματιών των μελών ραδιενεργούς σειράς. Βεβαίως η εμβέλεια των α -σωματιών είναι ανάλογη της ενέργειας των οπότε η σχέση των Geiger-Nuttall (7.18) είναι περίπου η ίδια με τις θεωρητικώς ευρεθέντες σχέσεις (7.15) και (7.16).



Σχήμα 7.3.

Η σημασία της ενέργειας της διάσπασης, Q_{eff} στο καθορισμό του χρόνου ζωής φαίνεται στο σχήμα 7.3. Οι αριθμοί αναφέρονται στον τελευταίο αριθμό του μαζικού αριθμού των στοιχείων της σειράς.

7.3 Λεπτή υφή ακτίνων α. Ενεργειακό διάγραμμα πυρήνα

Αρχικά εθεωρείτο ότι η ενέργεια των εκπεμπομένων σωματίων α από ραδιενεργούς πυρήνες ήταν η ίδια γι' όλα τα σωματία α. Οι ενεργειακές διαφορές είναι μικρές και δεν είναι διακρίσιμες με την μέθοδο της εμβέλειας. Το φαινόμενο αυτό καλείται λεπτή υφή των σωματίων α. Π.χ. κατά την μεταβολή $\text{ThC} \rightarrow \text{ThC}'' + \alpha^*$ ευρέθησαν 6 υποομάδες σωματίων α. Μετά από επισταμένη μελέτη ευρέθηκε ότι κάθε ομάδα ακτίνων α αποτελείται από υποομάδες με διαφορετικές ενέργειες. Οι τιμές της κινητικής ενέργειας των α, και της ολικής ενέργειας του φαινομένου (ενέργ. α + ενέργ. ανακρ. πυρήνα ThC'') δίνονται στον πίνακα 7.1.

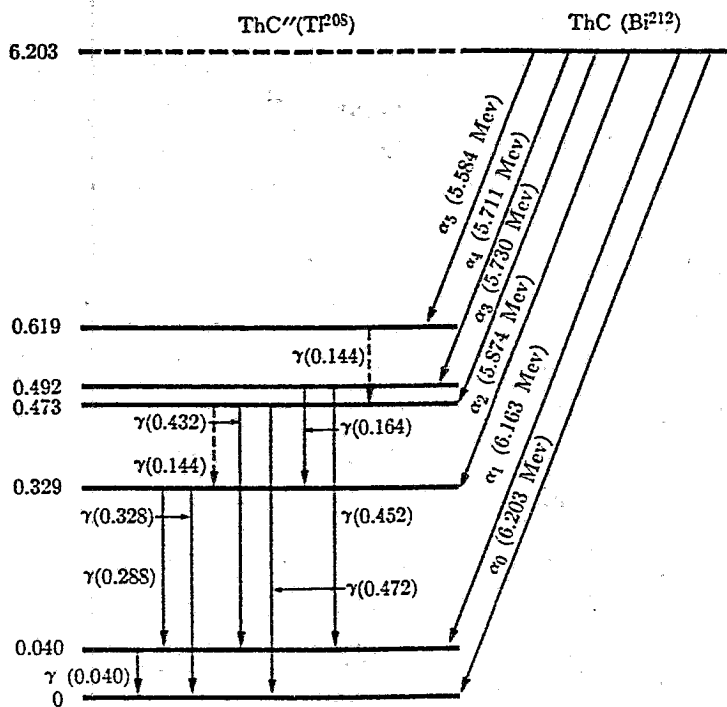
ΠΙΝΑΚΑΣ 7.1.

Ομάδα	Ενέργεια (MeV)	Αριθμός %	$E_{\text{ολική}}$ MeV	ΔE (MeV)
α_0	6,086	27,200	6,203	0,000
α_1	6,047	69,900	6,163	0,040
α_2	5,765	1,700	5,874	0,329
α_3	5,622	0,150	5,730	0,473
α_4	5,603	1,100	5,711	0,492
α_5	5,478	0,016	5,584	0,619

Η μετατροπή $\text{ThC} \rightarrow \text{ThC}''$ συνοδεύεται και από εκπομπή ακτινοβολίας γ . Αυτό συμβαίνει επειδή για κάθε εκπομπή ακτίνων α, ενέργειας η οποία αντιστοιχεί σε μία από τις 5 ομάδες, εκτός από την α_0 , μεταβαίνουμε σε διεγερμένο πυρήνα (ασταθής κατάσταση). Αυτός επανέρχεται στην θεμελιώδη κατάστασή του με εκπομπή ακτίνας γ , ενέργειας ίσης προς την διαφορά ΔE , της ενέργειας, η οποία αντιστοιχεί στην θεμελιώδη κατάσταση (εκπομπή α_0) μείον εκείνης η οποία αντιστοιχεί στην εκπομπή σωματίων α της ομάδας α_i , $i = 2, 3, \dots, 5$.

Με τη βοήθεια του πίνακα 7.1 κατασκευάζουμε το "ενεργειακό διάγραμμα" του ThC (σχήμα 7.4).

Εκτός από τις ακτίνες γ που εκπέμπονται κατά την μετάπτωση του διεγερμένου πυρήνα στην θεμελιώδη κατάσταση λαμβάνονται και ακτίνες γ από τις μεταπτώσεις διεγερμένου πυρήνα σε άλλη επίσης διεγερμένη κατάσταση.



Σχήμα 7.4.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII

ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ γ

8.1 Γενικά

Σε προηγούμενες παραγράφους έχουμε εξετάσει φαινόμενα τα οποία αναφέρονται στην ακτινοβολία γ , όπως το φαινόμενο Compton. Είδαμε επίσης ότι η ακτινοβολία γ προέρχεται από μεταπτώσεις διεγερμένου πυρήνα από μία κατάσταση σ' άλλη. Πάρα κάτω θα εξετάσουμε την θεωρία εκπομπής ακτινοβολίας γ στον πυρήνα.

Οι ενέργειες των γνωστών ακτίνων γ εκτείνονται από 50 KeV περίπου μέχρι 3 MeV και έχουν μήκη κύματος 0,5 Å και $5 \cdot 10^{-3}$ Å αντίστοιχα. Η μελέτη της ακτινοβολίας γ είναι ανάλογη του μηχανισμού εκπομπής φωτονίων από διεγερμένα άτομα. Η αρχική (i) και τελική (f) κατάσταση του πυρήνα είναι κβαντισμένη, η δε μετάπτωση του πυρήνα γίνεται με εκπομπή ακτίνας γ ενέργειας ίσης προς την ενεργειακή διαφορά των δύο καταστάσεων και ο χρόνος μεταπτώσεως εξαρτάται από τις κυματοσυναρτήσεις ψ_i και ψ_f .

Γνωρίζουμε ότι η ακτίνα του πυρήνα δίνεται από την σχέση $R = r_0 A^{1/3}$. Το μήκος κύματος της ακτινοβολίας γ δίνεται από την γνωστή σχέση:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\hbar v/c} = \frac{\hbar c}{E} \quad (8.1)$$

όπου E είναι η ενέργεια της ακτινοβολίας γ σε MeV και λ το μήκος κύματος De Broglie σε cm, ($\lambda = \lambda/2\pi$).

Κατά την μελέτη των ροπών του πυρήνα § 5.10 και 5.11 ήδαμε ότι έχουμε ηλεκτρικές και μαγνητικές ροπές διαφόρων βαθμίδων, οι οποίες μας δίνουν τα πολύπολα. Αυτά τα πολύπολα ενεργοποιούνται κατά την αποδιέγερση του πυρήνα με αντίστοιχη εκπομπή ακτινοβολίας γ . Κάθε πολύπολο έχει την αντίστοιχη στροφορμή L και από την οποία παίρνει την ονομασία του π.χ. για $L = 1$ έχουμε το δίπολο, για $L = 2$, το τετράπολο κ.ο.κ. και η εκπεμπομένη ακτινοβολία γ παίρνει από τον πυρήνα στροφορμή ίση με $L\hbar$. Είναι φανερό ότι έχουμε εκπομπή ακτίνων γ κατά την ανακατανομή των φορτίων δηλαδή από τα ηλεκτρικά πολύπολα

(EL) αλλά και τις αλλαγές των ρευμάτων ή ανακατατάξεις των μαγνητικών ροπών των νουκλεονίων δηλαδή εκπομπή από τα μαγνητικά πολύπολα (ML).

Για τον λόγο αυτό η πιθανότητα μεταπτώσεως του πυρήνα και συνεπώς εκπομπής ακτινοβολίας γ δεν έχει μόνο έναν όρο αλλά δίνεται από απειροσειρά όρων που αναφέρεται στα πολύπολα οι οποίοι είναι ανάλογοι του $(R/\lambda)^{2l}$. Για πυρήνες έχουμε

$$\frac{R}{\lambda} = \frac{r_0 A^{1/3} E (\text{MeV})}{197} = 0,1 \quad (8.2)$$

γιατί $A^{1/3} = 6$ και $E = 1-2 \text{ MeV}$.

Όπως είναι φανερό οι διαδοχικοί όροι της σειράς μειώνονται γρήγορα και η πιθανότητα διασπάσεως δίνεται σχεδόν καθ' ολοκληρία από τον πρώτο μη μηδενιζόμενο όρο της σειράς. Στις πυρηνικές ενέργειες μπορεί να μετρηθούν ακόμη και μικρές πιθανότητες μετατροπών, έτσι οι πρώτοι μη μηδενιζόμενοι όροι της σειράς έχουν σημασία και πρέπει να υπολογισθούν. Σε σύγκριση με την ατομική φυσική έχουμε ότι $(R/\lambda_{\text{at}}) \approx 10^{-3}$, οπότε οι όροι με $l > 1$ είναι πάρα πολύ μικροί και μπορεί να αγνοηθούν. Επειδή κάθε όρος της σειράς αυτής έχει σημασία στην πυρηνική φυσική, γι' αυτό, εξετάζεται χωριστά, για το φυσικό του περιεχόμενο και τις συνθήκες κάτω από τις οποίες γίνεται ουσιώδης.

8.2 Θεωρία ακτινοβολίας γ

Η θεωρία της ακτινοβολίας γ παρουσιάζεται στο Παράρτημα Α. Σε αυτή βλέπουμε ότι οι λύσεις των εξισώσεων Maxwell σε ομοιογενές χώρο χωρίς πηγές εκφράζεται σαν γραμμική επαλληλία δύο υποπεδίων, τα οποία είναι το "ορθογώνιο μαγνητικό ή ηλεκτρικό" και το "ορθογώνιο ηλεκτρικό ή μαγνητικό" μέρος του ολικού πεδίου, δίδονται δε από τις εξισώσεις (Α.6).

Οι γενικές λύσεις των εξισώσεων (Α.6) είναι λύσεις της γνωστής βαθμωτής κυματικής εξισώσεως του Helmholtz και μπορούν να δοθούν σαν συνάρτηση των σφαιρικών συναρτήσεων Henkel (συνδιασμός Bessel και Neumann) πολλαπλασιαζόμενες με τις σφαιρικές αρμονικές $Y_{lm}(\theta, \phi)$. Οι λύσεις αυτές συνιστούν μια σειρά πολυπολικών ακτινοβολιών που χαρακτηρίζονται μόνο από την τιμή της στροφορμής l και είναι για τα ηλεκτρικά E και μαγνητικά M πεδία:

$$\mathbf{B}_1^E(\mathbf{r}) = \sum_m f_{1m}^E(kr) \mathbf{X}_{1m}(\theta, \phi) \quad (8.3)$$

$$\mathbf{E}_1^E(\mathbf{r}) = \frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon} k} (\nabla \times \mathbf{B}_1^E) \quad (8.4)$$

$$\mathbf{E}_1^M(\mathbf{r}) = \sum_m f_{1m}^M(kr) \mathbf{X}_{1m}(\theta, \phi) \quad (8.5)$$

$$\mathbf{B}_1^M(\mathbf{r}) = \frac{-i\sqrt{\mu\epsilon}}{k} (\nabla \times \mathbf{E}_1^M) \quad (8.6)$$

με

$$\mathbf{X}_{1m} = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \mathbf{I} Y_{1m}(\theta, \phi) \quad (8.7)$$

όπου \mathbf{I} είναι η στροφορμή και $f_{1m}^{E, M}$ συνδέονται με τις συναρτήσεις Bessel και Neuman.

Αντί των \mathbf{B} και \mathbf{E} μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} , το οποίο ορίζεται από τις σχέσεις

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{ik}{\sqrt{\mu\epsilon}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (8.8)$$

και

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (8.9)$$

οπότε θα έχουμε

$$\mathbf{A}_{1m}^E = \frac{1}{k^2} \nabla \times (f_{1m}^E(kr) \mathbf{X}_{1m}(\theta, \phi)) \quad (8.10)$$

και

$$\mathbf{A}_{1m}^M = -\frac{i\sqrt{\mu\epsilon}}{k} f_{1m}^M(kr) \mathbf{X}_{1m}(\theta, \phi) \quad (8.11)$$

Επειδή το η/μ πεδίο μπορεί να περιγραφεί από ένα ανυσματικό πεδίο \mathbf{A} οδηγούμεθα στον καταλογισμό του σπιν του η/μ πεδίου σε $\mathbf{S}=1$.

Κατά παρόμοιο τρόπο μπορούμε να λύσουμε τις εξισώσεις Maxwell σε χώρο με πηγές και να υπολογίσουμε τις συνιστώσες του

ανυσματικού η/μ πεδίου A_{1m}^E και A_{1m}^M και να προσδιορίσουμε τις παραμέτρους $f_{1m}^{E,M}$ ή τις παρομοιές των $C_{1m}^{E,M}$ από τις οριακές συνθήκες.

Για να υπολογίσουμε την σταθερά διασπάσεως λ_{fi} βρίσκουμε τον ρυθμό μεταπτώσεως ανά μονάδα χρόνου από την αρχική (i) στην τελική (f) κατάσταση χρησιμοποιώντας τον δεύτερο Χρυσό Κανόνα του Fermi, δηλ.

$$w_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} \rho_f | \langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle |^2 \quad (8.12)$$

όπου ρ_f η πυκνότητα των τελικών καταστάσεων και H' η Χαμιλτονιανή της αντιδράσεως η οποία είναι

$$H' = - \sum_j \frac{e_j}{M} \frac{\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_j}{z} - \frac{e\hbar}{2M} \sum_j \mu_j \sigma_j \cdot \mathbf{B} \quad (8.13)$$

Σε αυτή την σχέση p_j είναι η ορμή κάθε νουκλεονίου με φορτίο, σπιν και μαγνητική ροπή e_j , σ_j και μ_j αντίστοιχα.

Η αντικατάσταση των αντιστοιχων τιμών $A_{1m}^{E,M}$ στην (8.13) θα μας δώσει τις τιμές για την $w_{fi}^{E,M}$. Πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν ότι η ορμή p κβαντομηχανικά γίνεται τελεστής με την γνωστή σχέση $p_i \rightarrow -i\hbar \nabla$. Τελικά έχουμε ότι

$$w_{fi}^{E,M} = \frac{2[4\pi]}{\epsilon_0 \hbar} \frac{1+1}{I[(2l+1)!!]^2} k^{2l+1} | \langle f | M_{1m}^{E,M} | i \rangle |^2 \quad (8.14)$$

οι τελεστές των ηλεκτρικών και μαγνητικών ροπών $M_{1m}^{E,M}$ δίνονται από τις σχέσεις (A.47) και (A.48) και ο ρυθμός μεταπτώσεως ανά μονάδα χρόνου είναι διαφορετικός για τα ηλεκτρικά από τα μαγνητικά πολύπολα και εξαρτάται επί πλέον από τις καταστάσεις του αρχικού και τελικού πυρήνα.

8.3 Ομοτιμία και Κανόνες Επιλογής

Για να μπορέσουμε να απλοποιήσουμε τις δυνατές περιπτώσεις των πολύπολων χρησιμοποιούμε και την ομοτιμία, η οποία είναι και αυτή μαζί με το l και m καλός κβαντικός αριθμός της αντιδράσεως. Υπολογίζεται ότι για να διατηρείται η ομοτιμία όταν έχουμε μετάβαση από την αρχική κατάσταση με ομοτιμία π_i στην τελική κατάσταση με ομοτιμία π_f για τα μεν ηλεκτρικά πολύπολα έχουμε

$$\pi_i \pi_f = (-1)^l \quad (8.15)$$

δηλ. για 1 περιττή έχουμε αλλαγή ομοτιμίας, για 1 άρτιο δεν έχουμε αλλαγή ομοτιμίας.

Για την ακτινοβολία μαγνητικών πολυπόλων έχουμε:

$$\pi_i \pi_f = (-1)^{l+1} \quad (8.16)$$

δηλ. το αντίστροφο της προηγούμενης περιπτώσεως:

Με τα πάρα πάνω μπορούμε να εύρουμε κανόνες επιλογής οι οποίοι ορίζουν τους συνδυασμούς εκείνους της L και της ομοτιμίας για τους οποίους η πιθανότητας εκπομπής ακτινοβολίας γ δεν είναι μηδενική (πίνακας 8.1).

ΠΙΝΑΚΑΣ 8.1.

Είδος ακτινοβολίας	Σύμβολο	Μεταβολή l	Μεταβολή ομοτιμίας
Ηλεκτρική δίπολη	E_1	1	ναι
Μαγνητική δίπολη	M_1	1	όχι
Ηλεκτρική τετράπολη	E_2	2	όχι
Μαγνητική τετράπολη	M_2	2	ναι
Ηλεκτρική οκτάπολη	E_3	3	ναι
Μαγνητική οκτάπολη	M_3	3	όχι

Π.χ. εάν η αρχική κατάσταση του πυρήνα έχει στροφορμή $J = 1$ και ομοτιμία $+1$, (1^+), η δε τελική κατάσταση είναι 2^- τότε έχουμε αλλαγή της ομοτιμίας. Για μετάπτωση από $J_i = 1$ σε $J_f = 2$ το τρίγωνο των στροφορμών δίνει τις εξής δυνατές τιμές $l = 1, 2$ ή 3 , γιατί $|J_i - J_f| \leq l \leq |J_i + J_f|$. Από αυτές συμπεραίνουμε ότι θα έχουμε μόνο τις πολυπολες ακτινοβολίες E_1, M_2 και E_3 .

8.4 Αριθμητικά Παραδείγματα

Για να υπολογιστούν οι πιθανότητες μεταπτώσεως πρέπει να γνωρίζουμε τις αρχικές $|i\rangle$ και τελικές $|f\rangle$ καταστάσεις του πυρήνα. Αυτό είναι δυνατόν εάν υποθέσουμε ένα υπόδειγμα του πυρήνα σαν π.χ.

το υπόδειγμα των φλοιών, οπότε θα έχουμε για τις πιθανότητες λ_1^E και λ_1^M .

$$\lambda_1^E = 2\pi\nu \frac{e^2}{\hbar c} S \left(\frac{R}{\lambda} \right)^{2l}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (8.17)$$

$$\lambda_1^M = 2\pi\nu \frac{e^2}{\hbar c} (10S) \left(\frac{\hbar}{\mu c R} \right)^2 \left(\frac{R}{\lambda} \right)^{2l}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (8.18)$$

όπου m η μάζα του νουκλεονίου και

$$S = \frac{2(l+1)}{l![(2l+1)!!]^2} \left(\frac{3}{l+3} \right)^2$$

Αντικατάσταση των αριθμητικών τιμών στους τύπους (8.17) και (8.18) δίνει:

$$\lambda_1^E = 2,4S (r_0 A^{1/3})^{2l} \left(\frac{E_{(\text{MeV})}}{197} \right)^{2l+1} \cdot 10^{21} \text{sec}^{-1} \quad (8.19)$$

$$\lambda_1^M = 0,55S \frac{1}{A^{2/3}} (r_0 A^{1/3})^{2l} \left(\frac{E}{197} \right)^{2l+1} \cdot 10^{21} \text{sec}^{-1} \quad (8.20)$$

Από αυτές τις σχέσεις παρατηρούμε ότι αυξανόμενης της ενέργειας αυξάνεται και η πιθανότητα λ_1^E και λ_1^M . Αυξανόμενης της l και επειδή $E/197 \ll 1$, η πιθανότητα λ ελαττώνεται. Για $A = 80$ και $R = 6$ fm υπολογίζουμε βάσει των τύπων (8.19) και (8.20) τον μέσο χρόνο ζωής για την ακτινοβολία διαφορετικών ηλεκτρικών και μαγνητικών πολυπόλων και τους παρουσιάζουμε στον πίνακα 8.2.

Από τα αριθμητικά παραδείγματα συμπεραίνουμε ότι όταν η στροφορμή την οποία αποκομίζει η ακτίνα γ είναι μικρή ($l = 1$ ή 2) δηλαδή όταν η αλλαγή της στροφορμής του πυρήνα είναι μικρή, τότε η πιθανότητα διασπάσεως είναι μεγάλη και ο μέσος χρόνος ζωής βραχύς. Για μεγάλες όμως αλλαγές στροφορμής ($l = 5$) η πιθανότητα διασπάσεως γίνεται μικρή και ο μέσος χρόνος ζωής του φαινομένου παίρνει εξαιρετικά μεγάλες τιμές.

ΠΙΝΑΚΑΣ 8.2.

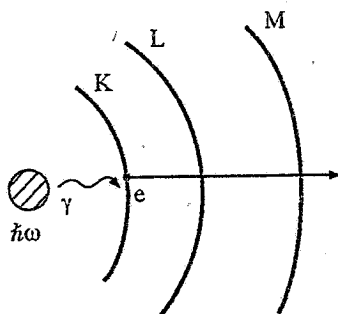
Τύπος ακτινοβολίας	Μεταβολή της 1 σε μονάδες \hbar	Μέσος χρόνος ζωής σε sec Ενέργεια ακτινοβολίας γ		
		1 MeV	0,2 MeV	0,05 MeV
E ₁	1	$3 \cdot 10^{-16}$	$3 \cdot 10^{-14}$	$2 \cdot 10^{-12}$
M ₁	1	$3 \cdot 10^{-14}$	$3 \cdot 10^{-12}$	$2 \cdot 10^{-10}$
E ₂	2	$7 \cdot 10^{-12}$	$3 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 10^{-5}$
M ₂	2	$8 \cdot 10^{-10}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-3}$
E ₅	5	$8 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^{12}$	$2 \cdot 10^{19}$
M ₅	5	$9 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^{14}$	$2 \cdot 10^{21}$

Η πάρα πάνω θεωρία αποδίδει μόνο γενικές γραμμές από τα χαρακτηριστικά του φαινομένου. Η εύρεση ακριβεστερών τιμών της σταθεράς διασπάσεως συναρτήσει της στροφορμής, της ενέργειας και του αζιμικού αριθμού των ραδιενεργιών πυρήνων μπορεί να επιτευχθεί με την ισότητα πολυπλοκωτέρων υποδειγμάτων πυρήνων, τα οποία λαμβάνουν υπ' όψη των και άλλες ιδιότητες αυτών.

8.5 Εσωτερική μετατροπή

Μία ακτινοβολία γ είναι δυνατόν να απορροφηθεί από ηλεκτρόνιο ενός ατόμου και να έχουμε εκπομπή ηλεκτρονίων (σχήμα 8.1), με κινητική ενέργεια $E_{\text{κιν}}$ ίση

$$E_{\text{κιν}} = \hbar\omega - E_{\text{ιον}}$$



Αν λοιπόν είναι γνωστός ο φλοιός από τον οποίο απεσπάσθηκε το ηλεκτρόνιο μπορούμε να εύρουμε την ενέργεια $\hbar\omega$ του φωτονίου το οποίο προκάλεσε το φαινόμενο.

8.6. Ισομερείς μεταπτώσεις και μετασταθείς στάθμες

Όταν η πιθανότης μεταπτώσεως από μία στάθμη ελαττούται τότε ο χρόνος υποδιπλασιασμού της στάθμης αυτής αυξάνεται μεταξύ των ορίων 10^{-16} sec και έτη. Τις μακρόβιες αυτές μεταπτώσεις καλούμε ισομερείς και τις στάθμες μετασταθείς.

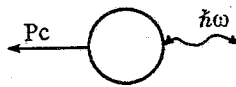
8.7. Πυρηνικός φθορισμός (Nuclear fluorescence)

Τα φαινόμενα του συντονισμού και φωσφορισμού παρατηρούνται στην πυρηνική φυσική πολύ δύσκολα επειδή οι γραμμές του φάσματος απορροφήσεως των πυρήνων είναι πολύ λεπτές και απορροφούν ελάχιστο ποσό ενέργειας από την ακτινοβολία του συνεχούς φάσματος.

Στην ατομική φυσική χρησιμοποιούμε φως από πηγές της ίδιας φύσεως με το ακτινοβολούμενο υλικό και μπορούμε έτσι να διεγείρουμε τα άτομα και ως εκ τούτου να λάβει χώρα φθορισμός και συντονισμός. Στην πυρηνική φυσική κατά την εκπομπή ή απορρόφηση ενέργειας λαμβάνει χώρα ανάκρουση του πυρήνα, η οποία οπωσδήποτε καταστρέφει τον συντονισμό. Εάν ο πυρήνας του σχήματος 8.2 εκπέμπει ακτινοβολία ενέργειας $\hbar\omega$ τότε λόγω ανακρούσεως αποκτά ορμή p κατά την αντίθετη διεύθυνση από εκείνη της εκπομπής. Έτσι ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$\hbar\omega + \frac{p^2}{2m} = E \quad \text{και} \quad \hbar\omega = pc \quad (8.21)$$

όπου E η ενέργεια μεταπτώσεως.



Σχήμα 8.2.

Από την πρώτη των σχέσεων (8.21) λαμβάνουμε ότι:

$$\hbar\omega = E - \frac{p^2}{2m} \quad (8.22)$$

Ανάλογα κατά την απορρόφηση ενέργειας του πυρήνα ισχύει η σχέση (σχήμα 8.3):

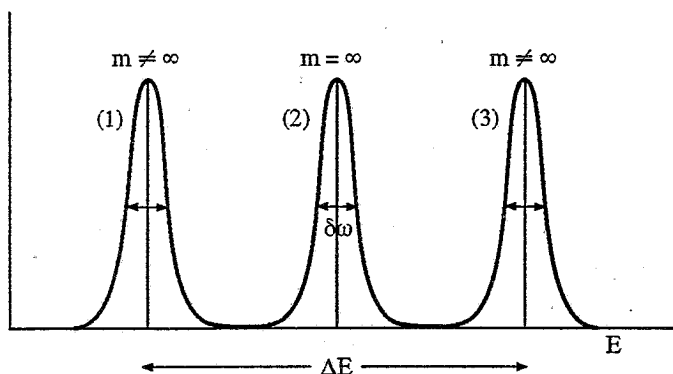
$$\hbar\omega' = E + \frac{p^2}{2m} \quad (8.23)$$



Σχήμα 8.3.

Το φάσμα εκπομπής ενός πυρήνα θα έχει την μορφή του σχήματος 8.4 καμπύλη (2). Παρατηρούμε ότι οι γραμμές εκπομπής, έχουν ένα φυσικό πλάτος $\delta\omega = 1/\tau$ όπου τ ο μέσος χρόνος ζωής της διεγερμένης κατάστασης.

Όταν η μάζα (m) του ανακρουσθέντος πυρήνα θεωρηθεί άπειρη, τότε η μέση ενέργεια των ακτίνων γ θα είναι ίση με την ενεργειακή διαφορά μεταπτώσεως του πυρήνα (E), το φάσμα δε εκπομπής των ακτίνων γ δίνεται από την καμπύλη (2) του σχήματος 8.4.



Σχήμα 8.4.

Για πεπερασμένη μάζα m , ο όρος $p^2/2m$ της εξίσωσης 8.22 παίρνει μη μηδενική τιμή και έτσι η μέση τιμή της ενέργειας των ακτίνων γ θα δίνεται από την καμπύλη (1) του σχήματος 8.4. Θα έχουμε τότε μετατόπιση του φάσματος εκπομπής προς τις μικρότερες ενέργειες. Για να διεγερθεί ο ίδιος πυρήνας απαιτείται στο κέντρο μάζας του ενέργεια E . Η ενέργεια αυτή αντιστοιχεί στο σύστημα εργαστηρίου με ενέργεια φωτονίου, η οποία δίνεται από τον τύπο 8.23, όπου, ο πρόσθετος όρος $p^2/2m$ προέρχεται από την κίνηση του διεγερμένου πυρήνα λόγω της διατήρησης της ορμής.

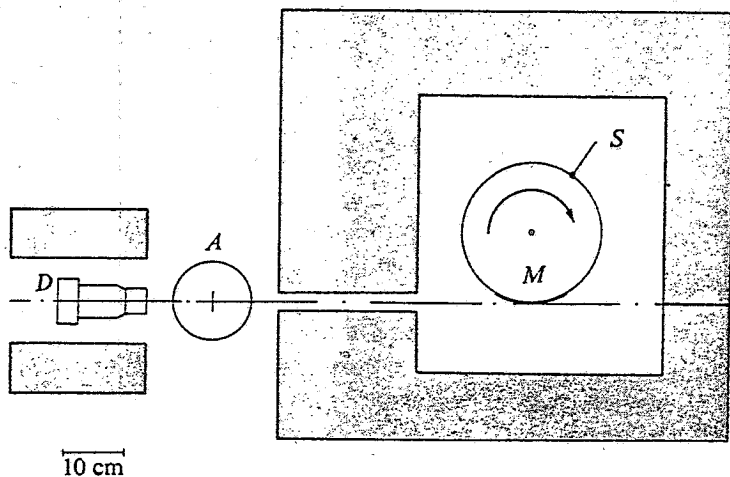
Το ενεργειακό φάσμα των φωτονίων τα οποία μπορούν να διεγείρουν πυρήνες μάζας m δίνεται από τις καμπύλες (3) του σχήματος 8.4. Για να δυνηθούν π.χ. ακτίνες γ προερχόμενες από Au^{198} να διεγείρουν πυρήνες Au^{198} , χρειάζονται πρόσθετη ενέργεια $\Delta E = 0,41 \text{ MeV}$, η οποία αντιστοιχεί σε ταχύτητα του πυρήνα $v = 0,67 \times 10^5 \text{ cm/sec}$. Έτσι εάν ο πυρήνας Au^{198} είχε ταχύτητα $v = 0,67 \cdot 10^5 \text{ cm/sec}$ προς τον στόχο, τότε λόγω του φαινομένου Doppler η ενέργεια των ακτίνων γ θα εφαινότο αυξημένη κατά $0,41 \text{ MeV}$, θα ελάμβανε δε χώρα απορρόφηση από Au^{198} και συντονισμός.

8.8 Φαινόμενο Mössbauer

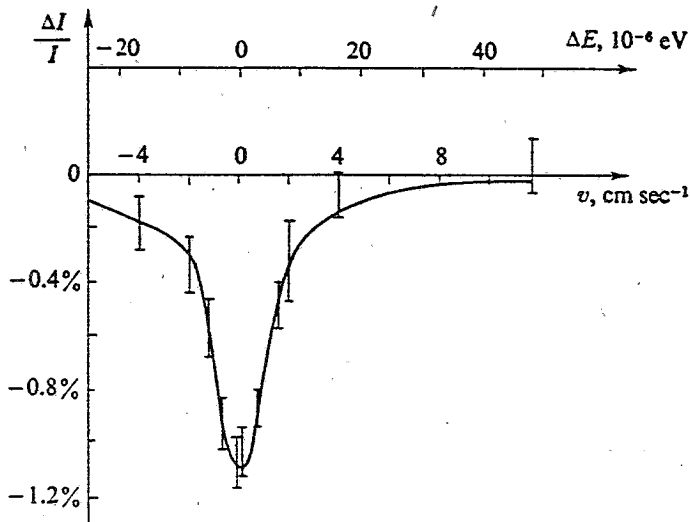
Ένας άλλος τρόπος λύσεως του προβλήματος είναι ο εξής. Αν κάνουμε τους πυρήνες μέλη ενός κρυστάλλου τότε η μάζα ανακρούσεως υπό ωρισμένες συνθήκες είναι η μάζα του κρυστάλλου (φαινόμενο Mössbauer). Σε πολύ μικρή θερμοκρασία ο αριθμός των συχνοτήτων διεγέρσεως του κρυστάλλου είναι μικρός. Έτσι είναι δυνατό να επιλεχθούν συνθήκες κατά τις οποίες η ενέργεια ανακρούσεως δεν είναι ικανή να συντονισθεί σε μία από τις ενέργειες διεγέρσεως του κρυστάλλου, οπότε η απορρόφηση της ενέργειας είναι μηδενική και έτσι η μάζα ανακρούσεως παρουσιάζεται άπειρη.

Για να λάβει χώρα το πάρα πάνω φαινόμενο συνήθως βάζουμε τους κρυστάλλους απορρόφησης και εκπομπής μέσα σε χώρους χαμηλής θερμοκρασίας (κρυστάτες) όπως φαίνεται στο σχήμα 8.5. Μπορεί όμως να αποφύγουμε την χαμηλή θερμοκρασία σε μερικά πειράματα εάν χρησιμοποιήσουμε ειδικούς κρυστάλλους.

Ο ένας από τους κρυστάλλους, A , παραμένει ακίνητος μπροστά στον μετρητή D , ο δε άλλος κινείται κατά ορισμένο γνωστό τρόπο όπως π.χ. η πηγή των ακτίνων γ (S) τίθεται σε περιστρεφόμενο δίσκο.



Σχήμα 8.5.



Σχήμα 8.6.

Η μέθοδος αυτή είναι τόσο ευαίσθητη ώστε εάν παραστήσουμε την εξάρτηση της απορροφήσεως φωτονίων (επί τοις %) από την ταχύτητα περιστροφής του κρυστάλλου εκπομπής (I^{191} σε $T = 88^\circ\text{K}$) λαμβάνουμε την καμπύλη του σχήματος 8.6.

του εύρους ΔE ή τιμή του χρόνου ζωής του ραδιενεργού πυρήνα ακριβώς. Σαν παράδειγμα αναφέρουμε ότι η ακρίβεια της μεθόδου είναι τόσο μεγάλη ώστε έχει προσδιοριστεί ότι η διεγερμένη κατάσταση του ^{57}Fe με ενέργεια διεγέρσεως 14.4 KeV έχει ΔE ή εύρος (βλέπε § 11.2) $\Gamma = 4.6 \cdot 10^{-9}$ eV με τον αντίστοιχο χρόνο ζωής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΧ

ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ β

9.1 Γενικά

Προηγουμένως στην παράγραφο 8.5 είδαμε ότι αν ακτινοβολία γ απορροφηθεί από περιφερειακά ηλεκτρόνια του ίδιου ατόμου, έχουμε εκπομπή ηλεκτρονίων ωρισμένης ενέργειας (ηλεκτρόνια με φάσμα ενέργειας γραμμικό).

Ευρέθησαν όμως και ηλεκτρόνια με συνεχές φάσμα ενέργειας και ωρισμένο μέγιστο όπως στο σχήμα 9.1. Τα ηλεκτρόνια αυτά προέρχονται από τις ακόλουθες μετατροπές, οι οποίες λαμβάνουν χώρα μέσα στον πυρήνα.

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e + Q \quad (9.1)$$

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e - Q \quad (9.2)$$

Δηλαδή λαμβάνει χώρα μετατροπή νετρονίου σε πρωτόνιο ή αντίστροφα με την σύγχρονη εκπομπή ενός ηλεκτρονίου ή ποζιτρονίου συνοδευομένων από ένα αντινεutrino ή νεutrino αντίστοιχα. Κατ' αυτές τις διασπάσεις παρατηρείται μόνο η εξερχόμενη ακτινοβολία β , γιατί το νεutrino έχει ουδέτερο φορτίο και πολύ μικρή ενεργό διατομή με τους πυρήνες της ύλης.

Η ιστορία της ανακάλυψης του νετρονίου είναι πολύ ενδιαφέρουσα γιατί απέδειξε πανηγυρικά την καθολική εφαρμογή μερικών από τους νόμους της φυσικής. Επειδή η ανίχνευση του νετρονίου δεν ήτο δυνατή με τα πειραματικά μέσα του 1936 πολλοί επιστήμονες αμφισβήτησαν την διατήρηση της ορμής, στροφορμής και της ενέργειας κατά την εκπομπή της ακτινοβολίας β . Ο Pauli όμως παραδεχόμενος τους πάρα πάνω φυσικούς νόμους υπεστήριξε ότι πρέπει να λαμβάνει μέρος στην αντίδραση εκπομπής ακτινοβολίας β και άλλο σωματίο με τις εξής ιδιότητες:

$$\text{φορτίο } 0, \text{ μάζα } m_\nu \approx 0, \text{ spin} = 1/2 \hbar$$

Ο Fermi ταυτόχρονα ανέπτυξε ποιοτική και ποσοτική θεωρία της ακτινοβολίας β , η οποία με αρκετές επεκτάσεις ισχύει μέχρι σήμερα. Αυτή δίνεται πιο κάτω.

Κατά την εκπομπή ακτινοβολίας β έχουμε μεταβολή του μαζικού αριθμού $\Delta A = 0$, του δε ατομικού αριθμού ΔZ (ήτοι του φορτίου του πυρήνα) κατά μία μονάδα, $\Delta Z = \pm 1$. Οπότε έχουμε μεταβολές μεταξύ ζευγαριών ισοβαρών πυρήνων και ανάλογες μεταβολές στα ατομικά ηλεκτρόνια.

Αν υποθέσουμε ότι πυρήνας M με τα στοιχεία A και Z εκπέμπει ακτινοβολία β τότε ισχύουν τα εξής:

Αντίδραση εκπομπής	Ενέργεια προ	Ενέργεια μετά
β^-	$zM^A c^2$	$z-1M^A c^2 + m_0 c^2 + Q_{\beta^-}$
β^+	$z-1M^A c^2$	$zM^A c^2 + m_0 c^2 + Q_{\beta^+}$
Σύλληψη ηλεκτρονίου (E.C)	$z-1M^A c^2$	$zM^A c^2 + Q_{EC}$

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι μπορεί πυρήνας ατομικού αριθμού $z+1$ να προσλάβει ηλεκτρόνιο (σύλληψη ηλεκτρονίου, Electron Capture) και να μεταπέσει σε διεγερμένο πυρήνα ατομικού αριθμού z . Ο θυγατρικός ουδέτερος πυρήνας, ο οποίος προκύπτει από τον z έχει ενέργεια:

$${}_{z+1}M^A c^2 = {}_z M^A c^2 + m_0 c^2 - I \quad (9.3)$$

όπου I το έργο του ατόμου.

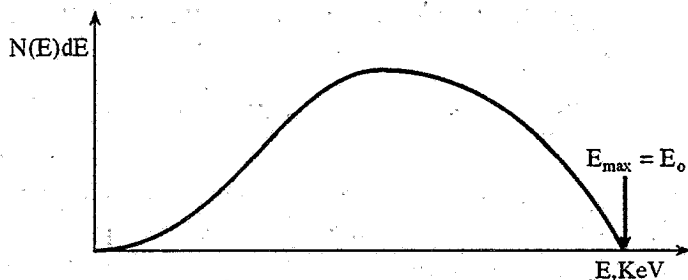
Από τα ανωτέρω προκύπτει ότι

$$Q_{\beta^-} = {}_z M^A c^2 - {}_{z+1} M^A c^2 - I \quad (9.4)$$

$$Q_{\beta^+} = {}_{z+1} M^A c^2 - {}_z M^A c^2 - 2m_0 c^2 + I \quad (9.5)$$

9.2 Το ενεργειακό φάσμα της Ακτινοβολίας β (Θεωρία Fermi)

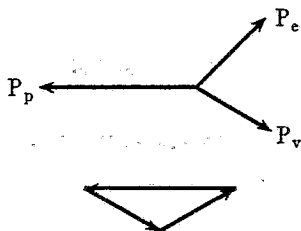
Όπως έχουμε πει, το ενεργειακό φάσμα της ακτινοβολίας β έχει



Σχήμα 9.1.

όπου η ενέργεια E_0 είναι η ολική ενέργεια εκπομπής των ακτίνων β .

Το φάσμα αυτό προέρχεται από την διάσπαση του μητρικού πυρήνα σε τρία σωματίδια όπως π.χ. η (9.2a). Κατά την αντίδραση αυτή το τρίγωνο των ορμών (σχήμα 9.2), είναι κλειστό η δε ενέργεια του συστήματος πρέπει να διατηρείται.



Σχήμα 9.2.

Ο Fermi πρώτος ανέπτυξε την θεωρία της ακτινοβολίας β , η οποία με κατάλληλες προσθέσεις χρησιμοποιείται μέχρι σήμερα. Υποθέτουμε πρώτα την διάσπαση ενός νετρονίου σε πρωτόνιο, ηλεκτρόνιο και αντινεutrino (δηλ. $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$) και παρουσιάζουμε τις κυματοσυναρτήσεις των δύο ελαφρών σωματιών με επίπεδα κύματα κατά τη διεύθυνση εκπομπής των δηλ. $\psi_p = N_p \exp(i\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r})$ και $\psi_\nu = N_\nu \exp(i\mathbf{k}_\nu \cdot \mathbf{r}_\nu)$, όπου \mathbf{k} είναι ο κυματριθμός του σωματιδίου.

Η αρχή του συστήματος των συντεταγμένων υποτίθεται ότι είναι ο πυρήνας και δεν λαμβάνεται (παρά έμμεσα) υπ' όψη η ανάκρουση του πυρήνα. Επίσης σε πρώτη προσέγγιση αγνοείται η αντίδραση Coulomb μεταξύ του φορτίου του πυρήνα και του ηλεκτρονίου.

Ο Fermi υπέθεσε ότι η αντίδραση είναι ανάλογη με την σύγχρονη επικάλυψη (overlap) των τεσσάρων σωματιών, και για απλά σημειακά νουκλεόνια έχουμε:

$$H_{fi} = g \int \psi_f^* \psi_i d\tau = g \psi_\beta^*(0) \psi_\nu^*(0) \quad (9.6)$$

όπου g σταθερά η οποία χαρακτηρίζει τις (ασθενείς) αντιδράσεις.

Από την θεωρία των διαταραχών η πιθανότητα μεταπτώσεων (transition probability) ανά μονάδα χρόνου δίνεται από τον δεύτερο χρυσό κανόνα του Fermi

$$\lambda_{fi} = P = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{fi}|^2 \frac{dn}{dE} \quad \text{ή} \quad P = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | V_\beta | i \rangle|^2 \rho(E_f) \quad (9.7)$$

όπου $\rho(E) = dn/dE$ είναι η πυκνότης των τελικών καταστάσεων ενός συστήματος το οποίο περιορίζεται σε έναν αρκετά μεγάλο όγκο $\Omega = \int dx dy dz$ ανά διάστημα ενέργειας dE_f .

E_f είναι η ολική ενέργεια της αντιδράσεως

$$E_f = E_\beta = M(A, Z) - M(A, Z + 1)$$

και V_β η διαταραχή που προκαλεί την αποδιέγερση β από την αρχική της $|i\rangle$ ως την τελική της κατάσταση $|f\rangle$.

9.3 Υπολογισμός του dn/dE_f

Γνωρίζουμε ότι

$$E_f = E_N + E_e + E_\nu \quad (9.8)$$

όπου E_N , E_e και E_ν είναι οι κινητικές ενέργειες του πυρήνα του ηλεκτρονίου και του νετρίνου αντίστοιχα και λόγω της διατηρήσεως της ορμής

$$p_N + p_e + p_\nu = 0 \quad (9.9)$$

Επειδή $M(A, Z) \gg m_e$ και $E_f \approx E_\nu + E_e$ θα έχουμε

$$p_\nu = \frac{E_\nu}{c} = \frac{1}{c} (E_f - E_e) \quad (9.10)$$

Για ελεύθερα σωμάτια οι ενεργειακές τους καταστάσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στον χώρο των φάσεων με πυκνότητα h^{-3} δηλαδή

$$dn = \frac{d_x d_y d_z dp_x dp_y dp_z}{h^3} \quad (9.11)$$

οπότε για το ηλεκτρόνιο και το νεutrίνο θα έχουμε αντίστοιχα

$$dn_e = \frac{\Omega}{h^3} 4\pi p_e^2 dp_e \quad (9.12)$$

και

$$dn_\nu = \frac{\Omega}{h^3} 4\pi p_\nu^2 dp_\nu \quad (9.13)$$

και για ταυτόχρονη εκπομπή έχουμε

$$dn = dn_e dn_\nu = \frac{\Omega^2}{h^6} 16\pi^2 p_e^2 p_\nu^2 dp_e dp_\nu \quad (9.14)$$

και λόγω της (9.10) έχουμε

$$\varrho(E_f) = \frac{dn}{dE_f} = \frac{16\pi^2}{c^3 h^6} \Omega^2 p_e^2 (E_f - E_e)^2 dp_e \quad (9.15)$$

9.4 Υπολογισμός της H_{fi} και $\langle f|v|i \rangle$

Ο υπολογισμός του στοιχείου του πίνακα αλληλεπιδράσεως λαμβάνει υπ' όψιν την αρχική κατάσταση ψ_i και την τελική κατάσταση

$$|f\rangle = \psi_f \Phi_\beta(\mathbf{r}) \Phi_\nu(\mathbf{r}) \quad (9.16)$$

όπου ψ_f η τελική κατάσταση του πυρήνα, και $\Phi_\beta(\mathbf{r}) \Phi_\nu(\mathbf{r})$ κυματοσυναρτήσεις για το ηλεκτρόνιο και το νεutrίνο.

Από αυτές τις σχέσεις θα έχουμε

$$\langle f | V_\beta | i \rangle = \int \psi_f^* \Phi_e^*(\mathbf{r}) \Phi_v^*(\mathbf{r}) V_\beta \psi_i d\Omega \quad (9.17)$$

$$= g \int \psi_f^* \Phi_e^*(\mathbf{r}) \Phi_v^*(\mathbf{r}) M \psi_i d\Omega \quad (9.18)$$

όπου έχουμε αντικαταστήσει τον V_β με τον Χαμιλτονιανό Τελεστή χωρίς διάσταση M και την σταθερά του Fermi g (χαρακτηριστική των ασθενών αντιδράσεων), η οποία έχει την τιμή

$$g = 1.41 \cdot 10^{-49} \text{ erg cm}^3 = 0.88 \cdot 10^{-4} \text{ MeV fm}^3$$

Μπορούμε να απλοποιήσουμε την σχέση εάν αναπτύξουμε τα κύματα σε σειρά Taylor γύρω στο μηδέν, οπότε θα έχουμε

$$\Phi_e(\mathbf{r}) = V^{-1/2} (1 + ik_e \cdot \mathbf{r} + \dots) \quad (9.19)$$

και

$$\Phi_v(\mathbf{r}) = V^{-1/2} (1 + ik_v \cdot \mathbf{r} + \dots) \quad (9.20)$$

Λόγω του μικρού μεγέθους του πυρήνα σε σχέση με το μήκος κύματος των σωματίων που εκπέμπονται, κάθε όρος το αναπτύγματος είναι πολλές φορές μικρότερος από την προηγούμενο π.χ. ο δεύτερος όρος είναι 40-50 φορές μικρότερος της μονάδας. Έτσι τις περισσότερες φορές αρκεί να διατηρηθεί μόνο ο πρώτος όρος του αναπτύγματος και έχουμε

$$\langle f | V_\beta | i \rangle = g \Phi_e^*(0) \Phi_v^*(0) \int \psi_f^* M \psi_i d\Omega = \frac{g}{V} \langle f | M | i \rangle = \frac{g}{V} M_{fi} \quad (9.21)$$

όπου το στοιχείο του πίνακα M_{fi} περιέχει τις πυρηνικές κυματοσυναρτήσεις και τον συντελεστή της αλληλοεπιδράσεως της ακτινοβολίας β . Για να υπολογιστεί ο M_{fi} πρέπει να γνωρίζουμε την δομή του αρχικού και τελικού πυρήνα και την μορφή της ασθενούς αλληλοεπιδράσεως.

Εάν αντικαταστήσουμε τις (9.21) και (9.10) στην (9.7) έχουμε

$$d\lambda_{fi} = \frac{g^2}{2\pi^3 c^3 \hbar^7} |M_{fi}|^2 (E_f - E_e)^2 p_e^2 dp_e \quad (9.22)$$

Εκτός όμως των πάρα πάνω πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν την αντίδραση Coulomb μεταξύ πυρήνα $e^-(e^+)$, η οποία εκφράζεται με τη σχέση

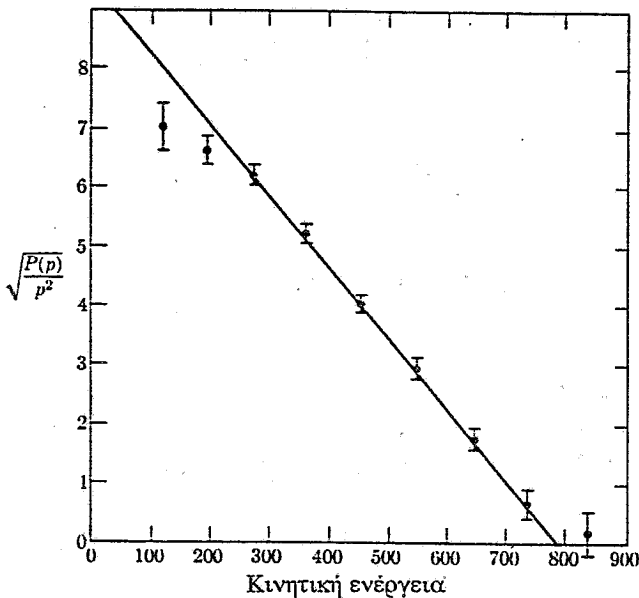
$$F(Z,E) = 2\pi\eta [1-\exp(-2\pi\eta)]^{-1} \quad (9.23)$$

όπου $\eta = \pm e^2/\hbar v$ με θετικό πρόσημο (+) για τα ηλεκτρόνια και (-) για τα ποσιτρόνια των οποίων η ταχύτης πολύ μακριά από τον πυρήνα (δηλ. στο άπειρο) είναι v .

Η πληρέστερη σχέση θα είναι

$$P(p)dp = \frac{g^2 |M_{if}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} (E_0 - E)^2 F(Z,E) p^2 dp \quad (9.24)$$

Βεβαίως στην πλήρη του ανάπτυξη το θέμα της ακτινοβολίας β είναι πολύ πολύπλοκο και περιλαμβάνει υποπεριπτώσεις οι οποίες έχουν και τις δικές τους ονομασίες, π.χ. όταν ο συνδιασμός β - ν παίρνει μία μονάδα σπιν η αντίδραση είναι γνωστή ως Gamow-Teller, ενώ όταν αποβάλλεται χωρίς σπιν λέγεται αντίδραση Fermi.



Σχήμα 9.3.

$$\sqrt{\frac{P(p)}{p^2 F}} = f(E) \quad \eta \quad \sqrt{\frac{P(p)}{p^2 F}} = f(T) \quad (9.25)$$

είναι πολύ χρήσιμη γιατί δίνει ευθεία γραμμή και είναι γνωστή σαν "διάγραμμα Kurie" (Kurie Plot). Το διάγραμμα Kurie για την αντίδραση $n \rightarrow p + \beta^- + \bar{\nu}_e$ δίνεται στο σχήμα 9.3, όπου παρατηρείται ότι η τομή της ευθείας με τον άξονα των E δίνει την ενέργεια E_0 .

9.5 Χρόνος υποδιπλασιασμού της ακτινοβολίας β

Η ολική πιθανότητα, λ , διασπάσεως και εκπομπής ακτινοβολίας β είναι:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \int_0^{P_{\max}} P(p) dp$$

όπου $t_{1/2}$ ο χρόνος υποδιπλασιασμού της αντιδράσεως έχουμε δε

$$\lambda = \frac{g^2 |M_{if}|^2}{2\pi^3 \hbar} m_0^5 c^4 \int_0^{P_{\max}} F(Z, e) \frac{p^2}{m_0^2 c^2} \frac{(E_0 - E)^2}{m_0^2 c^4} \frac{dp}{m_0 c} \quad (9.26)$$

Αν συμβολίσουμε το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της (9.18) με $f(Z, E_0)$ τότε έχουμε

$$f(Z, E_0) t_{1/2} = \frac{2\pi^3 (\ln 2) \hbar^7}{m_0 g^2 c^4 |M_{if}|^2} \quad (9.27)$$

Από την σχέση (9.27) προκύπτει ότι αν γνωρίζουμε τα $|M_{if}|^2$ και το γινόμενο $f(Z, E_0) t_{1/2}$ τότε λαμβάνουμε την τιμή του g . Η τιμή του γινομένου $f(Z, E_0) t_{1/2}$ ευρίσκεται πειραματικά. Π.χ. για την αντίδραση

$$0^{14}(\beta^+) N^{14}$$

έχουμε

$$f \cdot t = 3103 \text{ sec} \text{ οπότε βρισκουμε } g \approx 0,9 \cdot 10^{-4} \text{ MeV fm}^3 \quad (9.28)$$

Από την τιμή της g προκύπτει ότι η ακτινοβολία β είναι ασθενής αντίδραση (Weak Interaction)

9.6 Ρελατιβιστική θεωρία και μη διατήρηση της ομοτιμίας

Μία από τις πλέον σοβαρές ανακαλύψεις της περασμένης εικοσαετίας ήταν ότι η ομοτιμία δεν διατηρείται στις ασθενείς αντιδράσεις. Για να αναπτύξει κανείς μία θεωρία, η οποία να εξηγήσει το φαινόμενο χρειάζεται να χρησιμοποιήσει ρελατιβιστικές (R) εξισώσεις και να έχει εξισώσεις με όρους οι οποίοι εκφράζουν και την μη διατήρηση της ομοτιμίας.

Βεβαίως στην θεωρία του Schrodinger εχρησιμοποιήθησαν οι τελεστές $p \rightarrow -i\hbar \nabla$ και $E \rightarrow i\hbar \partial/\partial t$ στην κλασσική εξίσωση της ενέργειας. Η εξίσωση την οποία παίρνουμε είναι δευτέρας τάξεως στις συναρτήσεις του χώρου, αλλά πρώτης τάξεως στη συνάρτηση του χρόνου.

Για να είναι οι σχέσεις αναλλοίωτες ρελατιβιστικά πρέπει ο χώρος και ο χρόνος να χρησιμοποιούνται κατά τον ίδιο τρόπο, οπότε, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τους ίδιους τελεστές στην ρελατιβιστική εξίσωση για την ενέργεια $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$ και παίρνουμε την εξίσωση των Klein-Gordon, η οποία είναι δευτέρας τάξεως σε όλες τις συναρτήσεις.

Ατυχώς όμως η λύση της ευρέθηκε ότι ανταποκρίνεται στην στατιστική του Bose και δεν μπορεί να περιγράψει φερμιόνια (δηλ. σωματίδια με spin 1/2).

Ο Dirak εμελήτησε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες αυτή η εξίσωση της δευτέρας τάξεως αναλύεται σε δύο εξισώσεις πρώτης τάξεως και εξέτασε τις λύσεις αυτών των εξισώσεων. Ευρήκε ότι οι λύσεις είναι ανύσματα με τέσσερις συνιστώσες, αλλά οι δύο είναι μικρότερες από τις άλλες δύο κατά ένα συντελεστή v/c και έχουν αντίθετη ομοτιμία. Αυτές βεβαίως οι συνιστώσες στις μικρές ταχύτητες $v \rightarrow 0$ είναι αμεληταίες αλλά στις ρελατιβιστικές ταχύτητες ($v \rightarrow c$) γίνονται σημαντικές και δίνουν την δυνατότητα να ερμηνεύσουν τη μη διατήρηση της ομοτιμίας.

Στην μη ρελατιβιστική θεωρία το γινόμενο $\psi_B \psi_V$ δίνει μονάχα τέσσερις όρους από τους οποίους ο ένας είναι βαθμωτός ($S = 0$) και ένα άνυσμα με τρεις συνιστώσες ($S = 1$). Στο ρελατιβιστικό όμως όριο έχουμε 16 όρους από τους οποίους δύο είναι βαθμωτοί δύο, 4-ανύσματα και έναν αντισυμμετρικό τανυστή με 6-συνιστώσες. Από τα δύο ανύσματα το ένα είναι πολικό (polar) και το άλλο αξονικό (axial) δηλαδή το πρώτο αλλάζει σημείο όταν ενεργήσουμε σε αυτό με τον τελεστή της ομοτιμίας (σαν τα ανύσματα \mathbf{r} και \mathbf{p}) ενώ τα αξονικά 3-ανύσματα σαν τα $\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$ δεν αλλάζουν σημείο κατά την ίδια διεργασία.

Από τα δύο βαθμωτά το ένα είναι ψευδο-βαθμωτό, δηλ. όταν ενεργεί ο τελεστής της ομοτιμίας το ψευδο-βαθμωτό μέγεθος αλλάζει σημείο. Ένα παράδειγμα είναι το γινόμενο $a \cdot (b \wedge c)$ όπου a , b και c είναι πολικά ανύσματα.

Για να μελετηθεί η μη διατήρηση της ομοτιμίας πρέπει να χρησιμοποιηθούν και όροι οι οποίοι αναμιγνύουν την ομοτιμία των ρελατιβιστικών συνιστωσών. Εγίνανε δε πειράματα με τα οποία διερευνήθηκε εάν χρειαζόντουσαν ψευδο-βαθμωτοί όροι για να ερμηνευθούν τα αποτελέσματα. Τέτοια μεγέθη είναι το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ του αξονικού ανύσματος του σπιν (σ) και της ορμής του σωματίου (p) δηλ. $(\sigma \cdot p)$ ή του σπιν j του αρχικού πυρήνα και p , δηλ. $(j \cdot p)$. Στην περίπτωση της διατηρήσεως της ομοτιμίας τότε $\langle \sigma \cdot p \rangle$ και $\langle j \cdot p \rangle$ θα είναι ίσοι με το μηδέν. Οι πρώτες μετρήσεις έγιναν με ^{60}Co του οποίου τα σπιν είχαν πολωθεί με την βοήθεια πολύ χαμηλών θερμοκρασιών και ισχυρού μαγνητικού πεδίου. Οι μετρήσεις έδειξαν ότι η γωνιακή κατανομή της εκπεμπομένης ακτινοβολίας β δεν ήταν ιστροπική, δηλ. $\langle j \cdot p \rangle \neq 0$. Ειδικότερα ευρέθηκε ότι ο αριθμός των σωματιών β τα οποία εκπεμπόντουσαν με γωνίες μικρότερες των 90° ως προς το σπιν j των πυρήνων ήταν διαφορετικός από τον αριθμό των σωματιών β τα οποία εκπεμπόντουσαν προς την αντίθετη διεύθυνση.

Είναι προφανές ότι κατά τις ασθενείς αντιδράσεις η μη διατήρηση της ομοτιμίας θα έχει ως αποτέλεσμα και τα σπιν των ηλεκτρονίων να είναι πολωμένα ως προς την ορμήν, έτσι ώστε $\langle \sigma \cdot p \rangle \neq 0$.

Ένα από τα πλέον εντυπωσιακά αποτελέσματα ήταν ότι (εις το όριο $v \rightarrow c$) η μη διατήρηση της ομοτιμίας ήταν η μεγίστη δυνατή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ X

ΠΥΡΗΝΙΚΕΣ ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΙΣ I

10.1 Γενικά

Μέχρι τώρα έχουμε αναπτύξει τις μεθόδους οι οποίες χρησιμοποιούνται για την μελέτη των πυρηνικών αντιδράσεων όπως επίσης και μερικές από αυτές τις αντιδράσεις. Η φύση όμως των πυρηνικών δυνάμεων δεν έχει διευκρινισθεί πλήρως και δεν είναι δυνατόν προς το παρόν να περιγραφούν με την λεπτομέρεια με την οποία περιγράφονται οι ηλεκτρομαγνητικές αντιδράσεις.

Η αρχική έρευνα είναι αποδοτικότερη όταν γίνεται σε απλά συστήματα π.χ. δύο σωματίων, και μετά επεκτείνεται σε συστήματα με περισσότερα των δύο σωματίων. Στην προκειμένη περίπτωση οι αντιδράσεις δύο νουκλεονίων όπως είναι τα pp , pn και nn μπορεί να μελετηθούν σε δύο καταστάσεις: την στατική των μορφών, όπως όταν σχηματίζουν τον πυρήνα του d , και την δυναμική τους κατάσταση, όπου η ενέργεια του συστήματος είναι μεγαλύτερη, από την ενέργεια των προϊόντων της αντιδράσεως όπως ο σκεδασμός $p-p$ ή $p-n$.

Εάν υποθεθεί ότι η αντίδραση μεταξύ δύο νουκλεονίων μπορεί να παρουσιασθεί σαν μία συνάρτηση δυναμικού πρέπει να ευρεθεί η μορφή αυτού του δυναμικού και να προσδιορισθεί εάν και κατά πόσο το δυναμικό αυτό εξαρτάται από τον τύπο του νουκλεονίου.

Υπάρχει πάντοτε το ερώτημα εάν με το δυναμικό, το οποίο θα προσδιορίσουμε από την μελέτη των αντιδράσεων νουκλεονίου με νουκλεόνιο, μπορούμε να εξηγήσουμε ένα σύστημα με πολλά νουκλεόνια, όπως είναι ο πυρήνας ή είναι αναγκαίο να εισάγουμε και άλλες δυνάμεις πολλών σωματίων (many-body forces). Δεν υπάρχει κανένας λόγος, ο οποίος να λέει εάν και κατά πόσο οι δυνάμεις πολλών σωματίων είναι μικρές συγκρινόμενες με τις (πυρηνικές) δυνάμεις των δύο σωματίων. Το θέμα όμως λόγω της φύσεως του είναι πολύπλοκο και δεν έχει προς το παρόν επεξεργασθεί πλήρως.

Πρωτού αρχίσουμε την μελέτη θα ήτο ωφέλειμο να συνοψίσουμε τα πειραματικά δεδομένα τα οποία έχουν σχέση με την μορφή των πυρηνικών δυνάμεων.

1) Τα μεγέθη των πυρήνων είναι της τάξεως των ολίγων fm.

2) Η πυρηνική πυκνότητα στο μέσον περιήπου του πυρήνα είναι η ίδια για όλα σχεδόν τα στοιχεία.

3) Η κατανομή των δύο τύπων νουκλεονίου μέσα στον πυρήνα είναι σχεδόν η ίδια.

4) Η σκέδαση πυρηνικών βλημάτων ακολουθεί τον τύπο του Rutherford (για την ενεργό διατομή) μέχρι μια ορισμένη γωνία και μετά από αυτήν την γωνία πέφτει πολύ απότομα.

5) Από την μελέτη των κατοπτρικών πυρήνων ευρέθηκε ότι οι πυρηνικές δυνάμεις είναι "συμμετρικές ως προς το φορτίο" του νουκλεονίου δηλ. pp ή nn κ.λ.π.

6) Η πυκνότητα του πυρήνα στην επιφάνεια στην περιφέρειά του δεν πέφτει απότομα στο μηδέν αλλά πέφτει σταδιακά σε μια περιοχή - 1fm.

7) Η ενέργεια συνδέσεως χονδρικά (οι κύριοι όροι στον τύπο του Weizsäcker) ακολουθεί το υπόδειγμα της υγρής σταγόνας.

8) Υπάρχει ένας "όρος συμμετρίας" στην εξίσωση της μάζας.

9) Υπάρχει μία δύναμη η οποία σχηματίζει ζεύγη μέσα στον πυρήνα (pairing force).

10) Η ενέργεια συνδέσεως των σωματιών α είναι τόσο μεγάλη όσο και στους μεγάλους πυρήνες.

11) Τα νουκλεόνια έχουν ανώμαλη μαγνητική ροπή.

12) Πολλοί πυρήνες έχουν τετραπολική ροπή.

13) Η μαγνητική ροπή του δευτερίου είναι σχεδόν ίση (πίνακας 5.2) με το άθροισμα των μαγνητικών ροπών του p και n.

10.2 Κορεσμός και εμβέλεια πυρηνικών δυνάμεων

Είναι προφανές από τις προαναφερθείσες φυσικές ιδιότητες των πυρήνων ότι οι δυνάμεις, οι οποίες συγκρατούν τα νουκλεόνια μέσα σε αυτές είναι "ισχυρές" και "μικρής εμβέλειας". Βεβαίως και οι δύο όροι είναι τελείως σχετικοί και θα πρέπει να ερμηνευθούν. Γενικά λέμε ότι οι δυνάμεις είναι μικρής εμβέλειας συγκρινόμενες με τις διαστάσεις του συστήματος το οποίο μελετάμε, όπως π.χ. οι δυνάμεις van der Waals, οι οποίες συγκρατούν τα μόρια στην υγρή σταγόνα. Η σύνδεση ενός μορίου μέσα στην σταγόνα έχει μεγάλη συνεισφορά από τα λίγα μόρια που βρίσκονται γύρω του παρά από τον μεγάλο αριθμό των απομακρισμένων μορίων.

Στους πυρήνες η σύνδεση ενός νουκλεονίου εξαρτάται από την ύπαρξη ολίγων μόνο νουκλεονίων, τα οποία είναι πλησίον του. Ειδικότερα λέμε ότι οι δυνάμεις είναι "μικρής εμβέλειας".

ακολουθεί μια εκθετική συνάρτηση, όπως στην περίπτωση των δυνάμεων του Yukawa έχουμε ότι το δυναμικό είναι

$$V = (\exp(-kr))/r \quad (10.1)$$

λέμε δε ότι η "εμβέλεια" τους είναι $1/k$. Πιστεύεται ότι οι πυρηνικές δυνάμεις είναι μικρής εμβέλειας στην γενική αλλά και την ειδική έννοια των όρων.

Το πυρηνικό πεδίο επεκτείνεται πέραν από τον πυρήνα μόνο για μια απόσταση ίση με την εμβέλεια των πυρηνικών δυνάμεων. Έτσι με τον συνδιασμό των φυσικών δεδομένων (1) και (4), μπορούμε να προσδιορίσουμε την εμβέλεια των πυρηνικών δυνάμεων, η οποία επιβεβαιώνεται και από τα πειραματικά δεδομένα της πτώσεως της πυκνότητας του πυρήνα στην περιφέρεια, η οποία είναι ~ 1 fm.

Ο προσδιορισμός του τύπου των πυρηνικών δυνάμεων γίνεται με τον συνδιασμό των (2) και (7) και του υποδείγματος της υγράς σταγόνας. Το πεδίο των μοριακών δυνάμεων στην υγρά σταγόνα έχει δύο δυνάμεις, μία μικρής εμβέλειας ελκτικής και μίας, ακόμη πιο μικρής εμβέλειας, απωστικής. Κατά αναλογία ανεμένετο το ίδιο, να ισχύει και με τις πυρηνικές δυνάμεις: το ελκτικό πεδίο να έχει εμβέλεια 1-2 fm και το απωστικό να έχει εμβέλεια μικρότερη από 0,5 fm. Η αποδοχή της απωστικής συνιστώσης έγινε τελικά αποδεκτή μετά από πολυετή μελέτη πολλών εναλλακτικών λύσεων διότι έχει πολλά προτερήματα και ιδιότητες, οι οποίες ερμηνεύουν μεγάλο αριθμό πειραματικών δεδομένων.

10.3 Μελέτη του δευτερίου

Τα γνωστά στοιχεία του δευτερίου είναι:

η ενέργεια συνδέσεως: $W = 2,226 \pm 0,003$ MeV,

η μαγνητική ροπή: $\mu_d = 0,85735 \pm 0,00003$ nm (πυρηνικές μαγνητόνες),

η ηλεκτρική τετραπολική ροπή: $Q = 2.82 \cdot 10^{-27}$ cm² και το σπιν: $S = 1$.

Εάν υποθέσουμε ότι ένα τετραγωνικό δυναμικό περιγράφει το δευτέριο στην βασική του κατάσταση, την οποία παίρνουμε κατ' αρχή να είναι η 1S_1 . Η εξίσωση του Schrödinger στο κέντρο μάζας του συστήματος, είναι:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi(r) + V(r)\psi(r) = E\psi(r) \quad (10.2)$$

$$\mu = \frac{m_p m_m}{m_p + m_m} = \frac{M}{2}$$

Εάν θέσουμε στην εξίσωση (10.2) $\psi(r) = u(r)/r$ και σαν E την ενέργεια συνδέσεως του δευτερίου, τότε θα έχουμε:

$$-\frac{\hbar^2}{M} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + V(r)u(r) = Eu(r) \quad (10.3)$$

Και για ένα τετραγωνικό δυναμικό ακτίνας r_0 και σταθερού βάθους $-V_0$ η (10.3) γίνεται

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + k^2 u(r) = 0, \quad r < r_0 \quad (10.4)$$

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} - \gamma^2 u(r) = 0, \quad r > r_0 \quad (10.5)$$

όπου

$$k = \sqrt{\frac{M}{\hbar^2}(V_0 + E)} = \sqrt{\frac{M}{\hbar^2}(V_0 - W)} \quad (10.6)$$

και

$$\gamma = \sqrt{\frac{MW}{\hbar^2}} \quad (10.7)$$

Οι γενικές λύσεις των δύο αυτών εξισώσεων είναι:

$$u(r) = A \sin kr + B \cos kr, \quad r < r_0 \quad (10.8)$$

και

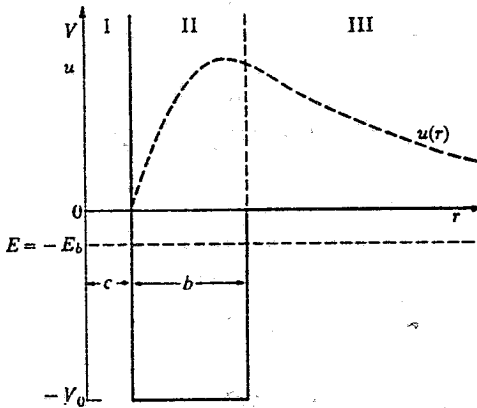
$$u(r) = Ce^{-\gamma r}, \quad r > r_0 \quad (10.9)$$

Από τις οριακές συνθήκες στο $r = 0$ και $r = \infty$, βρίσκουμε $B = 0$ και $D = 0$. Επίσης πρέπει στο $r = r_0$ οι δύο $u(r)$ και οι πρώτες παράγωγοί των να είναι συνεχείς, οπότε μετά από μερικές πράξεις βρίσκουμε

$$k \cos kr = -\gamma \quad (10.10)$$

Αυτή είναι η σχέση η οποία συνδέει τις τιμές της ακτίνας του τετραγωνικού φρέατος δυναμικού και τους βάθους του, π.χ. για $r_0 = 2.0 \text{ fm}$ το $V_0 = 36 \text{ MeV}$, ενώ για $r_0 = 2.5 \text{ fm}$ το $V_0 = 25 \text{ MeV}$.

Αντί του απλού τετραγωνικού φρέατος δυναμικού μπορεί να χρησιμοποιηθεί το δυναμικό του σχήματος 10.1, το οποίο έχει και "σκληρό πυρήνα" (hard core) δηλαδή απωστική συνιστώσα. Τότε για $r < c$ το δυναμικό $V(r) \rightarrow \infty$, για $c < r < b$, το δυναμικό ($-V_0$) έχει σταθερή τιμή και πέρα από το b παίρνει μηδενική τιμή, δηλ. $V(r) = 0$ όταν $r > b$.



Σχήμα 10.1.

Σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε τρεις περιοχές του δυναμικού και τρεις εξισώσεις, από την λύση των οποίων και με την βοήθεια των γνωστών οριακών συνθηκών παίρνουμε την κυματοσυνάρτηση $u(r)$. Μία μορφή της $u(r)$ δίνεται επίσης στο σχήμα 10.1. Και εδώ για την ίδια ενέργεια συνδέσεως, έχουμε απειρία συνδιασμών των παραμέτρων του δυναμικού. Π.χ. για $b = 1,895 \text{ fm}$ έχουμε $V_0 = 40 \text{ MeV}$.

Όπως έχουμε αναφέρει, το δευτέριο έχει σπιν 1 και $l = 0$ και υποθέσαμε ότι βρίσκεται στην τριαδική κατάσταση 3S_1 . Κατά αντιστοιχία το δυναμικό που υπολογίσαμε θα είναι το τριαδικό δυναμικό V_T . Εξ' άλλου, σωματίο το οποίο αποτελείται από ένα πρωτόνιο και ένα νετρόνιο με ολικό σπιν $J = 0$ δεν έχει μέχρι σήμερα ευρεθεί, οπότε συμπεραίνουμε ότι το μοναδιαίο δυναμικό (V_S), δεν μας δίνει συνδεδεμένη κατάσταση πυρήνα. Κατά τον σκεδασμό όπως των n από p , βρέθηκε ότι το V_S υπάρχει. Για να το υπολογίσουμε όμως το V_S χρειάζεται πρώτα να μελετήσουμε τον μονοκυματικό της σκεδασμός n p .

10.4 Σκέδαση πρωτονίου-νετρονίου σε χαμηλές ενέργειες

Η εξίσωση του Schrödinger για κεντρικό δυναμικό $V(r)$ δίνεται από την εξίσωση

$$\left[\nabla^2 + \frac{M}{\hbar^2} (E - V(r)) \right] \psi(r) = 0 \quad (10.11)$$

Το ακτινικό μέρος της εξισώσεως του Schrödinger είναι

$$\frac{d^2 u_1(r)}{dr^2} + \left[\frac{M}{\hbar^2} (E - V(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_1(r) = 0 \quad (10.12)$$

όπου

$$\psi(r) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l(k) \frac{u_l(r)}{r} \cdot P_l(\cos\theta) \quad (10.13)$$

με

$$k = \frac{1}{\hbar} = \sqrt{\frac{ME}{\hbar^2}}$$

Η λύση αυτής της εξισώσεως, η οποία ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες δηλ. ότι στην ασυμπτωτική περιοχή ($r \rightarrow \infty$) υπάρχει ένα εισερχόμενο (κάθετο στον άξονα z) επίπεδο κύμα $\exp(ikz)$ και ένα εξερχόμενο (σκεδασμένο) σφαιρικό κύμα e^{ikr}/r , δίνει σαν κυματοσυνάρτηση την

$$\psi(r) = e^{ikz} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (10.14)$$

όπου $f(\theta, \phi)$ είναι το πλάτος του σκεδαζομένου κύματος και η γωνία θ ορίζεται σαν $\cos\theta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$, δηλ. είναι η γωνία μεταξύ του εισερχομένου \mathbf{k} ανύσματος και του σκεδασμένου κύματος (\mathbf{r}).

Επειδή το δυναμικό είναι σφαιρικά συμμετρικό το $f(\theta, \phi)$ είναι ανεξάρτητο από την ϕ και γι' αυτό το γράφουμε σαν $f(\theta)$. Το πλάτος σκεδάσεως $f(\theta)$ μπορεί να το αναλύσουμε σε όρους του πολυωνύμου Legendre $P_l(\cos\theta)$ δηλ.

$$f(\theta) = \frac{i}{2V} \sum_{l=0}^{\infty} f_l(2l+1) P_l(\cos\theta) \quad (10.15)$$

όπου οι συντελεστές f_l πρέπει να οριστούν. Η ανάπτυξη επίσης του επίπεδου κύματος σε πολώνυμα Legendre είναι

$$e^{ikz} = \exp(ikr \cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta) \quad (10.16)$$

όπου $j_l(kr)$ είναι οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel.

Επειδή την εξίσωση της κυματοσυναρτήσεως την χρησιμοποιούμε στην ασυμπτωτική της μορφή γι' αυτό χρησιμοποιούμε και την ασυμπτωτική μορφή της συναρτήσεως Bessel δηλ.

$$j_l(kr) = \frac{\sin\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right)}{kr} \quad (10.17)$$

Αντικατάσταση των (10.16) και (10.17) στην (10.14) μας δίνει

$$\psi(r) = \frac{1}{2ikr} \sum_l (2l+1) \left[(1-f_l) e^{ikr} - (-1)^l e^{-ikr} \right] P_l(\cos \theta) \quad (10.18)$$

Και κατ' αναλογία της αναπτύξεως της (10.16) η (10.18) γράφεται

$$\psi(r) = \sum_l i^l (2l+1) \psi_l(r) P_l(\cos \theta) \quad (10.19)$$

όπου η $\psi_l(r)$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 - U(r) \right] \psi_l = 0 \quad (10.20)$$

ή μετά την εισαγωγή της σχέσεως

$$\psi_l(r) = \frac{1}{kr} u_l(r)$$

η (10.20) γράφεται

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - U(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l(r) = 0 \quad (10.21)$$

Οι δύο ανεξάρτητες λύσεις της (10.21) στην συμπτωτική περιοχή $r \rightarrow \infty$ είναι οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel $j_l(kr)$ και Neumann $n_l(kr)$. Οπότε η γενική λύση θα είναι

$$\psi_l(r) = A_l j_l(kr) + B_l n_l(kr) = \frac{1}{kr} C_l \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right) \quad (10.22)$$

Βεβαίως τα A_l , B_l και C_l , δ_l σχετίζονται μεταξύ τους. Η παράμετρος δ_l ονομάζεται "μετατόπιση φάσεως" (phase shift) επειδή ορίζει την διαφορά φάσεως της σκεδασμένης λύσεως εξισ. (10.22), από την ασυμπτωτική λύση, η οποία είναι κανονική στην αρχή, δηλαδή την λύση

$$j_l(kr) = \frac{1}{kr} \sin \left[kr - \frac{l\pi}{2} \right] \text{ για } r \rightarrow \infty$$

Μετά από αντικατάσταση της (10.22) στην (10.19) και σύγκριση των αποτελεσμάτων με την (10.18) βρίσκουμε

$$f_l = 1 - e^{2i\delta_l} \quad (10.23)$$

και

$$C_l = e^{i\delta_l} \quad (10.24)$$

Οπότε το πλάτος σκεδάσεως γίνεται

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_l (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta) \quad (10.25)$$

Είναι βέβαια γνωστό ότι η διαφορική ενεργός διατομή είναι ίση με

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \quad (10.26)$$

$$= \frac{1}{k^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta) \right|^2$$

Και η ολική ενεργός διατομή θα είναι ίση με

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad (10.27)$$

Για μικρές ενέργειες των (βλήματων) νετρονίων δηλ. από 1 MeV μέχρι 10 MeV τα S-κύματα υπερτερούν κατά πολύ των άλλων κυμάτων, οπότε μπορούμε να μελετήσουμε με αυτά το αντίστοιχο δυναμικό. Βεβαίως όσο η ενέργεια του βλήματος αυξάνει τόσο και περισσότερα κύματα με μεγαλύτερες στροφορμές ($l = 1, 2, \text{κ.λπ.}$) συνεισφέρουν στην αντίδραση.

Αμα υποθέσουμε ότι η αντίδραση μεταξύ νετρονίου και πρωτονίου είναι μικρή τότε $\delta_l \rightarrow 0$ και συνεπώς $f(\theta) \approx 0$, οπότε η εξίσωση της κυματοσυναρτήσεως μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned} \psi(r) &= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} B_l(kr) P_l(\cos\theta) \end{aligned} \quad (10.28)$$

όταν δε έχουμε $l = 0$:

$$B_0(kr) = \frac{\sin(kr)}{kr} = 1 - \frac{(kr)^2}{6} + \dots \quad (10.29)$$

ή για $l = 1$

$$B_1(kr) = i3 \left[\frac{\sin(kr)}{(kr)^3} - \frac{\cos(kr)}{kr} \right] = i3 \left[\frac{kr}{3} - \frac{(kr)^3}{30} + \dots \right] \quad (10.30)$$

Για νετρόνια μικρής ενέργειας (1 MeV) η τιμή του k στο κέντρο μάζας θα είναι $k = (p/\hbar) = 1.55 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-1}$. Εάν δε υποθέσουμε ότι $r_0 = 2 \text{ fm}$ βρίσκουμε ότι

$$|B_1/B_0|^2 = (kr_0)^2 \approx 0.09$$

οπότε η σκέδαση νετρονίων αυτής της ενέργειας με $l = 1$ είναι 9% αυτής με $l = 0$. Το ίδιο ισχύει για νετρόνια με ενέργεια μέχρι 10 MeV.

Όταν δεν υπάρχουν δυναμικά με $l = 0 = (10.29)$

$$\psi_{l=0}(r) = \frac{\sin(kr)}{kr} = \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{2ikr} \quad (10.31)$$

η οποία αντιστοιχεί σε δύο σφαιρικά κύματα το ένα εισερχόμενο και το άλλο εξερχόμενο από το κέντρο της αντιδράσεως. Εάν αποκαταστήσουμε τώρα το δυναμικό η κυματοσυνάρτηση (10.22) για $l = 0$ θα γίνει

$$\psi_{l=0}(r) = \frac{\sin(kr + \delta_0)}{r} \quad (10.32)$$

η οποία μπορεί να γραφεί σαν

$$\psi_{l=0}(r) = \frac{e^{i(kr+2\delta_0)} - e^{-ikr}}{2ikr} \quad (10.33)$$

Από την σύγκριση των (10.31) και (10.33) βλέπουμε ότι το δυναμικό επηρεάζει μόνο το εξερχόμενο κύμα, οπότε η διαφορά μεταξύ αυτών των δύο εξισώσεων είναι το σκεδαζόμενο κύμα

$$\psi_{sc} = \frac{e^{ikr}}{2ikr} (e^{2i\delta_0} - 1) \quad (10.34)$$

Για ελαστικό σκεδασμό έχουμε

$$\sigma_{sc} = 4\pi\lambda^2 \sin^2\delta_0 \quad (10.35)$$

10.5 Μήκος σκεδάσεως

Για μικρές ενέργειες των νετρονίων η ενεργός διατομή συνήθως εκφράζεται συναρτήσει του μήκους σκεδάσεως a . Από την (10.33) η ασυμπτωτική λύση της κυματοσυναρτήσεως μπορεί να γραφεί σαν

$$u = r\psi = e^{i\delta} \frac{\sin(kr + \delta)}{k} \quad (10.36)$$

Για να παραμένει η u πεπερασμένη για πολύ μικρές ενέργειες πρέπει η $\delta \rightarrow 0$ όταν το $k \rightarrow 0$ οπότε ορίζουμε

$$\lim \left(-\frac{\sin\delta}{\delta} \right) = a \quad (10.37)$$

και η ενεργός διατομή σ_{sc} γίνεται

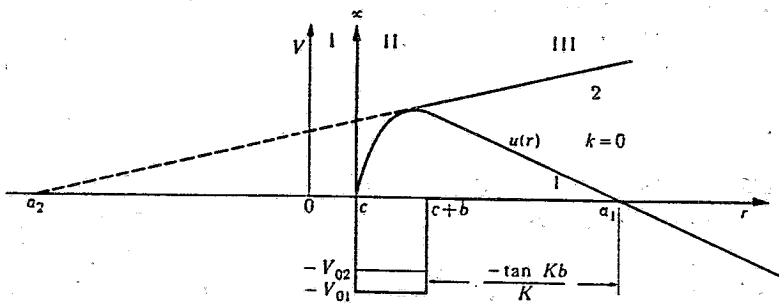
$$\sigma_{sc} = 4\pi \left(\frac{\sin \delta}{k} \right)^2 = 4\pi \alpha^2 \quad (10.38)$$

Τότε η α εκφράζει την ακτίνα της σφαίρας από την οποία σκεδάζεται ένα σημειακό νετρόνιο.

Επειδή $\delta \rightarrow 0$ όταν $k \rightarrow 0$ και $(\delta/k) = -\alpha$ μπορούμε να γράψουμε την (10.36) σαν

$$\lim_{k \rightarrow 0} u = \frac{k r}{k} + \frac{\delta}{k} = r - \alpha \quad (10.39)$$

η οποία είναι η εξίσωση ευθείας στο διάγραμμα $u(r)$. Το μήκος σκεδάσεως α είναι η τομή με τον άξονα των r της προεκτάσεως της ακτινικής κυματοσυναρτήσεως, έξω από την εμβέλεια των δυνάμεων (r_0).



Σχήμα 10.2.

Το μήκος σκεδάσεως για δυο διαφορετικά δυναμικά το ένα ελκτικό (θετικό α) το οποίο καταλήγει σε δέσμια κατάσταση και ένα απωστικό ($\alpha < 0$) παρουσιάζονται στο σχήμα 10.2.

10.6 Εξάρτηση από τα σπιν της σκεδάσεως νετρονίου-πρωτονίου

Εάν υπολογίσουμε με ένα απλό τρόπο την μετατόπιση φάσεως δ για την σκέδαση νετρονίων (χαμηλής ενέργειας) από πρωτόνια βρίσκουμε

$$\delta = - \left(\frac{k}{\gamma} + k r_0 \right) \quad (10.40)$$

όπου r_0 είναι το εύρος του τετραγωνικού φρέατος και το γ έχει ορισθεί στην (10.9). Σε αυτήν την περίπτωση η ενεργός διατομή (σχέση (10.35)) θα δίνεται από τον τύπο

$$\sigma_{sc} = 4\pi \left(\frac{1}{\gamma} + r_0 \right)^2 \quad (10.41)$$

Χρησιμοποιώντας τις γνωστές τιμές για το $1/\gamma=4.3\text{fm}$ και $r_0=2\text{fm}$ βρίσκουμε $\sigma_{sc} = 5.0 \text{ b}$. Από πειραματικά δεδομένα βρήκαμε ότι $\sigma_{sc}=20,4\text{b}$. Για να ερμηνεύσει αυτή την διαφορά ο Winger, υπέθεσε ότι οι πυρηνικές δυνάμεις εξαρτώνται από το σπιν. Όπως έχουμε αναφέρει στην § 10.5 το δευτέριο ευρίσκεται κατά κύριο λόγο στην τριαδική κατάσταση (3S_1) και έτσι οι τιμές τις οποίες χρησιμοποιήσαμε στην σχέση (10.4) είναι αυτές οι οποίες αντιστοιχούν μόνο στο τριαδικό δυναμικό V_p και δίνουν την ενεργό διατομή της τριαδικής καταστάσεως σ_t . Κατά την σκέδαση όμως τα νουκλεόνια μπορούν να έχουν οποιαδήποτε διεύθυνση, οπότε εκτός από την τριαδική κατάσταση θα είναι παρούσα και η μοναδιαία κατάσταση. Και η ολική διατομή θα δίνεται από τη σχέση

$$\sigma = \frac{3}{4}\sigma_t + \frac{1}{4}\sigma_s \quad (10.43)$$

όπου οι συντελεστές $3/4$ και $1/4$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές βάρους για την τριαδική και την μοναδιαία κατάσταση. Πειραματικά, βεβαίως μετράμε το σ το οποίο όπως είπαμε είναι 20.4 b οπότε εφόσον το $\sigma_t=5\text{b}$, μπορούμε από την σχέση (10.42) να υπολογίσουμε την ενεργό διατομή της μοναδιαίας καταστάσεως η οποία είναι $\sigma_s = 74.6 \text{ b}$.

10.7 Ενεργός Εμβέλεια της n-p σκεδάσεως

Για την πλήρη περιγραφή ενός δυναμικού εκτός από το μήκος σκεδάσεως το οποίο έχουμε αναπτύξει στην § 10.5 είναι απαραίτητο να προσδιορίσουμε και μία ακόμη φυσική παράμετρο. Αυτή συνήθως είναι η ενεργός εμβέλεια και είναι περίπου ίση με το εύρος του τετραγωνικού δυναμικού και την χαρακτηρίζουμε με το γράμμα r_0 .

Από την θεωρία της ενεργού εμβέλειας βρίσκουμε ότι για τα S-κύματα η μετατόπιση φάσεως δίνεται από την σχέση

$$\cos\delta = \frac{1}{k} \left[-\frac{1}{a} + r_0 \frac{k^2}{2} \right] \quad (10.43)$$

οπότε ο αντίστοιχος τύπος για την ενεργό διατομή (σχέση (10.35)) θα είναι

$$\sigma = 4\pi \left[k^2 + \left(\frac{1}{a} - \frac{r_0 k^2}{2} \right)^2 \right]^{-1} \quad (10.44)$$

Αυτή η σχέση για την ενεργό διατομή εκτός του ότι είναι συνάρτηση του k^2 εξαρτάται από δύο παραμέτρους του δυναμικού σκεδάσεως a και r_0 .

Για την σκέδαση n-p η (10.44) γράφεται

$$\sigma = \frac{3\pi}{k^2 + \left(\frac{1}{a_t} - \frac{r_t k^2}{2} \right)^2} + \frac{\pi}{k^2 + \left(\frac{1}{a_s} - \frac{r_s k^2}{2} \right)^2}$$

όπου βεβαίως τα a_t, r_t αντιστοιχούν στο τριαδικό δυναμικό και μπορούν να υπολογισθούν από την βασική (δέσμια) κατάσταση του δευτερίου και τα a_s, r_s είναι το μήκος σκεδάσεως και η ενεργός εμβέλεια της οποίας αντιστοιχούν στην μοναδιαία κατάσταση.

Από τα γνωστά πειραματικά δεδομένα οι τέσσερις παράμετροι έχουν ευρεθεί να έχουν τις εξής τιμές:

$$\begin{aligned} a_s &= -23.678 \text{ fm} & a_t &= 5.396 \text{ fm} \\ r_s &= 2.510 \text{ fm} & r_t &= 1.726 \text{ fm} \end{aligned}$$

Όπως έχει αναφερθεί στην § 10.7 αρνητικό μήκος σκεδάσεως περιγράφει απωστικό δυναμικό οπότε όπως περιμένουμε το V_s δεν μπορεί να μας δώσει δέσμια κατάσταση.

10.8 Οι ροπές του δευτερίου

Από τις γνωστές διπολικές μαγνητικές ροπές βρίσκουμε

$$\mu_p + \mu_n - \mu_D = 0,00222 \text{ nm.}$$

Αυτή η μη μηδενική διαφορά τιμής της μαγνητικής ροπής δηλώνει ότι το δευτέριο δεν ευρίσκεται σε καθαρή 3S_1 κατάσταση, αλλά πρέπει να είναι μίγμα περισσότερων καταστάσεων της μίας. Το πιο πιθανό είναι ότι για

${}^3\text{D}_1$. Ένας κλασικός υπολογισμός δίνει ότι αυτή η πιθανότητα είναι $P_D = 0.04$ δηλαδή ~ 4% του χρόνου του το δευτερίο βρίσκεται στην κατάσταση ${}^3\text{D}_1$. Εάν όμως ληφθούν υπ' όψη ρελατιβιστικές διορθώσεις και μεσονικά ρεύματα τότε αυτή η τιμή της $P_D = 0.1$.

Μία άλλη φυσική ποσότης του δευτερίου η οποία ενισχύει την πάρα πάνω εικόνα είναι η (μικρή) τετραπολική ηλεκτρική ροπή του δευτερίου, της οποίας η πειραματική τιμή είναι

$$Q = 2.88 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2$$

Η ύπαρξη αυτής της ροπής αμέσως δηλώνει ότι το δυναμικό αντιδράσεως n-p δεν είναι καθαρά κεντρικό και η κυματοσυνάρτησή τους, δεν είναι σφαιρικά συμμετρική. Επίσης από το πάρα πάνω συμπεραίνουμε ότι οι πυρηνικές δυνάμεις είναι μερικώς μη κεντρικές δηλ. περιέχουν μία τάνυστική δύναμη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XI

ΠΥΡΗΝΙΚΕΣ ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΙΣ II

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάσαμε μερικά συμπεράσματα από την μελέτη των πυρηνικών δυνάμεων από αντιδράσεις δύο νουκλεονίων.

- α) σε δέσμη κατάσταση και
- β) την σκέδαση σε χαμηλή ενέργεια.

Βεβαίως για την ερμηνεία ενός τόσο πολύπλοκου φυσικού φαινομένου είναι απαραίτητο να ερευνηθούν όλες οι δυνατές περιπτώσεις αντιδράσεων. Σήμερα με τις υπάρχουσες μηχανές είναι δυνατό να επιτευχθούν μεγάλη ποικιλία σωματίων και σε όλο σχεδόν το φάσμα των ενεργειών (μέσα βέβαια στα όρια τα οποία επιτρέπει η σημερινή τεχνολογία). Οι αντιδράσεις αυτών των δεσμών των σωματίων με σχεδόν όλα τα στοιχεία του περιοδικού συστήματος μελετώνται συστηματικά τόσο από απόψεως ενεργού διατομής, διαφορικής ενεργού διατομής και των προϊόντων των αντιδράσεων. Η θεωρητική ερμηνεία όλων αυτών των αντιδράσεων βοηθάει στην κατανόηση των πυρηνικών δυνάμεων και του πυρηνικού πεδίου.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τις αντιδράσεις του σύνθετου πυρήνα.

11.1 Ενεργός διατομή

Όπως έχουμε αναφέρει στην (10.16) μία δέσμη μοναδιαίας πυκνότητας και ροής u μπορεί να περιγραφεί σαν επίπεδο κύμα $\exp(ikz)$ κατά μήκος του z -άξονα και μπορεί να αναπτυχθεί σε μερικά κύματα (partial waves) ως εξής

$$\begin{aligned} e^{ikz} &= \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos\theta) \\ &\sim \sum_l \frac{i^{l+1}}{2kr} (2l+1) (e^{-iK} - e^{iK}) P_l(\cos\theta) \end{aligned} \quad (11.1)$$

όπου

$$K = \left(kr - \frac{l\pi}{2} \right) \quad (11.2)$$

Η (11.1) περιέχει τα εισερχόμενα και τα εξερχόμενα σφαιρικά κύματα. Η κυματοσυνάρτηση $\psi(r)$ η οποία περιγράφει το εξερχόμενο κύμα περιέχει και την αντίδραση του κύματος με το δυναμικό και είναι:

$$\psi(r) \sim \sum_1 \frac{i^{l+1}}{2kr} (2l+1) (e^{-iK} - n_1 e^{iK}) P_l(\cos\theta), \quad r \rightarrow \infty \quad (11.3)$$

όπου το n_1 είναι το μιγαδικό πλάτος του $l^{\text{ου}}$ μερικού κύματος και σχετίζεται με την μετατόπιση της φάσεως (δ_l) με την σχέση

$$n_1 = |n_1| \exp(2i\delta_l) \quad (11.4)$$

Για ελαστική σκέδαση ο αριθμός των σωματιών είναι ο ίδιος και $|n_1| = 1$. Όταν όμως έχουμε ελαστική (sc) και μη ελαστική (r) αντίδραση τότε $|n_1| < 1$. Η κυματοσυνάρτηση του ελαστικού σκεδαζομένου κύματος ψ_{sc} θα είναι η διαφορά μεταξύ (11.1) και (11.3) δηλ.

$$\psi_{sc} = \sum_1 \frac{i^{l+1}}{2kr} (2l+1) (1-n_1) \exp(iK) P_l(\cos\theta) \quad (11.5)$$

Η ενεργός διατομή ελαστικής σκεδάσεως σε μία γωνία θ είναι

$$\sigma_{sc}(\theta) = |\psi_{sc}(r_0, \theta)|^2 r_0^2 \quad (11.6)$$

όπου r_0 είναι η ακτίνα μιας σφαίρας πολύ μεγαλύτερης από την εμβέλεια των πυρηνικών δυνάμεων. Εάν χρησιμοποιήσουμε την (11.5) βρίσκουμε

$$\sigma_{sc}(\theta) = \frac{\pi}{k^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{2l+1} (1-n_1) Y_l^0(\theta) \right|^2 \quad (11.7)$$

και λόγω της ορθοκανονικότητας των $Y_l^0(\theta)$ έχουμε:

$$\sigma_{sc} = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_{sc,l}$$

και

$$\sigma_{sc,l} = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) |1-n_1|^2 \quad (11.8)$$

η ενεργός διατομή για μη ελαστική αντίδραση την οποία βρίσκουμε με

$$\sigma_{r,l} = \frac{\pi}{k^2} (2l+1)(1 - |n_l|^2) \quad (11.9)$$

και η ολική (Total) διατομή για το l θα είναι

$$\begin{aligned} \sigma_{T,l} &= \sigma_{sc,l} + \sigma_{r,l} = \pi k^2 \{ |1 - n_l|^2 + 1 - |n_l|^2 \} (2l+1) \\ &= \pi k^2 (2 - n_l n_l^*) (2l+1) \end{aligned} \quad (11.10)$$

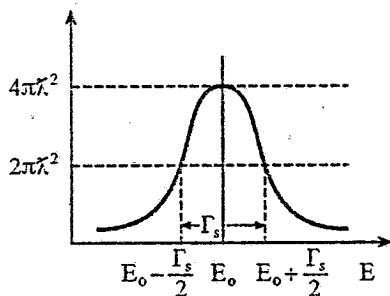
Η μεγίστη τιμή της $\sigma_{sc,l}$ θα είναι όταν $n_l = -1$ και τότε θα έχουμε

$$(\sigma_{sc,l})_{\max} = 4\pi k^2 (2l+1) \quad (11.2)$$

Εάν έχουμε μόνο σκεδασμό (sc) $|n_l|^2 = 1$ και από την (11.4) βλέπουμε ότι η δ είναι πραγματική. Όταν έχουμε αντίδραση (r) τουλάχιστον μία μετατόπιση φάσεως δ_l είναι μιγαδική και $|n_l| \leq 1$.

11.2 Συντονισμός και τύπος διασποράς Breit-Wigner

Ένα από τα πιο ενδιαφέροντα φαινόμενα στην πυρηνική φυσική είναι η απότομη χαρακτηριστική αύξηση της ενεργού διατομής όταν μεταβάλεται η ενέργεια του βλήματος της αντιδράσεως. Μία τέτοια τυπική καμπύλη παρουσιάζεται στο σχήμα 11.1. Αυτό το φαινόμενο λέγεται "συντονισμός", το δε εύρος στο ήμισυ της μεγίστης τιμής της ενεργού διατομής σχετίζεται με το εύρος του συντονισμού από την στάθμη από την οποία πηγάζουν τα προϊόντα της αντιδράσεως.



Σχήμα 11.1.

Αρχικά θα μελετήσουμε τις αντιδράσεις χαμηλής ενέργειας νετρονίων δηλαδή κύματα με $l = 0$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ήδη παρουσιάσει την σχέση μεταξύ δ και της ενεργού εμβέλειας και μήκους σκεδάσεως (10.37) και (10.43). Την σχέση (10.43) μπορούμε να την γράψουμε

$$k \cot \delta = -\frac{1}{\alpha(k)} \quad (11.3)$$

όπου η $\alpha(k)$ είναι πραγματική όταν έχουμε μόνον σκέδαση και μιγαδική όταν $\sigma_r \neq 0$. Από αυτήν την σχέση γράφοντας την $\alpha(k)$ σαν α βρίσκουμε

$$\begin{aligned} n = e^{2i\delta} &= (\cos \delta + i \sin \delta)^2 = \left(\frac{1 - ika}{\sqrt{1 + k^2 \alpha^2}} \right)^2 = \\ &= \frac{1 - ika}{1 + ika} \end{aligned} \quad (11.14)$$

Για τις ενεργούς διατομές σ_{sc} και σ_r θα έχουμε

$$\sigma_{sc} = \frac{\pi}{k^2} |1 - n|^2 = \frac{4\pi}{\left| \frac{1}{\alpha} + ik \right|^2} \quad (11.15)$$

και

$$\sigma_r = \frac{\pi}{k^2} (1 - |n|^2) = \frac{4\pi}{k} \frac{I_m \left(\frac{1}{\alpha} \right)}{\left| \frac{1}{\alpha} + ik \right|^2} \quad (11.16)$$

Όταν έχουμε πραγματικό α τότε η $\sigma_r = 0$. Σε αυτή την περίπτωση στο μέγιστο της ενεργούς διατομής έχουμε $\delta = \pi/2$ και παρατηρείται στην ενέργεια E_0 οπότε

$$\frac{1}{\alpha(E_0)} = 0 \quad (11.17)$$

Εάν αναπτύξουμε το $1/\alpha(E)$ γύρω από το σημείο E_0 της ενεργείας
βρίσκουμε

$$\frac{1}{\alpha(E)} = 0 + (E - E_0) \frac{2k}{\Gamma_s} + \dots \quad (11.18)$$

όπου έχουμε ορίσει

$$\frac{2k}{\Gamma_s} = \left[\frac{d}{dE} \left(\frac{1}{\alpha} \right) \right]_{E_0} \quad (11.19)$$

Όταν πάρουμε μόνο τους γραμμικούς όρους η (11.15) γράφεται

$$\begin{aligned} \sigma_{sc} &= \frac{4\pi}{\left| \frac{2k(E-E_0)}{\Gamma_s} + ik \right|^2} = \frac{\pi\lambda^2\Gamma_s^2}{\left| (E-E_0) + i\frac{\Gamma_s}{2} \right|^2} = \\ &= \frac{\pi\lambda^2\Gamma_s^2}{(E-E_0)^2 + \left(\frac{\Gamma_s}{2} \right)^2} \end{aligned} \quad (11.20)$$

Αυτός είναι ο γνωστός τύπος Breit-Wigner της μίας καταστάσεως της οποίας το εύρος είναι Γ_s . Με έναν ανάλογο τρόπο βρίσκουμε τις ενεργούς διατομές σ_{sc} και σ_T όταν η $\alpha(E)$ είναι μιγαδική συνάρτηση της ενέργειας E όταν δηλαδή έχουμε και μη ελαστική αντίδραση. Τότε:

$$\sigma_{sc} = \pi\lambda^2\Gamma_s^2 \left[(E-E_R)^2 + \left(\frac{\Gamma_s + \Gamma_R}{2} \right)^2 \right]^{-1}$$

$$\sigma_T = \pi\lambda^2\Gamma_R\Gamma_s \left[(E-E_R)^2 + \left(\frac{\Gamma_s + \Gamma_R}{2} \right)^2 \right]^{-1}$$

Εδώ βέβαια το μέγιστο της ενεργούς διατομής είναι στην ενέργεια E_R και το Γ_R αντιπροσωπεύει το εύρος της αντιδράσεως.

11.3 Πυρηνικές αντιδράσεις - Σύνθετος πυρήνας

Η συνηθισμένη μορφή των πυρηνικών αντιδράσεων, οι οποίες εξετάζονται στην περιοχή της Πυρηνικής Φυσικής των χαμηλών ενεργειών είναι η ακόλουθη



την οποία για συντομία γράφουμε



Βεβαίως όταν είναι $a = b$ και $A = B$ έχουμε ελαστική σκέδαση με μόνο ανακατανομή της ενέργειας μεταξύ των προϊόντων της αντιδράσεως. Σε αυτήν την περίπτωση μελετάμε πειραματικά τις ενέργειες και την γωνιακή κατανομή των αντιδρόντων σωματιών. Εκτός από τις ελαστικές σκεδάσεις μπορεί τα προϊόντα της αντιδράσεως να είναι οι ίδιοι πυρήνες αλλά διεγερμένοι όπως στο παράδειγμα (11.24). Η αποδιέγερση αυτών των πυρήνων γίνεται με την εκπομπή ακτίνων γ μέσα σε χρονικό διάστημα χαρακτηριστικό της στάθμης διεγέρσεως. Μερικά παραδείγματα αντιδράσεων είναι οι παρακάτω



Βεβαίως έχουμε και αντιδράσεις της μορφής των (11.25) και (11.26) στις οποίες είναι άλλοι πυρήνες. Μία ειδική και ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι η παραγωγή ενός ενδιάμεσου πυρήνα όπως στην αντίδραση (11.27).



Ο C ονομάζεται σύνθετος πυρήνας και έχει χαρακτηριστική μάζα, χρόνος ζωής, σπιν, ισοσπιν και άλλες φυσικές ιδιότητες και κβαντικούς αριθμούς. Ο σχηματισμός του σύνθετου πυρήνα μπορεί να εξηγηθεί ως

Όταν το σωματίο α εισέρχεται μέσα στον πυρήνα A , η απώλεια της ενέργειας του είναι μεγάλη και συνεπώς δεν μπορεί να εξέλθει πάλι από τον πυρήνα. Η ενέργεια σωματίου α μοιράζεται μεταξύ όλων των νουκλεονίων του πυρήνα A και όλο το σύστημα παρουσιάζεται σαν σύνθετος πυρήνας. Μετά από πάροδο ενός χρονικού διαστήματος, στατιστικά, μέρος τους πυρήνα ή ακόμα και ένα νουκλεόνιο παίρνει αρκετή ενέργεια και αποβάλλεται από τον σύνθετο πυρήνα.

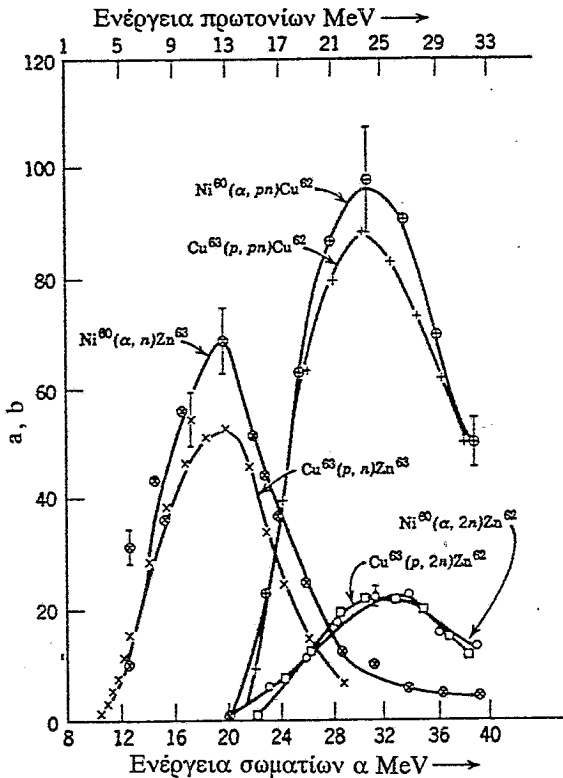
11.4 Τρόποι μελέτης του σύνθετου πυρήνα

Η μελέτη του σύνθετου πυρήνα γίνεται συνήθως με τον προσδιορισμό της ενεργού διατομής της αντιδράσεως συναρτήσει της ενέργειας του βλήματος E_α .

Ένα παράδειγμα είναι η αντίδραση (11.28)



της οποίας τα πειραματικά δεδομένα παρουσιάζονται στο σχήμα 11.2.



Στο ίδιο σχήμα δίδονται και τα πειραματικά αποτελέσματα άλλων αντιδράσεων. Βλέπουμε αμέσως ότι έχουμε παραγωγή συντονισμού με χαρακτηριστική μάζα και εύρος Γ . Ο ίδιος σύνθετος πυρήνας Zn^{*64} παράγεται και στην αντίδραση



όπως και στις άλλες αντιδράσεις που δίνονται στο σχήμα 11.2.

Τα προϊόντα της διασπάσεως και το ποσοστό κάθε αντιδράσεως είναι χαρακτηριστικά του σύνθετου πυρήνα και δεν έχει σχέση με τον τρόπο παραγωγής του, δηλ. εάν σχηματίστηκε στην αντίδραση (11.28) ή (11.29). Μερικοί κβαντικοί αριθμοί του σύνθετου πυρήνα μπορούν να προσδιορισθούν από την μελέτη των προϊόντων της διασπάσεως.

Τέλος επειδή ο χρόνος ζωής Δt του σύνθετου πυρήνα είναι πολύ μικρός η μάζα του θα έχει μεγάλη αβεβαιότητα ΔE . Από την σχέση του Heisenberg $\Delta E \cdot \Delta t = \hbar$ μπορούμε να προσδιορίσουμε τον χρόνο ζωής από την μέτρηση του εύρους Γ του συντονισμού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XII

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΥΡΗΝΩΝ

12.1 Γενικά για το υπόδειγμα φλοιών

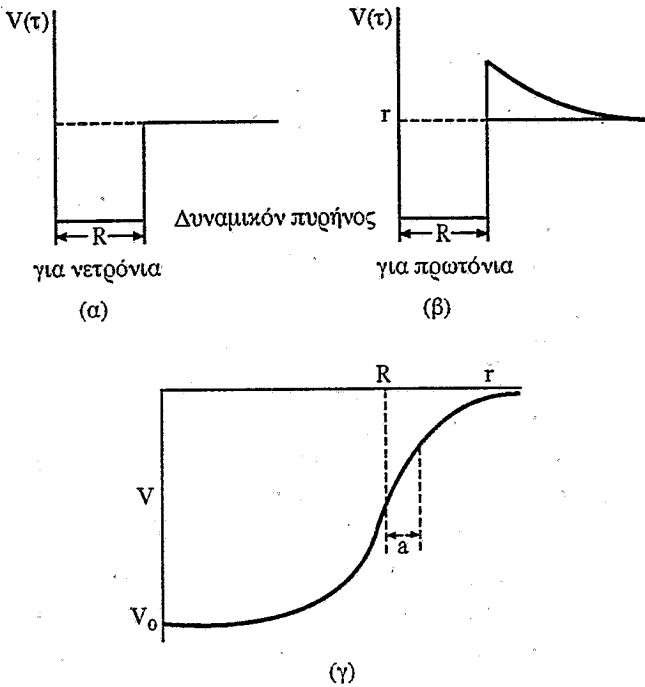
Σε προηγούμενα κεφάλαια έχουμε αναφερθεί σε ένα από τα υποδείγματα του πυρήνα, το υπόδειγμα της υγρής σταγόνας. Εδώ θα αναπτύξουμε άλλα πιο σύγχρονα υποδείγματα όπως είναι το υπόδειγμα των φλοιών. Στο άτομο όπως γνωρίζουμε έχουμε ένα χωριστό κέντρο δυνάμεων (τον πυρήνα) και όλα τα ηλεκτρόνια έχουν τις τροχιές τους με συγκεκριμένους κβαντικούς αριθμούς και κατατάσσονται σε υποφλοιούς και φλοιούς. Στον πυρήνα όμως δεν έχουμε μία τέτοια εικόνα. Το δυναμικό προέρχεται από την αλληλοεπίδραση των ίδιων νουκλεονίων, η οποία μάλιστα είναι και μικρής εμβέλειας, χωρίς κάποιο συγκεκριμένο κέντρο δυνάμεως. Έτσι υποθέτουμε ότι τα νουκλεόνια κατανέμονται σε συγκεκριμένες ενεργειακές στάθμες μέσα σε ένα φρέαρ δυναμικού του οποίου το σχήμα μπορεί να το λάβουμε σαν απλό τετραγωνικό όπως στο σχήμα 12.1α και β ή σε περίπτωση που θέλουμε μεγαλύτερη ακρίβεια να υποθέσουμε ένα δυναμικό όπως του Saxon-Woods (ή Fermi) σαν το σχήμα 12.1γ. Στο δυναμικό όμως τέτοιας μορφής η κυματοσυναρτηση για τις ιδιοκαταστάσεις των σωματίων επικαλύπτονται πάρα πολύ. Το φυγοκεντρικό δυναμικό τείνει να απομακρύνει τις κυματοσυναρτήσεις μακριά από το κέντρο του πυρήνα για $l \neq 0$ αλλά πάλι για μικρό l έχουμε σοβαρή επικάλυψη.

Η επικάλυψη των κυματοσυναρτήσεων έχει σαν συνέπεια την αύξηση της πιθανότητας συγκρούσεως μεταξύ των νουκλεονίων του πυρήνα. Βέβαια σε τέτοια περίπτωση θα ήταν αδύνατο να διανοηθούμε νουκλεόνια σε τροχιές γιατί μετά από κάθε σύγκρουση θα είχαμε ανακατανομή των ενεργειών, δομών και στροφορμών των νουκλεονίων.

Τα νουκλεόνια όμως είναι φερμιόνια και ακολουθούν την απαγορευτική αρχή του Pauli και όταν ο πυρήνας βρίσκεται στην θεμελιώδη του κατάσταση όλες οι χαμηλές ενεργειακές στάθμες είναι καταλλειμένες. Κατά τη σύγκρουση το ένα από τα δύο νουκλεόνια θα χάσει ενέργεια και πρέπει να καταλάβει μία από τις χαμηλότερες ενεργειακές στάθμες.

Εάν όμως αυτές είναι όλες καταλλειμένες η σύγκρουση δεν μπορεί να λάβει χώρα. Έτσι η μέση ελεύθερη διαδρομή των νουκλεονίων μέσα

στον πυρήνα γίνεται σχεδόν άπειρη και η έννοια της τροχιάς μπορεί να αποκατασταθεί.



Σχήμα 12.1.

12.2 Μαγικοί αριθμοί

Η πιθανότης υπάρξεως συγκεκριμένων σταθμών ενέργειας μέσα στον πυρήνα ενισχύθηκε πάρα πολύ από παρατηρήσεις χαρακτηριστικών ιδιοτήτων μερικών πυρήνων οι οποίοι έχουν ορισμένους "μαγικούς αριθμούς" νουκλεονίων, πρωτονίων ή νετρονίων ή και των δύο.

Οι κυριότερες ιδιότητες των πυρήνων με μαγικούς αριθμούς νουκλεονίων 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 είναι οι εξής:

1) Το διάγραμμα της ενέργειας συνδέσεως του τελευταίου νουκλεονίου σε συνάρτηση με το N (ή Z) παρουσιάζει μεγάλες διαφορές για ορισμένες τιμές του N (ή Z).

2) Επίσης έχουμε τις ίδιες διαφορές στην ενέργεια συνδέσεως των α -σωματιών με πυρήνες οι οποίοι έχουν $N = 82$ και 126 .

3) Μερικοί πυρήνες παρουσιάζονται στην φύση πολυπληθέστεροι

σταθερά ισότοπα από άλλα τα οποία έχουν παραπλήσιο N .

4) Οι άρτιοι πυρήνες έχουν την μέγιστη ενέργεια διεγέρσεως της πρώτης στάθμης διεγέρσεως (2^+) για μερικές τιμές του N ή Z . Μεταξύ αυτών των τιμών έχουμε πλατειά ελάχιστα (minimal).

5) Οι τετραπολικές ροπές των πυρήνων με περιττό A είναι μεγάλες όταν των γειτονικών των αρτίων-αρτίων πυρήνων οι πρώτες στάθμες διεγέρσεως είναι χαμηλές και σχεδόν μηδενικές, όταν οι στάθμες αυτές ευρίσκονται ψηλά.

6) Η ενεργός διατομή διαφόρων πυρηνικών αντιδράσεων όπως η σύλληψη από τους πυρήνες θερμικών νετρονίων δείχνει χαρακτηριστική συμπεριφορά στους πυρήνες με μαγικούς αριθμούς, και

7) Οι ομοτιμίες των θεμελειωδών καταστάσεων των πυρήνων με περιττό A παρουσιάζουν επίσης χαρακτηριστική συμπεριφορά σχετιζόμενοι άμεσα με τους μαγικούς αριθμούς.

Το συμπέρασμα όλης αυτής της φαινομενολογίας ήταν ότι πυρήνες με 2, 8, 20 (28), 50, 82 και 126 νετρόνια ή πρωτόνια (πλην των 126) είναι εξαιρετικά σταθεροί. Το ανάλογο φαινόμενο στην ατομική φυσική είναι τα ευγενή αέρια τα οποία έχουν συμπληρωμένους φλοιούς. Η σταθερότης αυτή αντικατοπτρίζεται στο μεγάλο χάσμα το οποίο πρέπει να υπάρχει στο κατάλληλο σημείο του φάσματος των ενεργειακών σταθμών. Η εύρεση του κατάλληλου υποδείγματος του πυρήνα το οποίο θα είχε αυτές τις ιδιότητες απασχόλησε επί πολλά έτη τους ερευνητές. Η επιτυχέστερη όμως συμβολή στη λύση του προβλήματος αυτού έγινε από τον Mayer και τους Haxel, Jensen και Suess το 1949.

Προτού όμως αναφερθούμε σε αυτήν θα κάνουμε μία μικρή εισαγωγή στα συμπεράσματα της κινήσεως ενός σωματίου μέσα σε φρέαρ δυναμικού.

12.3 Κίνηση σωματίου σε δυναμικό

Οι ιδιοκαταστάσεις τις οποίες μπορεί να έχει ένα νουκλεόνιο μάζας M το οποίο κινείται μέσα σε ένα σφαιρικό συμμετρικό δυναμικό $V(r)$ βρίσκονται από τις λύσεις της εξίσωσης του Schrödinger

$$\left[\nabla^2 + \frac{2M}{\hbar^2} (E - V(r)) \right] \psi(r) = 0 \quad (12.1)$$

όπου E είναι η ιδιοτιμή της ενέργειας. Οι λύσεις αυτής της εξίσωσης είναι

$$\Psi_{nlm}(r) = u_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (12.2)$$

όπου $Y_{lm}(\theta, \phi)$ είναι οι σφαιρικές αρμονικές και u_{nl} είναι η ακτινική συνάρτηση. Ο κβαντικός αριθμός n σχετίζεται με τον αριθμό των δεσμών στην ακτινική συνάρτηση και το l είναι η στροφορμή των σωματίων και ορίζει την ομότιμία η οποία είναι άρτια (ή περιττή) εάν το l είναι άρτιο (ή περιττό). Οι κβαντικοί αριθμοί n, l, m καθορίζουν την κυματοσυνάρτηση που αντιστοιχεί σε μία ιδιοτιμή E_{nl} η οποία επειδή δεν εξαρτάται από το m είναι εκφυλισμένη.

12.3.1 Τετραγωνικό Δυναμικό Απειρου Βάθους

Σε άπειρο τετραγωνικό δυναμικό η λύση της $u_{nl}(r)$ οι οποίες είναι ομαλές στην αρχή είναι οι "σφαιρικές συναρτήσεις Bessel" (με ημιακέραιους βαθμούς)

$$u_{nl} = j_l(kr) = r^{-\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(kr) \quad (12.3)$$

$$\text{όπου } k = \sqrt{2ME/\hbar^2} .$$

Οι ιδιοτιμές της ενέργειας βρίσκονται από την οριακή συνθήκη όπου:

$$\text{για } R = r, \quad j_l(k_n R) = 0 \quad (12.4)$$

για κάθε τιμή της $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ η σφαιρική συν/ση Bessel μηδενίζεται για διάφορες τιμές, οπότε η ιδιοτιμή $k_n R$ είναι το $n^{\text{ο}}$ μηδενικό της $l^{\text{ης}}$ σφαιρικής συναρτήσεως Bessel j_l .

Επειδή έχουμε δύο καταστάσεις του σπιν, κάθε στάθμη l είναι εκφυλισμένη $2(2l+1)$ φορές.

Ο κλειστοί φλοιοί συμπληρώνονται όταν ο αριθμός των πρωτονίων ή νετρονίων είναι $\sum_1 2(2l+1)$ με $l = 0, 1, 2, \dots$ δηλαδή για τους αριθμούς

2, 8, 20, ... Συνήθως οι καταστάσεις με $l = 0, 1, 2, 3$, παρουσιάζονται με τα φασματοσκοπικά σύμβολα s, p, d, f, αντιστοίχως δηλ. η κατάσταση με $l = 0$ συμβολίζεται με 1S και δένεται δύο σφαιράκια το ένα με σπιν παράλληλο

Για να συμπληρωθεί η επόμενη κατάσταση $1p$ χρειάζονται $2(2l+1) = 2(2 \cdot 1 + 1) = 6$ σωματίδια και για την επόμενη κατάσταση $1d$ χρειάζονται 10 σωματίδια κ.ο.κ.

Με το τετραγωνικό δυναμικό απείρου βάθους μπορεί να ερμηνευθούν αρκετές από τις ιδιότητες των πυρήνων αλλά δεν υπολογίζονται ακριβώς όλοι οι μαγικοί αριθμοί και ειδικότερα οι μαγικοί αριθμοί 50, 82 και 126.

12.3.2 Δυναμικό Αρμονικού Ταλαντωτή

Το δυναμικό του αρμονικού ταλαντωτή με κλασσική γωνιακή συχνότητα ω δίνεται από την σχέση

$$V(r) = \frac{1}{2} M \omega^2 r^2 \quad (12.5)$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το δυναμικό μαζί με την κυματοσυνάρτηση $\psi_{nlm}(r)$ στην εξίσωση του Schrödinger βρίσκουμε την εξίσωση

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{\hbar^2} (E_{nl} - V(r)) \right] R_{nl}(r) = 0 \quad (12.5)$$

όπου

$$R_{nl}(r) = r u_{nl}(r) \quad (12.7)$$

Το n στη σχέση αυτή χαρακτηρίζει τον αριθμό των δεσμών στην $R_{nl}(r)$ συμπεριλαμβανομένου και του δεσμού στην αρχή του συστήματος των συντεταγμένων.

Η λύση αυτή της εξίσωσης είναι

$$R_{nl}(r) = N_{nl} \exp\left(-\frac{1}{2} \nu r^2\right) r^{l+1} u_{nl}(r) \quad (12.8)$$

όπου $\nu = (M\omega)/\hbar$ και $u_{nl}(r)$ είναι τα σχετιζόμενα πολυώνυμα Laguerre και τα N_{nl} βρίσκεται από την σχέση κανονικοποίησης

$$\int_0^{\infty} R_{nl}^2(r) dr = 1 \quad (12.9)$$

Η ιδιοτιμή της ενέργειας η οποία αντιστοιχεί στην ιδιοσυνάρτηση $\Psi_{nlm}(r) = r^{-1}R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$ είναι

$$E_{nl} = \hbar \omega \left(2n + 1 - \frac{1}{2} \right) = \hbar \omega \left(\Lambda + \frac{1}{2} \right)$$

με $n = 1, 2, 3, \dots$ $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ και $\Lambda = 2n + l - 2$.

Ο αριθμός των εκφυλισμένων καταστάσεων για κάθε l είναι και εδώ $2(2l + 1)$. Αλλά και οι καταστάσεις που έχουν το ίδιο Λ είναι επίσης εκφυλισμένες.

Στο υπόδειγμα με δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή οι στάθμες παρουσιάζονται κατά ομάδες όπως είναι οι εξής

$$1s, 1p, 1d-2s, 1f-2p, 1g-2d-3s \text{ κ.ο.κ.}$$

Αυτές οι ομάδες σταθμών είναι εκφυλισμένες και καταλαμβάνουν την ίδια ενεργειακή στάθμη. Και στο υπόδειγμα αυτό παρουσιάζονται κλειστοί φλοιοί σε αριθμό νουκλεονίων 2, 8 και 20 αλλά δεν εξηγεί τους μαγικούς αριθμούς όταν ο αριθμός των νουκλεονίων είναι μεγάλος.

12.4 Δυναμικό τροχιάς και σπιν

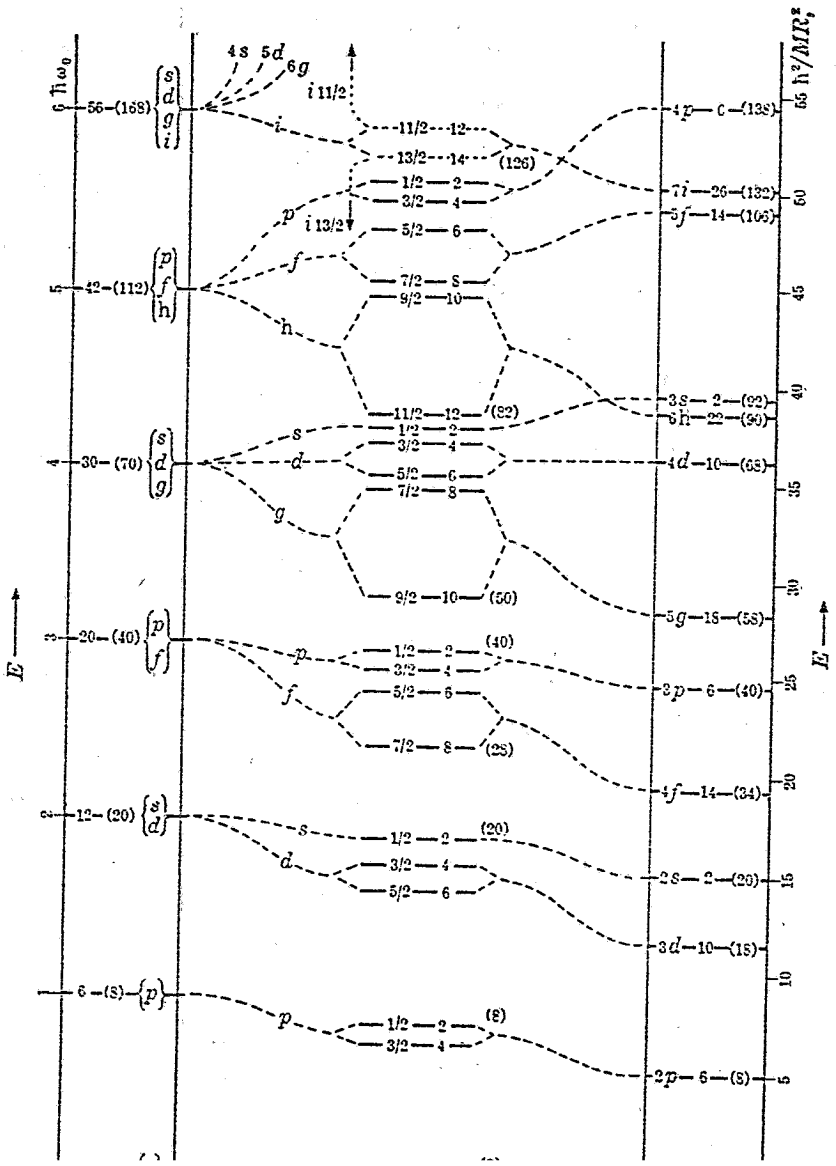
Όπως έχουμε αναφέρει για να ερμηνευθούν οι μαγικοί αριθμοί 28, 50, 82 και 126 ο Mayer και οι Hasel, Jensen και Suess επρότειναν την εισαγωγή ενός δυναμικού (αντιδράσεως) τροχιάς-σπιν επί πλέον του κεντρικού συμμετρικού δυναμικού. Σαν αποτέλεσμα έχουμε τον διαχωρισμό των σταθμών σύμφωνα με τα $j = l \pm 1/2$. Η επιλογή του σημείου του ακτινικού μέρους $f(r)$ του δυναμικού τροχιάς-σπιν επιλέγεται έτσι ώστε η στάθμη $j = l + 1/2$ να είναι χαμηλότερη από την στάθμη $j = l - 1/2$. Βεβαίως έχουμε $j = l + s$, έτσι η αναμενόμενη τιμή για τον τελεστή $l \cdot s$ για καταστάσεις με συγκεκριμένα l, s και j είναι

$$\begin{aligned} \langle l \cdot s \rangle &= \frac{1}{2} [\langle j^2 \rangle - \langle l^2 \rangle - \langle s^2 \rangle] \\ &= \frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} l \quad \gamma_{\alpha} \quad j = 1 + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} (l+1) \quad \gamma_{\alpha} \quad j = 1 - \frac{1}{2}$$

(12.10)



Η ενεργειακή διαφορά από την κεντρική τιμή είναι

$$\Delta E_{nl} \left(j = 1 + \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} I \int dr |\psi_{nl}(r)|^2 f(r) \quad (12.11)$$

$$\Delta E_{nl} \left(j = 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} (1+1) \int dr |\psi_{nl}(r)|^2 f(r) \quad (12.12)$$

Η αντίδραση μεταξύ τραχειάς και σπιν διαχωρίζει κάθε μία από τις ανώτερες στάθμες 1f, 1g, 1h και 1i έτσι ώστε η $j = 1 + 1/2$ στάθμη χαμηλώνει και ανακατεύεται με την ζώνη των ενεργειακών σταθμών που αντιστοιχούν στις στάθμες με μικρότερα l .

Στο σχήμα 12.2 παρουσιάζονται παραστατικά οι ενεργειακές στάθμες για διάφορα δυναμικά. Εκεί φαίνεται καθαρά ότι ο διαχωρισμός μερικών σταθμών π.χ. της 1h σε $1h_{1/2}$ και $1h_{3/2}$ είναι αρκετός να μας δώσει μεγάλο ενεργειακό χάσμα και παρουσίαση ενός κλεισματος φλοιού στον (μαγικό) αριθμό νουκλεονίου 82.

12.5 Συζήτηση για το υπόδειγμα των φλοιών

Εκτός από την εύρεση των μαγικών αριθμών το υπόδειγμα των φλοιών με κατάλληλες συμπληρώσεις εξηγεί και άλλες ιδιότητες των πυρήνων. Μια από τις επιτυχίες είναι η ερμηνεία των σπιν των βασικών καταστάσεων των πυρήνων με περιττό A . Κατά το υπόδειγμα οι στάθμες των πρωτονίων και των νετρονίων συμπληρώνεται με δύο πρωτόνια ή νετρόνια των οποίων τα σπιν θα είναι αντιπαράλληλα. Έτσι τα j του ζευγαριού θα είναι μηδέν οπότε η στροφορμή του πυρήνα θα καθορίζεται από το τελευταίο αζευγάρωτο νουκλεόνιο. Σαν αποτέλεσμα αυτού του συλλογισμού θα ανεμένετο ότι οι άρτιοι-άρτιοι πυρήνες να έχουν $J = 0$. Αυτό δε παρατηρείται και στην πράξη. Για τους περιττούς-περιττούς πυρήνες δυστυχώς δεν έχουμε τόσο απλούς κανόνες και για τους περιττούς-άρτιους πυρήνες η στροφορμή εξαρτάται από την στάθμη την οποία καταλαμβάνει το τελευταίο νουκλεόνιο.

12.6 Υπόδειγμα συλλογικών κινήσεων

Το υπόδειγμα των συλλογικών κινήσεων απεδείχθηκε από τους Bohr και Mottelson, με κύριο σκοπό την ερμηνεία των μεγάλων τιμών της ηλεκτρικής τετραπολικής ροπής την οποία βρίσκουμε σε μερικά νουκλεόνια. Αυτά είναι: ως επί το πλείστον, νουκλίδια με περιττά A και

Ο Rainwater παρατήρησε, ότι εάν υποθεθεί ότι οι πυρήνες είναι παραμορφωμένοι τότε η κατανομή των πρωτονίων μέσα σε ένα μη σφαιρικό πυρήνα μπορούσε να μας δώσει μεγάλες τιμές ηλεκτρικής τετραπολικής ροπής. Ο παραμορφωμένος πυρήνας μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από την πολωτική αντίδραση της "καρδιάς" του πυρήνα, η οποία είναι και η βάση της συλλογικής κινήσεως, με μερικά νουκλεόνια τα οποία δεν είναι ισχυρά συνδεδεμένα με τον υπόλοιπο πυρήνα.

Όπως έχουμε ήδη παρουσιάσει τα νουκλεόνια υπάρχουν κατά ένα συγκεκριμένο αριθμό ομοειδών ζευγών, έχουμε κλειστούς φλοιούς και ο πυρήνας παίρνει ένα σφαιρικό σχήμα.

Τα επί πλέον νουκλεόνια καταλαμβάνουν στάθμες οι οποίες βρίσκονται έξω από τους κλειστούς φλοιούς και δεν είναι συμπληρωμένες. Τότε ο πυρήνας αρχίζει και παραμορφώνεται και τελικά παίρνει ένα ελλειψοειδές σχήμα.

Έτσι η ύπαρξη της συλλογικής κινήσεως χαρακτηρίζεται από την απόκλιση από την σφαιρική συμμετρία του πυρηνικού συστήματος. Αυτή βεβαίως μπορεί να είναι η περιστροφική κίνηση ενός μονίμως παραμορφωμένου πυρήνα ή η ταλάντωση ενός πυρήνα με διάφορους βαθμούς παραμορφώσεως.

12.6.1 Κίνηση ενός σωματίου σε παραμορφωμένο δυναμικό

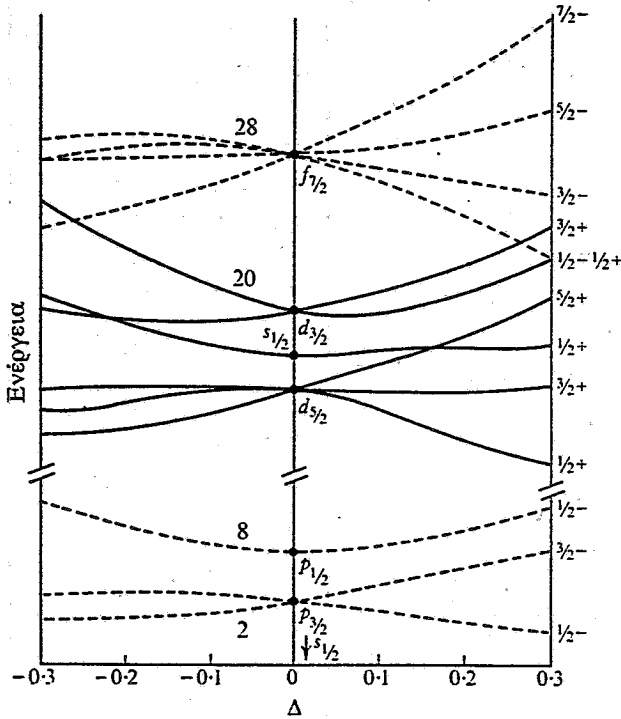
Μεταξύ άλλων και ο Nilsson εμελέτησε τις στάθμες σωματίου σε σφαιροειδές φρέαρ δυναμικού, το οποίο έχει άξονα συμμετρίας (z'). Η παραμόρφωση του δυναμικού χαρακτηρίζεται από μία παράμετρο

$$\delta = \frac{\Delta R}{R} = \frac{a - b}{R} \quad (12.13)$$

όπου R είναι η μέση πυρηνική ακτίνα και a, b αντίστοιχα ο κύριος και δευτερεύον ημιάξονας του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής. Για ένα τέτοιο φρέαρ δυναμικού, το οποίο είναι σταθερό στον χώρο (επειδή δεν υπάρχει σφαιρική συμμετρία) η ολική στροφορμή J δεν είναι σταθερά της κινήσεως.

Επειδή όμως το σύστημα έχει συμμετρία περί άξονα η στροφορμή (K) περί αυτό τον άξονα είναι σταθερά της κινήσεως. Η συμπεριφορά συναρτήσεως της δ , μοναχικών σωματίων, για μερικές χαμηλές στάθμες δίνεται στο σχήμα 12.3. Για κάθε καμπύλη αναγράφεται η τιμή της $|K|$ και η ομοτιμία της στάθμης για $\delta \neq 0$. Επειδή η παραμόρφωση είναι τετραπολική δεν υπάρχουν διακεκομμένες "καρδιές" που "κινούνται" από

κάθε καμπύλη είναι εκφυλισμένη και αντιστοιχεί στις τιμές $\pm K$. Στο όριο $\delta = 0$ παρουσιάζονται οι σφαιρικές καταστάσεις. Ιδιαίτερα τρεις καταστάσεις με διαφορετικό $|K|$ συμπίπτουν (στο όριο $\delta = 0$) στην κατάσταση $d_{5/2}$, οπότε έχουμε εκφυλισμό 6. Αυτό συμφωνεί με $(2j+1)$ φορές εκφυλισμό στον χώρο.



Σχήμα 12.3.

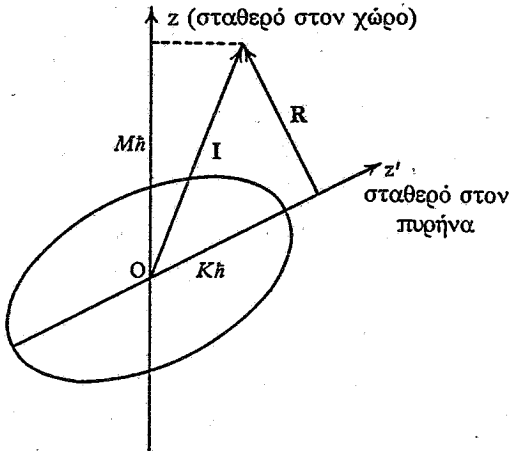
12.6.2 Περιστροφή του Συστήματος

Στην πραγματικότητα το δυναμικό αυτό μπορεί να περιστρέφεται στον χώρο γύρω από έναν άξονα (z), ο οποίος δεν συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας του πυρήνα (z'). Εάν η περιστροφική αυτή κίνηση είναι αργή, συγκρινόμενη με την κίνηση του ενός σωματίου (το αδιαβατικό όριο), τότε το σωματίο θα έχει μια "καθορισμένη συνιστώσα της στροφορμής" (K κατά μήκος του άξονα συμμετρίας χωρίς η στροφορμή j να είναι καθορισμένη. Η ολική στροφορμή J του συστήματος θα είναι καθορισμένη και θα έχει συνιστώσα K κατά τον άξονα z' και M κατά τον άξονα

περιστροφής z . Βεβαίως η ολική στροφορμή \mathbf{J} θα είναι (το ανυσματικό άθροισμα)

$$\mathbf{J} = \mathbf{j} + \mathbf{R}$$

όπου \mathbf{R} είναι η περιστροφή του πυρήνα (βλέπε σχήμα 12.4).



Σχήμα 12.4.

Θα έχουμε, επίσης, $j_{z'} = J_{z'} = K\hbar$ και $J_z = M\hbar$. Επειδή η \mathbf{j} δεν είναι σταθερά της κινήσεως το j^2 δεν είναι καθορισμένο π.χ. η κατάσταση με $J^2 = 7/2$ μπορεί να γίνει από τις τροχιακές καταστάσεις $f_{7/2}$, $h_{9/2}$, και $h_{11/2}$, οι οποίες συνδιάζονται με το $R = 0$ ή $R = 2$.

Η ενέργεια εκ περιστροφής δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} E_K &= \frac{\hbar^2}{2I} \langle R^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2I} \langle (J-j)^2 \rangle \\ &= \frac{\hbar^2}{2I} (J(J+1) + \langle j^2 \rangle - 2\langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{j} \rangle) \\ &= \frac{\hbar^2}{2I} (J(J+1) + \langle j^2 \rangle - 2K^2) \end{aligned} \quad (12.14)$$

αυτό ισχύει επειδή γενικά έχουμε

$$\langle J_x j_x + J_y j_y \rangle = 0 \quad (12.15)$$

εκτός από τις περιπτώσεις κατά τις οποίες η κυματοσυνάρτηση έχει συνιστώσες από τις $K \pm 1$ και K συγχρόνως. Σε μερικές περιπτώσεις βεβαίως ισχύει αυτό, αλλά για απλούστευση θα το αγνοήσουμε. Για ευκολία, επίσης, μπορούμε να περιλάβουμε τον όρο του $\langle j^2 \rangle$ με τους αντίστοιχους όρους οι οποίοι περιγράφουν την κίνηση του απλού σωματίου.

Η σχέση (12.14), με τις πάρα πάνω διορθώσεις, εκφράζει μία σειρά "καταστάσεων εκ περιστροφής", οι οποίες βασίζονται σε κοινή κυματοσυνάρτηση σχετικά με τον άξονα του πυρήνα. Η πιο χαμηλή κατάσταση θα έχει $J = K$ και $(2K+1)$ εκφυλισμό.

Έτσι, για τον μεμονωμένο πυρήνα, η σύγκλιση στο όριο $\delta = 0$ για π.χ. την $d_{5/2}$ θα έχει τρεις τιμές για την J ($1/2, 3/2$ και $5/2$) αντί την μίας καταστατάσεως $5/2$ που θα είχε ο σφαιρικός πυρήνας. Βεβαίως, αυτό συμβαίνει γιατί στο σχήμα 12.3 δεν έχουμε λάβει υπ' όψη την περιστροφή του πυρήνα.

Για να υπολογίσουμε την περιστροφή πρέπει να προσδιορίσουμε την φύση της, η οποία μπορεί να είναι περιστροφή ενός συμπαγούς στερεού ή περιστροφή ενός υδροδυναμικού υγρού. Παράδειγμα της τελευταίας κινήσεως είναι η παληριακή παραμόρφωση της Γης από την Σελήνη. Στην επιφάνεια της γης αυτή παρουσιάζεται σαν από την Σελήνη. Στην επιφάνεια της γης αυτή παρουσιάζεται σαν περιστροφή ενώ στην πραγματικότητα η κίνηση είναι κατακόρυφη. Πειραματικά αποτελέσματα επιβεβαιώνουν ότι η περιστροφή του πυρήνα πλησιάζει περισσότερο περιστροφή υδροδυναμικού υγρού με $I \sim I_0 \delta^2$, όπου $I_0 = 2/5 MR^2$, η οποία είναι η ροπή αδράνειας μιας σφαίρας ακτίνας R . Από την σχέση 12.14 βλέπουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση η ενέργεια εκ περιστροφής, γίνεται πάρα πολύ μεγάλη για μικρές του δ . Έτσι, δεν μπορούμε πρώτα να υπολογίσουμε την ταλάντωση του σωματίου, μέσα στο παραμορφωμένο φρέαρ δυναμικού, και μετά να επιστρέψουμε το σύστημα να περιστραφεί. Αυτό μπορεί να γίνει μόνο για μεγάλες τιμές του δ , όταν δηλαδή η ενέργεια περιστροφής είναι μικρή συγκρινόμενη με τις διαφορές των ενεργειακών σταθμών από τις ταλαντώσεις, οι οποίες έχουν παρουσιασθεί στο σχήμα 12.3.

12.6.3 Συζήτηση του Υποδείγματος Συλλογικών Κινήσεων

Όπως έχουμε αναφέρει στην προηγούμενη παράγραφο για μεγάλα δ οι καμπύλες του σχήματος 12.3 παριστάνουν σωστά την διάταξη των καταστάσεων. Τα σωματίδια συνδιάζονται ανά ζεύγη με ίσα και

την θεμελιώδη κατάσταση $J = 0$. Σε αυτήν την περίπτωση οι καταστάσεις με διαφορετικό J έχουν

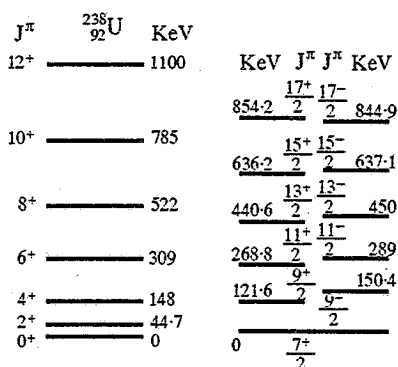
$$E_R \propto J(J+1) \frac{\hbar^2}{2I}$$

και δημιουργούν μια ζώνη ενεργειακών σταθμών εκ περιστροφής. Λόγω της υπάρχουσας συμμετρίας (απάνω = κάτω) μπορεί να αποδειχθεί εύκολα ότι μόνο άρτιες τιμές του J υπάρχουν.

Για πυρήνες με περιττό A η διαδοχή των καταστάσεων στο σχήμα 12.3 καθορίζει μία τιμή του $|K|$ για την θεμελιώδη κατάσταση. Και σε αυτήν την περίπτωση δημιουργείται μια ζώνη ενεργειακών σταθμών εκ περιστροφής οι οποίες έχουν ενέργειες

$$E_R \propto [(J(J+1) - K(K+1))] \frac{\hbar^2}{2I}$$

Για την περίπτωση $K = 1/2$, λόγω της υπάρξεως του όρου $\langle J \cdot j \rangle$, έχουμε μια πολύ πιο πολύπλοκη διάταξη των σταθμών ενεργείας.



Σχήμα 12.5.

Στο σχήμα 12.5 παρουσιάζεται ένα τυπικό διάγραμμα για ένα ιζήτιο και ένα περιττό πυρήνα. Παρατηρούμε ότι ακόμα και για μεγάλα $|K|$ οι τιμές των ενεργειακών σταθμών εκ περιφοράς είναι μικρότερες του ενός MeV. Οι πειραματικές τιμές των σταθμών αυτών εκφράζονται με τον πλό αυτόν τρόπο, εκτός από μερικές μικροδιαφορές οι οποίες προέρχονται από την φαινomenολογική διασπορά των πυρήνων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XIII

ΣΧΑΣΗ ΚΑΙ ΣΥΝΤΗΞΗ ΠΥΡΗΝΩΝ

13.1 Γενικά

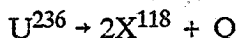
Η σχάση των πυρήνων είναι ένα από τα σημαντικότερα φαινόμενα της πυρηνικής φυσικής, με μεγάλη πρακτική εφαρμογή. Ένας βαρύς πυρήνας κατά ένα τρόπο, γίνεται ασταθής και διαχωρίζεται σε δύο μεγάλα τεμάχια, όπως είναι το Ba^{139} και Kr^{97} , με ταυτόχρονη έκληση άλλων σωματιών και ενέργειας.

Η σχάση των πυρήνων μπορεί, για πολύ βαρείς πυρήνες, όπως το Cf^{254} , να είναι αυθόρμητη. Τις περισσότερες φορές, όμως, για να γίνει η σχάση, χρειάζεται ο πυρήνας να βομβαρδισθεί με βραδέα (θερμικά) ή ταχέα σωματία. Σε όλες τις περιπτώσεις των σχάσεων αποβάλλονται και νετρόνια "ατμοποιήσεως" των πυρήνων, τα οποία μπορούμε κατόπιν έιδικής διεργασίας να τα χρησιμοποιήσουμε για την σχάση άλλων πυρήνων. Με αυτόν τον τρόπο πραγματοποιείται μια "αλυσιδωτή αντίδραση".

Έστω ότι πυρήνας μαζικού αριθμού A και ατομικού αριθμού Z σχάται σε δύο όμοιους πυρήνες με μαζικό και ατομικό αριθμό $A/2$ και $Z/2$ αντίστοιχα. Τότε από τον τύπο της μάζας του Weiszäcker έχουμε

$$M(A, Z) - 2M\left(\frac{A}{2}, \frac{Z}{2}\right) = 17,2A^{\frac{2}{3}}\left(1 - 2^{-\frac{1}{3}}\right) + 0,70\left(\frac{Z^2}{A^{1/3}}\right)\left(1 - 2^{-\frac{2}{3}}\right) \text{ MeV} \quad (13.1)$$

Εάν εφαρμόσουμε την σχέση (13.1) στην αντίδραση

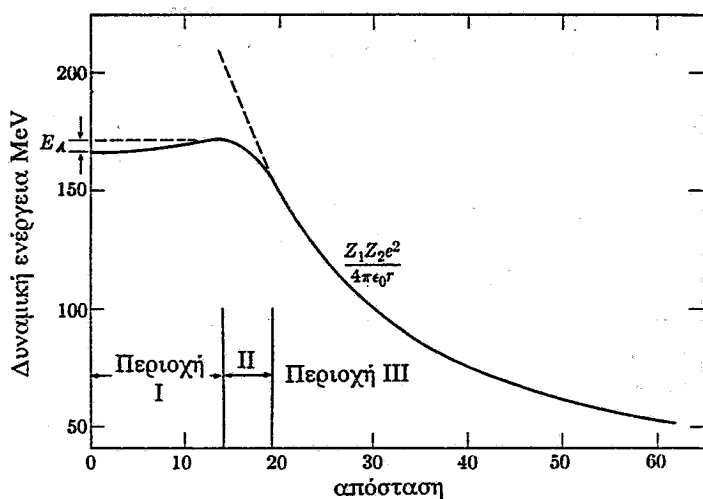


βρίσκουμε ότι η εκλυομένη ενέργεια $Q = 169 \text{ MeV}$.

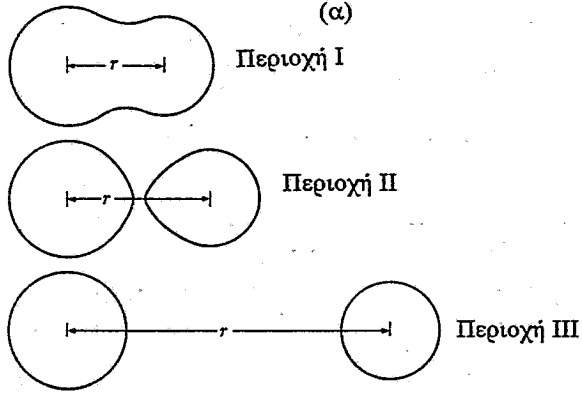
Η διαφορά του αριστερού μέρους της (13.1) παίρνει θετικές τιμές όταν $A > 92$ οπότε και συμβαίνει το φαινόμενο της σπάσεως.

13.2 Η θεωρία του φαινομένου σχάσεως

Συνήθως η μελέτη της σταθερότητας του αρχικού πυρήνα γίνεται με την παραμόρφωσή του από το σφαιρικό σχήμα σε ένα άλλο π.χ. ελλειψοειδές. Εάν λόγω μεταβολής της επιφανειακής ενέργειας (ΔE_s) και της ηλεκτροστατικής (ΔE_e) η δυναμική ενέργεια του αρχικού πυρήνα αυξάνει, τότε αυτός είναι σταθερός. Αντίστοιχα, μείωση της δυναμικής ενέργειας δηλώνει αστάθεια.



(α)



(β)

Σχήμα 13.1. Σχέδιο το οποίο δείχνει την σχάση βαρέου πυρήνα σε δύο τεμάχια. Στο σχήμα α παρουσιάζεται η δυναμική ενέργεια σαν συνάρτηση της αποστάσεως μεταξύ των δύο τεμαχίων. Στο σχήμα β δίνεται μία παραστατική απεικόνιση των τεμαχίων της σχάσεως σε τρία ηπικό στάδια και οι αντίστοιχόνες περιονές I

Εάν υποθέσουμε ότι ο πυρήνας διασπάται σε δύο σχεδόν ίσα τεμάχια, τότε το διάγραμμα της δυναμικής ενέργειας του συστήματος συναρτήσει της αποστάσεως r , των κέντρων αυτών των δύο τεμαχίων, έχει τη μορφή του σχήματος 13.1. Στο σχήμα αυτό παρουσιάζονται τρία χαρακτηριστικά στάδια της σχάσεως, τα οποία αντιστοιχούν σε τρεις περιοχές του διαγράμματος 13.1. Στην περιοχή I η απόσταση r είναι μικρότερη από το άθροισμα των ακτίνων των δύο τεμαχίων R_1 και R_2 και παρουσιάζεται σαν απλή παραμόρφωση του μητρικού πυρήνα. Η παραμόρφωση αυτή αντιπροσωπεύει συνήθως αύξηση της δυναμικής ενέργειας του πυρήνα και για την μελέτη της μπορεί να χρησιμοποιηθεί η παράμετρος ΔR ενός ελλειψοειδούς πυρήνα όπως αυτή έχει οριστεί σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Στην περιοχή II διαχωρίζονται μεν οι δύο πυρήνες, αλλά το μεταξύ των χάσμα είναι μικρότερο από την εμβέλεια των πυρηνικών δυνάμεων και η δυναμική ενέργεια αρχίζει να μειώνεται. Η ακριβής μορφή της δυναμικής ενέργειας σε αυτήν την περιοχή δεν είναι και πολύ γνωστή.

Στην περιοχή III η απόσταση μεταξύ των δύο τεμαχίων είναι πολύ μεγαλύτερη από την εμβέλεια των πυρηνικών δυνάμεων και υπάρχει μόνο η άπωση των δυνάμεων Coulomb. Στην περιοχή αυτή είναι προφανές ότι το δυναμικό είναι:

$$V = Z_1 Z_2 e^2 / r,$$

όπου Z_1 και Z_2 είναι οι ατομικοί αριθμοί των τεμαχίων της σχάσεως.

Για $r = 0$ η απόλυτη τιμή της ενέργειας είναι ίση με την μάζα του πυρήνα $M(A, Z)c^2$.

Για $r \rightarrow \infty$ η δυναμική ενέργεια είναι ίση με το άθροισμα των μαζών των τεμαχίων (δύο σε αυτήν την περίπτωση) της διασπάσεως.

Η διαφορά των ενεργειών αυτών είναι ίση με το Q της σχάσεως.

Η αύξηση της δυναμικής ενέργειας στην περιοχή I ονομάζεται "κατώφλιο σχάσεως" και δεν είναι επακριβώς γνωστή. Εάν βεβαίως, η ενέργεια αυτή ήταν θετική, τότε θα είχαμε αυθόρμητη διάσπαση του πυρήνα μέσα σε χρόνο χαρακτηριστικό των πυρηνικών αντιδράσεων. Εάν το φρέαρ του δυναμικού, το οποίο αντιπροσωπεύει το κατώφλιο σχάσεως είναι αρνητικό, τότε θα περίμενε κανείς ότι ο πυρήνας είναι σταθερός. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις κατά τις οποίες λόγω του φαινομένου σύραγγος έχουμε διέλευση μέσα από το φράγμα δυναμικού και αυθόρμητη σχάση. Επειδή τα σωμάτια τα οποία διασχίζουν το φράγμα έχουν μεγάλη

κατώφλιο σχάσεως, έτσι το φρέαρ του δυναμικού πρέπει να είναι πολύ ρηχό (της τάξεως ολίγων εκατοντάδων KeV) για να έχουμε σχάση. Αυτό είναι ένα καινούργιο φαινόμενο, δηλ. διάσπαση του πυρήνα με αυθόρμητη σχάση. Μερικά παραδείγματα πυρήνων με τους χαρακτηριστικούς χρόνους ζωής των δίδονται πάρα κάτω.

$${}_{92}^{235}\text{U} \quad (\tau_f \sim 2 \times 10^{17} \text{ έτη}),$$

$${}_{92}^{238}\text{U} \quad (\tau_f \sim 10^{16} \text{ έτη})$$

$${}_{94}^{240}\text{Pu} \quad (\tau_f \sim 10^{11} \text{ έτη}),$$

$${}_{98}^{250}\text{Cf} \quad (\tau_f \sim 10^{10} \text{ έτη})$$

$${}_{98}^{254}\text{Cf} \quad (\tau_f \sim 55 \text{ ημέρες}).$$

Εάν το φρέαρ του δυναμικού είναι λίγο βαθύτερο τότε μπορεί ο πυρήνας, στη θεμελιώδη του κατάσταση, να είναι σταθερός, ενώ σε μια κατάσταση διεγέρσεως να είναι ασταθής. Έτσι μπορούμε να έχουμε σε αυτούς τους πυρήνες σχάση αντί εκπομπή ακτινοβολίας γ . Τέτοιες στάθμες μπορεί να διεγερθούν από τον μη ελαστικό σκεδασμό π.χ. (p, p') ή (n, n') διαφόρων σωματιών από τον πυρήνα.

Για μεγαλύτερο βάθος του φρέατος του δυναμικού είναι πολύ σπουδαίο να γνωρίζουμε την θέση της κορυφής του κατωφλίου σχάσεως εν σχέσει με την αστάθεια των νετρονίων. Δηλαδή πρέπει να γνωρίζουμε εάν η απορρόφηση ενός νετρονίου κάνει τον πυρήνα ασταθή ή όχι. Εάν π.χ. το κατώφλιο σχάσεως είναι 1 MeV, χρειάζεται νετρόνια ενέργειας μεγαλύτερης από 1 MeV για να γίνει άμεση σχάση του πυρήνα. Νετρόνια, βεβαίως, μικρότερης ενέργειας μπορούν να προκαλέσουν σχάση αλλά μέσω του φαινομένου σύραγγος. Μερικά παραδείγματα τέτοιων πυρήνων, μαζί με το κατώφλιο σχάσεως, δίνονται πάρα κάτω.

$${}_{90}^{232}\text{Th} \quad (1,3 \text{ MeV}), \quad {}_{92}^{234}\text{U} \quad (0,4 \text{ MeV}), \quad {}_{92}^{236}\text{U} \quad (0,8 \text{ MeV})$$

$${}_{92}^{238}\text{U} \quad (1,1 \text{ MeV}), \quad {}_{93}^{237}\text{Np} \quad (0,4 \text{ MeV})$$

ενώ οι πυρήνες ${}^{233}\text{U}$, ${}^{235}\text{U}$ και ${}^{239}\text{Pu}$ παθαίνουν σχάση όταν συλλάβουν ένα θερμικό (δηλ. πολύ μικρής ενέργειας) νετρόνιο. Στα πάρα πάνω παραδείγματα βλέπουμε την σημασία που έχει εάν ο αριθμός των νετρονίων είναι άρτιος ή περιττός. Το κατώφλιο σχάσεως αντικατοπτρίζει την τάση που έχουν τα νουκλεόνια να δημιουργούν ζεύγη.

Έχει αποδειχθεί πειραματικά ότι τα τεμάχια της σχάσεως έχουν άνιση μάζα με μέσες τιμές των μαζικών αριθμών $\bar{A}_1 \approx 85$ και $\bar{A}_2 \approx 140$. Το φαινόμενο αυτό δεν έχει εοικνευθεί ακόμα. Υπάρχουν θεωρίες οι οποίες

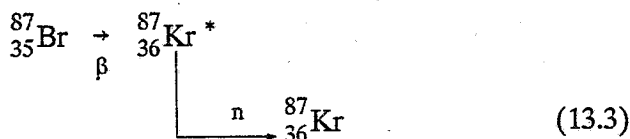
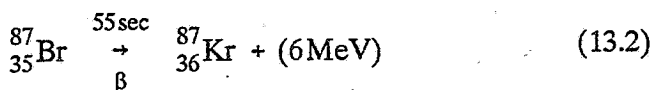
σχάσεως, μερικών μόνον πυρήνων ενώ αδυνατούν να εξηγήσουν άλλες κατανομές.

Υπάρχει πιθανότητα οι μαζικοί αριθμοί να παίζουν κάποιο ρόλο, αλλά γενικά έχει παρατηρηθεί ότι όταν τα νετρόνια βοβαρδισμού έχουν ενέργεια πλησίον του κατωφλίου σχάσεως οι μάζες των τεμαχίων είναι πολύ ασύμμετρες (85-140). Όταν, όμως, ανεβαίνει η ενέργεια των νετρονίων με τα οποία δημιουργούμε την σχάση και η συμμετρία των μαζών των δύο τεμαχίων αποκαθίσταται.

13.3 Ενεργειακό φάσμα των νετρονίων και ισολογισμός της σχάσεως

Η σχάση των βαρέων πυρήνων είναι πολύ εξώθερμη με τιμή $Q \approx 200 \text{ MeV}$. Επί πλέον τα τεμάχια της διασπάσεως είναι διεγερμένοι πυρήνες πολύ πλούσιοι σε νετρόνια. Αυτοί μετατρέπονται σε σταθερούς πυρήνες αποβάλλοντας νετρόνια σχεδόν αμέσως ($\tau < 10^{-16} \text{ sec}$) με ένα φάσμα το οποίο έχει το μέγιστό του $\sim 1 \text{ MeV}$.

Επί πλέον έχει παρατηρηθεί ότι $\sim 0.5\%$ των νετρονίων παράγονται με κάποια χρονική καθυστέρηση. Αυτά προέρχονται από πυρήνες, οι οποίοι έχουν πρώτα υποστεί ακτινοβολία β , π.χ. το τεμάχιο σχάσεως Br έχει τις εξής δυνατότητες



Από την (13.3) βλέπουμε ότι το Br αποβάλλοντας μία ακτίνα β μπορεί να μεταπέσει σε διεγερμένο Kr* με ενέργεια διεγέρσεως $> 5,6 \text{ MeV}$ και αυτό αποδιεγείρεται αποβάλλοντας ένα νετρόνιο. Είναι αυτονόητο ότι η εκπομπή του n θα γίνει μετά την εκπομπή της ακτίνας β και για αυτό παρουσιάζεται καθυστερημένα.

Ο αριθμός των νετρονίων (ν), ο οποίος αποβάλλεται, εξαρτάται από τον πυρήνα και την ενέργεια του διεγείροντος νετρονίου, έχουμε όμως $\nu \sim 2 - 2,5$.

Το ενεργειακό τους φάσμα δίνεται με ένα εμπειρικό τύπο

$$F(E) = 1,53 \sqrt{\frac{0,775E}{\pi}} e^{-0,775E} \quad (13.4)$$

όπου E μετριέται σε MeV.

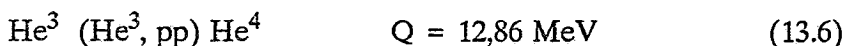
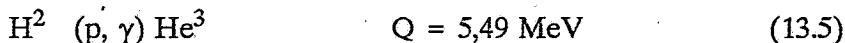
Εάν η πιθανότητα να κάνει ένα νετρόνιο μία σχάση είναι p , τότε όταν έχουμε $pn > 1$ θα έχουμε αλυσιδωτή αντίδραση. Με κατάλληλα μέσα μπορούμε να ελέγξουμε την πιθανότητα έτσι ώστε να έχουμε μια ελεγχόμενη έκκλιση ενέργειας και δημιουργία ενός αντιδραστήρα. Για να έχουμε μία εποπτική εικόνα των ενεργειών δίνουμε στον πίνακα τον ισολογισμό της ενέργειας σχάσεως ενός τυπικού βαρέος πυρήνα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 13.1.

Ενέργεια Σχάσεως	MeV
Κινητική ενέργεια δύο πυρήνων	165 ± 5
Κινητική ενέργεια 2 έως 3 n	5
Ενέργεια 5 ακτίνων γ	6 ± 1
Ενέργεια περίπου 7 ακτίνων β	$8 \pm 1,5$
Ενέργεια νετρίνων	$12 \pm 2,5$
Ενέργεια 7γ (από προϊόντα)	6 ± 1
Συνολική ενέργεια σχάσεως	204 ± 7

13.4 Σύντηξη (Fussion)

Ένα άλλο φαινόμενο τεράστιας μελλοντικής πρακτικής εφαρμογής είναι η εξώθερμη σύντηξη δύο ελαφρών πυρήνων για τον σχηματισμό ενός άλλου βαρύτερου πυρήνα. Μία ιδέα του φαινομένου παίρνουμε από τις κάτωθι αντιδράσεις



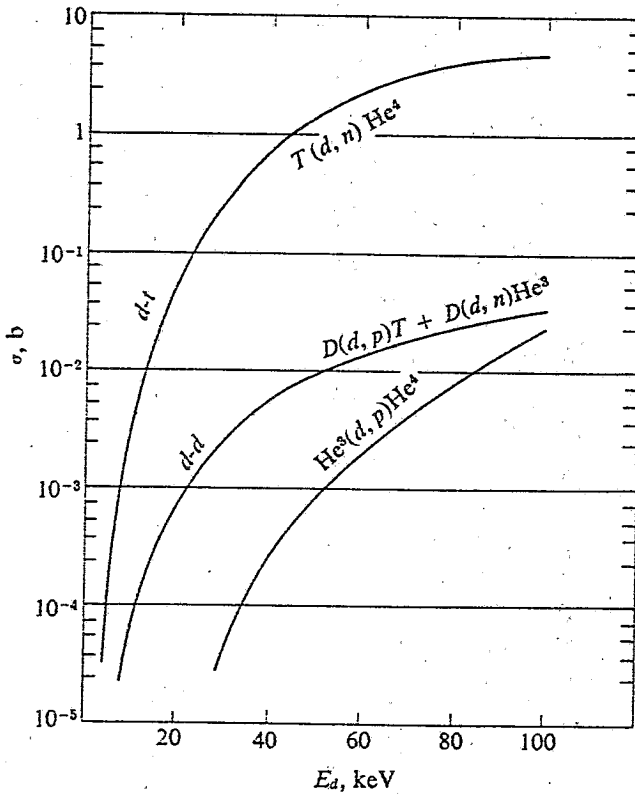
Οι πλέον όμως προσοδοφόρες αντιδράσεις για εργαστηριακές θερμοπυρηνικές εφαρμογές είναι οι εξής:

αντίδραση	Q (MeV)	
$H^2 (d, n) He^3$	3,27	(13.7)
$H^2 (d, p) H^3$	4,03	(13.8)
$H^3 (d, n) He^4$	17,59	(13.9)
$He^3 (d, p) He^4$	18,40	(13.10)

Για να λάβουν χώρα οι πάρα πάνω αντιδράσεις πρέπει τα σωματίνα να έχουν αρκετή κινητική ενέργεια ώστε να υπερπηδήσουν το δυναμικό Coulomb. Ένας τρόπος επιτεύξεως των κατάλληλων συνθηκών είναι η παραγωγή ενός "πλάσματος" από τον ιονισμό των αερίων και την διατήρησή τους μέσα σε περιορισμένο χώρο με κατάλληλα μαγνητικά πεδία. Η ταχύτης της συντήξεως είναι συνάρτηση της πυκνότητας του πλάσματος, της ενεργού διατομής κάθε αντιδράσεως $\sigma(E_1, E_2)$, η οποία βεβαίως εξαρτάται από τις κινητικές ενέργειες των αντιδρόντων σωματιών (E_i) ή την θερμοκρασία του πλάσματος (T_i) και τον χρόνο διατηρήσεως των συνθηκών της συντήξεως.

Η πυκνότης της αποδομένης ενέργειας προέρχεται από την διαφορά μεταξύ της παραγόμενης ενέργειας και των απωλειών υπό μορφή ακτινοβολίας πέδης, διαφυγής ιόντων και πολλών άλλων παραγόντων επειδή η "κρίσιμη" θερμοκρασία είναι της τάξεως πολλών εκατομμυρίων °C.

Στο σχήμα 13.2 παρουσιάζουμε την ενεργό διατομή για θερμοπυρηνική αντίδραση των (13.7) έως (13.10) συνάρτηση της μέσης κινητικής ενέργειας των αντιδρόντων σωματιδίων. Από το σχήμα αυτό βλέπουμε ότι η πλέον προσοδοφόρος αντίδραση είναι $T(d,n)He^4$, η οποία για μία θερμοκρασία $10^8 K$, η οποία αντιστοιχεί σε μέση θερμική ενέργεια των αντιδρόντων σωματιών ~ 10 KeV, η ενεργός διατομή είναι ~ 10 mb. Εάν διατηρήσουμε αυτές τις συνθήκες για ένα μικρό χρονικό διάστημα τότε θα έχουμε μια απόδοση ενέργειας ~ 4 MeV/νουκλεόνιο. Μία από τις δυσκολίες βεβαίως είναι ότι η αντίδραση με T δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μεγάλη παραγωγή ενέργειας λόγω μη υπάρξεως των κατάλληλων υλικών.



Σχήμα 13.2.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

A.1 Γενικά

Σε αυτό το παράρτημα αναπτύσσονται οι ηλεκτρομαγνητικές αντιδράσεις με πυρήνες. Το σύστημα που χρησιμοποιείται είναι ανάμεικτο, μπορεί να διαβαστεί στο Gaussian cgs σύστημα μονάδων ή το σύστημα mks. Για το πρώτο θέτουμε $\mu_0 = \epsilon_0 = 1$ και για το δεύτερο παραλείπουμε τις ποσότητες $[4\pi]$ και $[c]$ που είναι σε αγκύλες. Γνωρίζουμε βεβαίως ότι στο σύστημα mks $\sqrt{\mu\epsilon} = 1/v$ όπου v είναι η ταχύτητα του φωτός σε υλικό το οποίο έχει διηλεκτρική σταθερά ϵ και μ στο κενό έχουμε $\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 1/c$.

Στην αρχή μελετάμε το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στον ελεύθερο χώρο χωρίς πηγές ακτινοβολίας. Οι εξισώσεις του Maxwell σε αυτή την περίπτωση είναι

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (\text{A.1a})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{A.1b})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \left[\frac{1}{c} \right] \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{A.1c})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu\epsilon}{[c]} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{A.1d})$$

όπου τα πεδία $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ και $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ είναι συνεχείς ανυσματικές συναρτήσεις θέσεως \mathbf{r} και χρόνου t .

Εισάγωντας τα μιγαδικά ανυσματικά πλάτη $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ και $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ μπορούμε να υποθέσουμε την χρονική εξάρτηση των πεδίων σαν

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \} \quad (\text{A.2a})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \{ \mathbf{B}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \} \quad (\text{A.2b})$$

όπου η γωνιακή συχνότητα $\omega = vk$ και $k = 2\pi/\lambda$.

Η λύση των πεδίων βρίσκεται εάν απαλήψουμε το ένα πεδίο μεταξύ των εξισώσεων A.1b π.χ. εάν χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις A2 απαλήψουμε το πεδίο B από την A.1b έχουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις Maxwell

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{E}^M = 0 \quad (\text{A.3a})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^M = 0 \quad (\text{A.3b})$$

$$\mathbf{B} = -\frac{i\sqrt{\mu\varepsilon}}{k} \nabla \times \mathbf{E}^M \quad (\text{A.3c})$$

ή

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{B}^E = 0 \quad (\text{A.4a})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^E = 0 \quad (\text{A.4b})$$

$$\mathbf{E} = \frac{i}{\sqrt{\mu\varepsilon} k} \nabla \times \mathbf{B}^E \quad (\text{A.4c})$$

Κάθε ζεύγος ανυσματικών πεδίων που ικανοποιεί τις εξ. A3 αυτόματα ικανοποιεί και τις εξ. A.4 ή το αντίθετο. Εάν όμως προσθέσουμε στις εξισώσεις A.3 και A.4 την συνθήκη (transversality)

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}^{(E,M)} = 0 \quad (\text{A3.d})$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}^{(E,M)} = 0 \quad (\text{A.4d})$$

τότε οι λύσεις των δύο συστημάτων είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Σε αυτή την περίπτωση κάθε λύση των εξισώσεων Maxwell εκφράζεται σαν γραμμική επαλληλία δύο υποπεδίων ενός από την λύση του διευρημένου συστήματος των εξ. A.3 και του άλλου από τις εξ. A.4 και έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}^E(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^M(\mathbf{r}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \mathbf{B}^E(\mathbf{r}) + \mathbf{B}^M(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Τα υποπεδία είναι το "ορθόγωνο μαγνητικό" και το "ορθόγωνο ηλεκτρικό" μέρη του υλικού πεδίου. Αυτά προέρχονται, όπως θα δούμε αργότερα, από την ταλάντωση ηλεκτρικών ή μαγνητικών πολυπολικών κατανομών.

Επειδή κάθε συνιστώσα κάθε ανυσματικού πεδίου \mathbf{E} ή \mathbf{B} είναι λύση της ανισοτικής ανυσματικής κυματικής εξισώσεως του Helmholtz η γενική

λύση μπορεί να δοθεί σαν συνάρτηση των σφαιρικών συναρτήσεων Henkel οι οποίες είναι

$$h_1^1(kr) = j_1(kr) + in_1(kr) \quad (\text{A.7})$$

$$h_1^2(kr) = j_1(kr) - in_1(kr) \quad (\text{A.8})$$

όπου j_l και n_l είναι αντίστοιχα οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel (κανονική στο $r = 0$) και Neumann (μονότιμη στο $r = 0$).

Οι συναρτήσεις Henkel πρέπει να πολλαπλασιαστούν με τις σφαιρικές αρμονικές $Y_{lm}(\theta, \phi)$, για να μας δώσουν τις γενικές εξισώσεις

$$E^M(r) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^1 [e_{lm}^1 h_1^1(kr) + e_{lm}^2 h_1^2(kr)] Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{A.9})$$

$$B^E(r) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^1 [b_{lm}^1 h_1^1(kr) + b_{lm}^2 h_1^2(kr)] Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{A.10})$$

όπου $e_{lm}^{1,2}$ και $b_{lm}^{1,2}$ είναι ανύσματα τα οποία θα καθοριστούν από τις οριακές συνθήκες.

Εάν λάβουμε υπ' όψιν τις σχέσεις (A.3b) και (A.4b) όπως και τις A.3d και A.4d έχουμε

$$E^M(r) = \sum_{l,m} E_{lm}^M = \sum_{l,m,i} c_{lm}^i h_1^i l Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{A.11})$$

$$B^E(r) = \sum_{l,m} B_{lm}^E = \sum_{l,m,i} d_{lm}^i h_1^i l Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{A.12})$$

όπου ο τελεστής της τροχιακής στροφορμής είναι

$$I = \frac{1}{\hbar} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = -i(\mathbf{r} \times \nabla) \quad (\text{A.13})$$

και

$$\nabla = \mathbf{r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r^2} \mathbf{r} \times \mathbf{l}$$

οι αντίστοιχες εξισώσεις για τα B_M και E^E δίδονται από τις σχέσεις A.3c και A.4c.

Γενικά μπορούμε να πούμε ότι ένα οποιοδήποτε η/μ πεδίο στον ελεύθερο χώρο μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα μιας ορθόγωνης μαγνητικής ή ηλεκτρικής και μιας ορθόγωνης ηλεκτρικής ή μαγνητικής συνιστώσας. Αυτές με την σειρά τους μπορούν να αναπτυχθούν σε μία απειροσειρά πολυπολικών ακτινοβολιών που χαρακτηρίζονται μόνο από την τιμή της στροφορμής l (για πλήρη χαρακτηρισμό χρειάζεται και το m). Π.χ. η ορθόγωνη ηλεκτρική ακτινοβολία με $l = 2$ ονομάζεται μαγνητική τετραπολική ακτινοβολία ή M_2 . Οι πολυπολικές ακτινοβολίες δίνονται από τις πάρα κάτω σχέσεις.

Η ηλεκτρική 2^l -πολική ακτινοβολία ή (E l) ακτινοβολία

$$B_l^E(\mathbf{r}) = \sum_m f_{lm}^E(kr) X_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{A.14})$$

$$E_l^E(\mathbf{r}) = \frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon} k} (\nabla \times B_l^E) \quad (\text{A.15})$$

$$E_l^M(\mathbf{r}) = \sum_m f_{lm}^M(kr) X_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{A.16})$$

$$B_l^M(\mathbf{r}) = -\frac{i\sqrt{\mu\epsilon}}{k} (\nabla \times E_l^M) \quad (\text{A.17})$$

όπου

$$X_{lm} = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{A.18})$$

είναι οι "ορθόγωνες" ανυσματικές σφαιρικές αρμονικές και

$$f_{lm}(kr) = \sum_{i=1}^2 a_{lm}^i h_l^i(kr) \quad (\text{A.19})$$

ο παράγων $[1/\sqrt{l(l+1)}]$ προέρχεται από την ορθοκανονικοποίηση της X_{lm} . Γενικά δε έχουμε

$$E(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l [C_{lm}^E E_{lm}^E(\mathbf{r}) + C_{lm}^M E_{lm}^M(\mathbf{r})] \quad (\text{A.20})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [C_{lm}^E \mathbf{B}_{lm}^E(\mathbf{r}) + C_{lm}^M \mathbf{B}_{lm}^M(\mathbf{r})] \quad (\text{A.21})$$

και οι παράγοντες C_{lm}^E και C_{lm}^M σχετίζονται με την ένταση της πηγής και τις οριακές συνθήκες.

Υπενθυμίζουμε ότι η μέση (ως προς το χρόνο) ενέργεια του η/μ πεδίου συνάρτηση των μιγαδικών πλατών του δίδεται από την σχέση

$$\langle \text{ενέργεια} \rangle_t = \frac{1}{4[4\pi]} \int d^3\mathbf{r} \left\{ \epsilon |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{\mu} |\mathbf{B}|^2 \right\} \quad (\text{A.22a})$$

η δε στροφορμή

$$\mathbf{J} = \frac{\epsilon}{2[4\pi c]} \int d^3\mathbf{r} \mathbf{r} \times (\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}) \quad (\text{A.22b})$$

και το άυσμα του Poynting που είναι η πυκνότητα ισχύος είναι

$$\mathbf{S}(t) = \left(\frac{c}{4\pi} \right) (\mathbf{E}(t) \times \mathbf{H}(t)) \quad (\text{A.22c})$$

A.2 Ανυσματικό Πεδίο

Κατά ένα άλλο τρόπο το η/μ πεδίο μπορεί να χαρακτηριστεί από το ανυσματικό πεδίο $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ το οποίο σχετίζεται με τα \mathbf{E} και \mathbf{B} με τις εξισώσεις

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{[c]} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A.23})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A.24})$$

και οι ανεξάρτητες του χρόνου σχέσεις είναι

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{ik}{\sqrt{\mu\epsilon}} \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

οπότε από τις σχέσεις (A.15) και (A.16) λαμβάνουμε

$$\mathbf{A}_{lm}^E(\mathbf{r}) = \frac{1}{k^2} \text{curl} \left\{ f_{lm}^E(kr) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) \right\} \quad (\text{A.25a})$$

$$\mathbf{A}_{lm}^M(\mathbf{r}) = -\frac{i\sqrt{\mu\epsilon}}{k} f_{lm}^M(kr) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{A.25b})$$

A.3 Πηγές Πολυπολικής Ακτινοβολίας

Μελετάμε τώρα τις πηγές της ακτινοβολίας. Εάν υποθέσουμε ότι η ακτινοβολία προέρχεται από μία περιορισμένη σε χώρο πυκνότητα φορτίου $\rho(\mathbf{r}, t)$ ρεύματος $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ και μαγνητικής επαγωγής $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ με χρονική εξάρτηση της μορφής $\exp(-ickt)$, τότε οι εξισώσεις Maxwell είναι

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{[4\pi]\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{A.26a})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{A.26b})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{ik}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \mathbf{B} = ik \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (\mathbf{H} + [4\pi]\mathbf{M}) \quad (\text{A.26c})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \left[\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - [4\pi]\mathbf{M} \right] = \left[\frac{4\pi}{c} \right] \mathbf{j} - ik \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{E} \quad (\text{A.26d})$$

η δε εξίσωση συνεχειας είναι

$$\nabla \cdot \mathbf{j} - i\omega\rho = 0 \quad (\text{A.26e})$$

όπου

$$\omega = \frac{[c]}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} k \quad (\text{A.26f})$$

Αντικαθιστώντας στην εξ. (A.26a) με την (A.26e) έχουμε

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = 0 \quad (\text{A.27a})$$

όπου

$$\mathcal{E} = \mathbf{E} + \frac{i[4\pi]}{\omega\epsilon_0} \mathbf{j} = \mathbf{E} + \frac{i}{k} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left[\frac{4\pi}{c} \right] \mathbf{j} \quad (\text{A.28b})$$

Λόγω της (A.26b) και (A.27a) οι εξισώσεις (A.26a) και (A.26b) μπορούν να γραφούν συναρτησει των \mathcal{E} και \mathbf{B} έτσι ώστε οι λύσεις των να έχουν την γενική μορφή των εξ. του ελευθέρου χώρου. Σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε τις εξής εξισώσεις αντίστοιχες των (A.3) και (A.4).

Ακτινοβολία E

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{B} = - \left[\frac{4\pi}{c} \right] \mu_0 (\nabla \times \mathbf{j} + [c] \nabla \times \nabla \times \mathbf{M}) \quad (\text{A.29a})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{A.29b})$$

$$\mathcal{E} = \frac{i}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} k} (\nabla \times \mathbf{B} - [4\pi] \mu_0 \nabla \times \mathbf{M}) \quad (\text{A.29c})$$

Ακτινοβολία M

$$(\nabla^2 + k^2)\mathcal{E} = - \left[\frac{4\pi}{c} \right] ik \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{1}{k^2} \nabla \times \nabla \times \mathbf{j} + [c] \nabla \times \mathbf{M} \right) \quad (\text{A.30a})$$

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = 0 \quad (\text{A.30b})$$

$$\mathbf{B} = - \frac{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}{k} \left(i \nabla \times \mathcal{E} + \frac{[4\pi]}{\omega \epsilon_0} \nabla \times \mathbf{j} \right) \quad (\text{A.30d})$$

όπως και προηγουμένως η (l-m) τάξεως πολυπολική λύση της εξ. (A.29a) και (A.30a) οι οποίες ικανοποιούν τις εξ. (A.29b) και (A.30b) είναι

$$\mathbf{B}_{lm}^E(\mathbf{r}) = r^{-1} x_{lm}^{ES}(\mathbf{r}) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{E-radiation}) \quad (\text{A.31a})$$

$$\mathcal{E}_{lm}^M(\mathbf{r}) = r^{-1} x_{lm}^{MS}(\mathbf{r}) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{M-radiation}) \quad (\text{A.31b})$$

Το S δηλεί ότι υπάρχουν πηγές (sources) και έξω από την περιοχή

$$r^{-1} x_{1m}^{(E,M)S} \rightarrow f_{1m}^{(E,M)}$$

όπου $f_{1m}^{(E,M)}$ δίνεται από την A.19.

Η διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί την $x_{1m}^{(E,M)S}$ βρίσκεται αντικαθιστώντας την (A.31a) στην (A.29a) πολλαπλασιάζοντας με την $x_{1m}(\theta, \phi)$ και ολοκληρώνοντας ως προς Ω οπότε έχουμε

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] x_{1m}^{E,S}(r) = -F_{1m}^{E,S}(r) \quad (A.32a)$$

όπου

$$F_{1m}^{E,S}(r) = [4\pi] \mu_0 r \int d\Omega X_{1m}^*(\theta, \phi) \cdot \mathbf{K}_1 \quad (A.32b)$$

όπου

$$\mathbf{K}_1 = \left[\frac{1}{c} \right] \nabla \times \mathbf{j} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{M}$$

Από την λύση της εξισώσεως αυτής βρίσκουμε ότι

$$x_{1m}^{E,S}(r) \rightarrow ikr h_1^1(kr) \int_0^\infty r' j_1(kr') F_{1m}^{E,S}(r') dr' \quad (A.33)$$

και τα πλάτη C_{1m}^E των ηλεκτρικών πολυπόλων έξω από την πηγή βρίσκονται από τις εξισώσεις (A.21b), (A.18), (A.31a), (A.32a) και (A.33) και είναι

$$C_{1m}^E = [4\pi] ik \mu_0 \int j_1(kr) X_{1m}^* \cdot \mathbf{K}_1 d^3r \quad (A.34)$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι

$$C_{1m}^M = -[4\pi] \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \int j_1(kr) X_{1m}^* \cdot \mathbf{K}_2 d^3r \quad (A.35)$$

με

$$\mathbf{K}_2 = \left[\frac{1}{c} \right] \nabla \times \nabla \times \mathbf{j} + k^2 \nabla \times \mathbf{M}$$

A.4 Κβαντομηχανικός υπολογισμός της πιθανότητας μεταπτώσεως

Από την θεωρία των διαταραχών γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα μεταπτώσεως από την αρχική κατάσταση ψ_i στην τελική ψ_f είναι

$$w_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} \rho_f | \langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle |^2 \quad (\text{A.35})$$

όπου H' είναι η χαμιλτονιανή της αντιδράσεως και ρ_f η πυκνότητα των τελικών καταστάσεων. Η μη-ρελατιβιστική Χαμιλτονιανή της αντιδράσεως μεταξύ νουκλεονίων φορτίων e_j (+1 ή 0 για πρωτόνια ή νετρόνια) και μαγνητικής ροπής μ_j και το κβαντισμένο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι

$$H' = - \sum_j \frac{e_j}{M[c]} \frac{\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_j}{2} - \frac{e\hbar}{2M[c]} \sum_j \mu_j \sigma_j \cdot \mathbf{B} \quad (\text{A.36})$$

όπου \mathbf{A} είναι ο τελεστής ανυσματικού δυναμικού. Οι πολυπολικές λύσεις του \mathbf{A} δίνονται από τις εξισώσεις (A.25a και b) μπορούν δε να γραφούν σαν

$$\mathbf{A}_{1m}^E(\mathbf{r}) = k^{-2} \text{curl} [C^E j_1(kr) X_{1m}(\theta, \phi)] \quad (\text{A.37})$$

$$\mathbf{A}_{1m}^M(\mathbf{r}) = \frac{-i\sqrt{\mu\epsilon}}{k} C^M j_1(kr) X_{1m}(\theta, \phi) \quad (\text{A.38})$$

Οι παράμετροι C^E και C^M μπορούν να υπολογιστούν από την συνθήκη ότι η ενέργεια του φωτονίου, το οποίο είναι περιορισμένο σε μια σφαίρα ακτίνας R είναι ίση με $\hbar\omega = \hbar ck$. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (A.22a) και την λύση των \mathbf{E} και \mathbf{B} βρίσκουμε

$$C^E = \sqrt{[4\pi] \mu_0 c \hbar k^3 / R} \quad (\text{A.39a})$$

$$C^M = k^2 \sqrt{[4\pi] c \hbar k^3 / \epsilon_0 R} \quad (\text{A.39b})$$

Από αυτές τις εξισώσεις και τις εξισώσεις (A.14), (A.15), (A.16) και (A.17) βρίσκουμε για την Χαμιλτονιανή

$$H'(A_{1m}^E) = -K' \sum_j \left[\frac{e_j}{M[c]} p_j \cdot (\nabla \times j_e X_{1m})^* + \frac{\hbar e k^2}{2M[c]} \mu_j \sigma_j \cdot (j_1 X_{1m})^* \right] \quad (A.40)$$

$$H'(A_{1m}^M) = K' i k \sum_j \left[\frac{e_j}{M[c]} p_j \cdot (j_1 X_{1m})^* + \frac{\hbar e}{2M[c]} \mu_j \sigma_j \cdot (\nabla \times (j_1 X_{1m}))^* \right] \quad (A.41)$$

όπου

$$K' = \sqrt{\frac{[4\pi] \mu_0 c \hbar}{kR}}$$

Επειδή η ακτίνα του πυρήνα είναι πολύ μικρότερη από το μήκος κύματος της ακτινοβολίας μπορούμε να πάρουμε την συνάρτηση Bessel στην ασυμπτωτική της μορφή δηλ.

$$j_1(kr) = \frac{(kr)^1}{[(2l+1)!!]} \quad (A.42)$$

Εάν λάβουμε υπ' όψιν την εξίσωση A.13 τότε βρίσκουμε

$$(\text{curl } j_1 Y_{1m})^* = i [r \nabla^2 j_1 Y_{1m} - (r \times \text{grad} + 2) \text{grad } j_1 Y_{1m}]^* \quad (A.43)$$

$$(\text{curl } j_1 X_{1m})^* = i \sqrt{\frac{l+1}{l}} (\text{grad } j_1 Y_{1m})^* \quad (A.44)$$

και

$$\begin{aligned} \langle f | p_j \cdot (\text{grad } j_1 Y_{1m})^* | i \rangle &= -i \frac{M}{\hbar} \left\langle f \left| \frac{p^2}{2M} j_1 Y_{1m}^* - j_1 Y_{1m}^* \frac{p^2}{2M} \right| i \right\rangle \\ &= -i M c k \langle f | j_1 Y_{1m}^* | i \rangle \end{aligned} \quad (A.45)$$

Με την εξίσωση (A.45) η (A.40) γίνεται

$$\langle f | H' (A_{lm}^{EM}) | i \rangle = \sqrt{\frac{[4\pi]c\hbar}{\epsilon R}} \sqrt{\frac{l+1}{l}} \frac{k^{l+1/2}}{(2l+1)!!} \langle f | M_{lm}^{E,M} | i \rangle \quad (\text{A.46})$$

όπου

$$M_{lm}^E = \sum_j \left\{ e_j r^l Y_{lm}^*(\theta, \phi) - \frac{ie\hbar k}{2M[c](l+1)} \mu_j \sigma_j \times r \cdot [\nabla(r^l Y_{lm})]^* \right\} \quad (\text{A.47})$$

$$M_{lm}^M = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sum_j \left\{ \frac{e_j \hbar}{M[c]} \frac{1}{l+1} I_j \cdot [\nabla(r^2 Y_{lm})]^* + \frac{e\hbar}{2M[c]} \mu_j \sigma_j \cdot [\nabla(r^l Y_{lm})]^* \right\} \quad (\text{A.48})$$

Ο πρώτος όρος των (A.47) και (A.48) προέρχεται από την τροχιακή κίνηση των φορτίων και οι δεύτεροι όροι από την συνεισφορά της αλλαγής της κατανομής των μαγνητικών ροπών.

Εάν λάβουμε υπ' όψιν ότι η πυκνότητα των τελικών καταστάσεων

$$\rho_f = \frac{dn}{dE} = \frac{R}{\pi\hbar c} \quad (\text{A.49})$$

έχουμε για την

$$w_{fi}^{(E,M)} = \frac{2[4\pi]}{\epsilon_0 \hbar} \frac{l+1}{l[(2l+1)!!]^2} k^{2l+1} |\langle f | M_{lm}^{E,M} | i \rangle|^2 \quad (\text{A.50})$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

ΦΥΣΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

Από *Phy. Rev. D*, vol 45, No 11

Quantity	Symbol, equation	Value	Uncert. (ppm)
speed of light	c	299 792 458 m s ⁻¹	(exact)*
Planck constant	h	6.626 075 5(40) × 10 ⁻³⁴ J s	0.60
Planck constant, reduced	$\hbar \equiv h/2\pi$	1.054 572 66(63) × 10 ⁻³⁴ J s = 6.582 122 0(20) × 10 ⁻²² MeV s	0.60 0.30
electron charge magnitude	e	1.602 177 33(49) × 10 ⁻¹⁹ C = 4.803 206 8(15) × 10 ⁻¹⁰ esu	0.30, 0.03
conversion constant	$\hbar c$	197.327 053(59) MeV fm	0.30
conversion constant	$(\hbar c)^2$	0.389 379 66(23) GeV ² mbarn	0.59
electron mass	m_e	0.510 999 06(15) MeV/c ² = 9.109 389 7(54) × 10 ⁻³¹ kg	0.30, 0.59
proton mass	m_p	938.272 31(28) MeV/c ² = 1.672 623 1(10) × 10 ⁻²⁷ kg = 1.007 276 470(12) u = 1836.152 701(37) m_e	0.30, 0.59 0.012, 0.020
deuteron mass	m_d	1875.613 39(57) MeV/c ²	0.30
unified atomic mass unit (u)	(mass C ¹² atom)/12 = (1 g)/N _A	931.494 32(28) MeV/c ² = 1.660 540 2(10) × 10 ⁻²⁷ kg	0.30, 0.59
permittivity of free space	ϵ_0	8.854 187 817 ... × 10 ⁻¹² F m ⁻¹	(exact)
permeability of free space	μ_0	$\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ 4π × 10 ⁻⁷ N A ⁻² = 12.566 370 614 ... × 10 ⁻⁷ N A ⁻²	(exact)
fine structure constant	$\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$	1/137.035 989 5(61) ¹	0.045
classical electron radius	$r_e = e^2/4\pi\epsilon_0 m_e c^2$	2.817 940 92(38) × 10 ⁻¹⁵ m	0.13
electron Compton wavelength	$\lambda_e = \hbar/m_e c = r_e \alpha^{-1}$	3.861 593 23(35) × 10 ⁻¹³ m	0.089
Bohr radius ($m_{\text{nucleus}} = \infty$)	$a_{\infty} = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2/m_e e^2 = r_e \alpha^{-2}$	0.529 177 249(24) × 10 ⁻¹⁰ m	0.045
wavelength of 1 eV/c particle	$\hbar c/e$	1.239 842 44(37) × 10 ⁻⁶ m	0.30
Rydberg energy	$\hbar c R_{\infty} = m_e e^4/2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 = m_e c^2 \alpha^2/2$	13.605 698 1(40) eV	0.30
Thomson cross section	$\sigma_T = 8\pi r_e^2/3$	0.665 246 16(18) barn	0.27
Bohr magneton	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	5.788 382 63(52) × 10 ⁻¹¹ MeV T ⁻¹	0.089
nuclear magneton	$\mu_N = e\hbar/2m_p$	3.152 451 66(28) × 10 ⁻¹⁴ MeV T ⁻¹	0.089
electron cyclotron freq./field	$\omega_{\text{cycl}}^e/B = e/m_e$	1.758 819 62(53) × 10 ¹¹ rad s ⁻¹ T ⁻¹	0.30
proton cyclotron freq./field	$\omega_{\text{cycl}}^p/B = e/m_p$	9.578 830 9(29) × 10 ⁷ rad s ⁻¹ T ⁻¹	0.30
gravitational constant	G_N	6.672 59(85) × 10 ⁻¹¹ m ³ kg ⁻¹ s ⁻² = 6.707 11(86) × 10 ⁻³⁹ $\hbar c$ (GeV/c ²) ⁻²	128 128
standard grav. accel., sea level	g	9.806 65 m s ⁻²	(exact)
Avogadro number	N_A	6.022 136 7(36) × 10 ²³ mol ⁻¹	0.59
Boltzmann constant	k	1.380 658(12) × 10 ⁻²³ J K ⁻¹ = 8.617 385(73) × 10 ⁻⁵ eV K ⁻¹	8.5 8.4
Wien displacement law constant	$b = \lambda_{\text{max}} T$	2.897 756(24) × 10 ⁻³ m K	8.4
molar volume, ideal gas at STP	$N_A k(273.15 \text{ K})/(1 \text{ atmosphere})$	22.414 10(19) × 10 ⁻³ m ³ mol ⁻¹	8.4
Stefan-Boltzmann constant	$\sigma = \pi^5 k^4/60\hbar^3 c^2$	5.670 51(19) × 10 ⁻⁸ W m ⁻² K ⁻⁴	34
Fermi coupling constant	$G_F/(\hbar c)^3$	1.166 39(2) × 10 ⁻⁵ GeV ⁻²	17
weak mixing angle	$\sin^2 \theta_W$ (\overline{MS})	0.2325 ± 0.0008	3441
W [±] boson mass	m_W	80.22 ± 0.26 GeV/c ²	3241
Z ⁰ boson mass	m_Z	91.173 ± 0.020 GeV/c ²	219
strong coupling constant	$\alpha_s(m_Z)$	0.1134 ± 0.0035	3.1 × 10 ⁴
$\pi = 3.141 592 653 589 793 238$		$e = 2.718 281 828 459 045 235$	$\gamma = 0.577 215 664 901 532 861$
1 in ≡ 0.0254 m	1 barn ≡ 10 ⁻²⁸ m ²	1 eV = 1.602 177 33(49) × 10 ⁻¹⁹ J	1 gauss (G) ≡ 10 ⁻⁴ tesla (T)
1 Å ≡ 10 ⁻¹⁰ m	1 dyne ≡ 10 ⁻⁵ newton (N)	1 eV/c ² = 1.782 662 70(54) × 10 ⁻³⁶ kg	0° C ≡ 273.15 K
1 fm ≡ 10 ⁻¹⁵ m	1 erg ≡ 10 ⁻⁷ joule (J)	2.997 924 58 × 10 ⁹ esu = 1 coulomb (C)	1 atmosphere ≡ 760 torr ≡ 1.013 25 × 10 ⁵ N/m ²

* The meter is now defined to be the length of the path traveled by light in 1/299792458 second. See B.W. Petley, *Nature* 303, 373 (1983).

† At $Q^2 = m_Z^2$. At $Q^2 \approx m_W^2$ the value is approximately 1/128.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Fundamentals of Modern Physics, R.M. Eisberg, Wiley International Edition.
2. Introduction to Nuclear Physics, Harald Enge, Addison-Wesley.
3. Nuclei and Particles, Emilio Segrè, W.A. Benjamin Inc.
4. Elements of Nuclear Physics, W.E. Meyerhof, Mc Graw-Hill.
5. Berkeley Physics Course Vols I, II, III, IV, V, Mc Graw-Hill.
6. The Properties of Nuclei, G.A. Jones, Oxford Physics Series.
7. Nuclear Physics (Theory and Experiment), R.R. Roy and B.P. Nigam, John Wiley.
8. Principles of Modern Physics, R.B. Leighton, Mc Graw-Hill.
9. The Atomic Nucleus, R.D. Evans, Mc Graw-Hill.
10. Nuclear Physics an introduction, W.E. Burcham, Longman.

