

ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΚΑΙ ΘΕΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ
ΣΤΟΝ 20^Ο ΑΙΩΝΑ



ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΟΙΝΩΝΙΑ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΜΟΡΦΩΤΙΚΕΣ ΕΚΔΗΛΩΣΕΙΣ

ISBN: 960-7998-23-5

© Copyright 2004, ΕΘΝΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΕΡΕΥΝΩΝ (ΕΙΕ)

Υπεύθυνη του Προγράμματος των Ειδικών Μορφωτικών Εκδηλώσεων
«ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΟΙΝΩΝΙΑ» και

επιμέλεια έκδοσης: Ελένη Γραμματικοπούλου

Τηλ.: 210 72 73 501, Fax: 210 72 46 618, e-mail: gramma@eie.gr

Σχεδίαση, παραγωγή:

S&P ADVERTISING

Ασκληπείου 154, 114 71 Αθήνα

Τηλ.: 210 64 62 716, Fax: 210 64 52 570

e-mail: central@spad.gr, www.spad.gr



Το Εθνικό Ίδρυμα Ερευνών, συνεχίζοντας την παράδοση της προσφοράς και της συμβολής στην ανάπτυξη της πνευματικής ζωής του τόπου μας, οργάνωσε τις καθιερωμένες πλέον Ειδικές Μορφωτικές Εκδηλώσεις «ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΟΙΝΩΝΙΑ» και κατά την περίοδο 2002-2003.

Η παρουσίαση των σύγχρονων επιστημονικών επιτευγμάτων στον χώρο τόσο των θετικών όσο και των ανθρωπιστικών επιστημών, καθώς και η προβολή του κοινωνικού χαρακτήρα της επιστημονικής έρευνας εξακολουθούν να αποτελούν, κατά μείζονα λόγο, τα καθοδηγητικά κριτήρια και τον στόχο των διαλέξεων που εντάσσονται στο Μορφωτικό Πρόγραμμα του ΕΙΕ.

Με βάση αυτές τις προϋποθέσεις και λαμβάνοντας υπόψη τη ραγδαία ανάπτυξη των Θετικών Επιστημών στον 20ό αιώνα, θεωρήθηκε σκόπιμο να περιληφθεί στο πρόγραμμα αυτής της περιόδου ένας κύκλος με τον γενικό τίτλο: «ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΚΑΙ ΘΕΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΣΤΟΝ 20ό ΑΙΩΝΑ».

Στον παρόντα τόμο περιλαμβάνονται τα κείμενα των εννέα ομιλητών που έλαβαν μέρος στον κύκλο αυτό, στόχος του οποίου ήταν να αναδείξει κατά πόσον οι θεαματικές εξελίξεις που σημειώθηκαν στον χώρο των Θετικών Επιστημών, κυρίως κατά τον 20ό αιώνα, έχουν επηρεάσει την ευρύτερη φιλοσοφική σκέψη αλλά και την ειδικότερη αντίληψη για τη ζωή και τη σχέση της με το σύμπαν.

Στις πέντε ομιλίες έγινε μια εκτενής αναφορά στις σύγχρονες θεωρίες των Θετικών Επιστημών (Κβαντική Θεωρία, Θεωρία του Χάους, Θεωρία της Δομής της Ύλης, κ.ά.). Επίσης στις Επιστήμες Ζωής, τις Βιολογικές επιστήμες, παρουσιάστηκαν τα σύγχρονα επιτεύγματα της Γενετικής και τα νέα διλήμματα –βιοηθικά και φιλοσοφικά–, όπως προκύπτουν από την εφαρμογή τους. Ο κύκλος ολοκληρώθηκε με το στρογγυλό τραπέζι: Η Φιλοσοφία συναντά τις Θετικές Επιστήμες στον 20ό Αιώνα με αντικείμενο τις συνέπειες των επιτευγμάτων των Θετικών Επιστημών και τον σύγχρονο φιλοσοφικό στοχασμό που γεννούν.

Στο τέλος των ομιλιών, οι οποίες έγιναν στο Αμφιθέατρο «Λεωνίδα Ζέρβας» του ΕΙΕ κατά το διάστημα από 8 έως 28 Ιανουαρίου 2003, ακολουθούσε διαλογική συζήτηση μεταξύ ομιλητών και κοινού.

Το Εθνικό Ίδρυμα Ερευνών επιθυμεί και από τη θέση αυτή να ευχαριστήσει τους ομιλητές και όλους όσοι συνετέλεσαν στην πραγματοποίηση της παρούσας σειράς των ομιλιών. Ειδικότερα, τον Δρ. Ευστ. Γκόνο, Διευθυντή Ερευνών στο Ινστιτούτο Βιολογικών Ερευνών και Βιοτεχνολογίας του Ιδρύματος, για τη συμμετοχή του και την πολύτιμη συμβολή του στον σχεδιασμό του κύκλου αυτού.

Ελένη Γραμματικοπούλου
Υπεύθυνη του Προγράμματος
των Ειδικών Μορφωτικών Εκδηλώσεων
«Επιστήμες Κοινωνία»

Περιεχόμενα

| | | |
|---------------------------|--|----|
| 8 Ιανουαρίου 2003 | Αριστείδης Μαυρίδης <i>Ο ρόλος της συμμετρίας στην επιστήμη και την τέχνη</i> | 9 |
| | Ιωάννης Νικόλης <i>Τοπολογία & δυναμική πολυπλόκων συστημάτων</i> | 29 |
| 14 Ιανουαρίου 2003 | Γιώργος Θηραϊός <i>Γονιδιακός ντετερμινισμός: κίνδυνος για την επιστήμη και την κοινωνία</i> | 45 |
| | Ευσάθιος Γκόνος <i>Γενετική τύχη ή εξελικτική αναγκαιότητα;</i> | 61 |
| 21 Ιανουαρίου 2003 | Ίων Σιώτης <i>Η αναζήτηση του «ελαχίστου» της ύλης από τον Λεύκιππο μέχρι σήμερα</i> | 71 |
| 28 Ιανουαρίου 2003 | Στρογγυλό Τραπέζι <i>Η Φιλοσοφία συναντά τις Θετικές Επιστήμες στον 20ό αιώνα</i> | 97 |
| | Συμμετέχουν οι: Αριστείδης Μπαλτάς, Διονύσιος Αναπολιάνος, Στέφανος Ροζάνης, Στάθης Ψύλλος | |

Ο ρόλος της συμμετρίας στην επιστήμη και την τέχνη

Αριστείδης Μαυρίδης

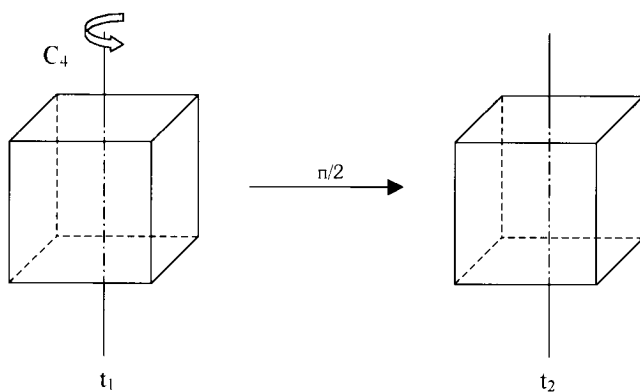
*Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
Τμήμα Χημείας, Εργαστήριο Φυσικοχημείας*

Εξ αρχής θα πρέπει emphaticώς να υπογραμμίσω ότι το αντικείμενο αυτής της διαλέξεως είναι όντως ευρύτατο και, δεδομένων των χρονικών ορίων, θα περιορισθώ σε ορισμένες «απλές» έννοιες: του τι σημαίνει συμμετρία και του ρόλου της στη ζωή μας. Επειδή συνδέομαι με την Επιστήμη, τα παραδείγματά μου καθώς και η εν γένει γραμμή της ομιλίας θα είναι πλησιέστερα στη Χημεία ή/και τη Φυσική παρά προς την Τέχνη. Η αδυναμία μου αυτή ελπίζω να κριθεί επεικώς.

Ίσως ο τίτλος της διαλέξεως θα έπρεπε να είναι απλώς «Συμμετρία». Η λέξη συμμετρία (συν+μέτρο) είναι πολύ γνωστή, χρησιμοποιείται ευρέως αλλά κρύβει μια εσωτερική, εγγενή πολυπλοκότητα. Τις περισσότερες φορές όταν μιλάμε για συμμετρία εννοούμε είτε σωστές αναλογίες είτε κάτι αρμονικό είτε πάλι σύνθεση μερών με σύμμετρο ή αρμονικό τρόπο, ή ακόμη και τάξη, η οποία είναι το αντίθετο του χάους, ή τέλος αναφερόμαστε σε ομορφιά και τελειότητα. Συνήθως κάτι το οποίο είναι μη-συμμετρικό δεν είναι ούτε όμορφο, στερείται μορφής. Όλες αυτές τις ερμηνείες της λέξεως συμμετρία, μπορείτε να τις βρείτε σε οιοδήποτε λεξικό ελληνικό ή ξένο. Ας προσπαθήσουμε όμως τώρα να γίνουμε σαφέστεροι, πιο ποσοτικοί.

Ουσιαστικώς συμμετρία σημαίνει α-μεταβλητότητα (invariance, indiscernibility) ως προς κάποια πράξη, η οποία με τη σειρά της καλείται πράξη συμμετρίας. Ας δούμε ένα παράδειγμα από την απλούστερη των συμμετριών, τη γεωμετρική συμμετρία.

Θεωρούμε έναν τέλειο (α-ψεγάδιαστο) κύβο. Παρατηρητής, τη χρονική στιγμή t_1 , παρατηρεί τον κύβο και ακολούθως αποστρέφει το βλέμμα του. Κάποιος άλλος στρέφει τον κύβο περί άξονα (συμμετρίας) κατά $\pi/2 = 90^\circ$, (σχ. 1).



Σχ. 1. Στροφή κύβου
περί άξονος 4ης
τάξεως, C_4

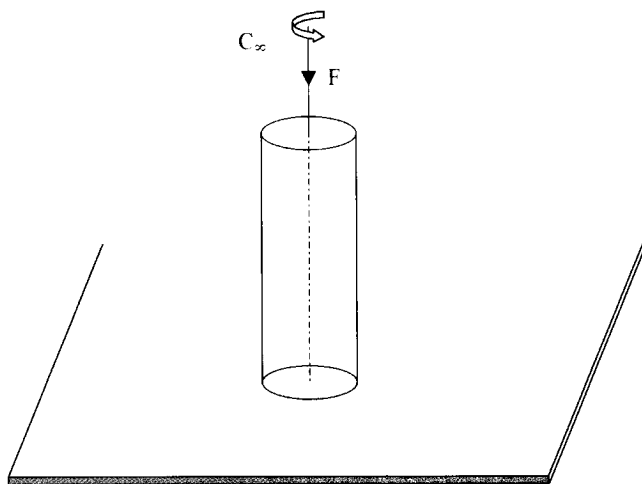
Ο πρώτος παρατηρητής επιστρέφει το βλέμμα του στον κύβο και παρατηρεί ότι τίποτα δεν άλλαξε στον κύβο μεταξύ των δύο χρονικών στιγμών t_1 και t_2 , πριν και μετά την περιστροφή αντιστοίχως. Γι'αυτόν η πράξη της περιστροφής είναι ως μη γενομένη (αμεταβλητότητα του στερεού). Το ίδιο ακριβώς θα συνέβαινε εάν ο κύβος είχε περιστραφεί κατά $\pi (=180^\circ)$, ή $3\pi/2 (=270^\circ)$ (άξων 4ης τάξεως= C_4). Ως προς τον παρατηρητή θα ήταν τελείως αδιάφορο.

Η ιδιότητα αυτή του κύβου, δηλαδή της αμεταβλητότητας ως προς κάποια πράξη, εδώ ως προς άξονα περιστροφής C_4 , καλείται **συμμετρία** (ως προς άξονα βεβαίως).

Αν και η διαδικασία την οποία περιγράψαμε μας φαίνεται προφανής, άρα τετριμμένη, οι συνέπειες της συμμετρίας στην ερμηνεία των φυσικών φαινομέ-

νων είναι τεράστιες και ο ρόλος της πολύ σημαντικός. Θεμελιώδεις φυσικοί νόμοι –όπως, παραδείγματος χάριν η διατήρηση της ενεργείας, της ορμής, της στροφορμής, της μάζας κ.ά.– είναι αποτέλεσμα αμεταβλητότητας (συμμετρίας) ως προς την αντίστοιχη πράξη, όχι απαραίτητα γεωμετρικού χαρακτήρα.

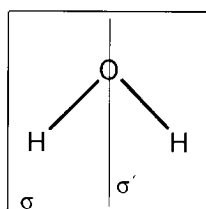
Ας εξετάσουμε ακόμη ένα απλό παράδειγμα γεωμετρικής συμμετρίας. Θεωρούμε μεταλλική κυλινδρική ράβδο ορισμένης διατομής, με άξονα συμμετρίας τον άξονα της ράβδου, απείρου τάξεως (C_∞). Αυτό σημαίνει ότι η ράβδος παρουσιάζει αμεταβλητότητα ως προς κάθε γωνία περιστροφής περί τον άξονά της. Η ράβδος τοποθετείται καθέτως επί ασυμπίεστου επιπέδου επιφάνειας στο άνω άκρο της οποίας εφαρμόζεται δύναμη F συγγραμμική προς τον άξονα συμμετρίας (σχ. 2).



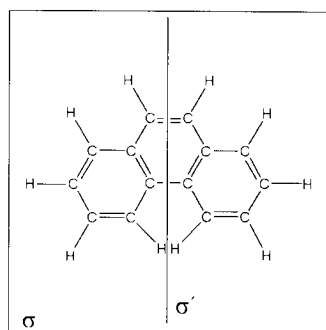
Σχ. 2. Κυλινδρική ράβδος επί άκαμπτης επιφάνειας. Η δύναμη F ασκείται συγγραμμικά προς τον άξονα C_∞

Το ερώτημα είναι: αυξάνοντας τη δύναμη F απεριόριστα, η ράβδος θα καμφθεί; Η εμπειρία λέει πως ναι, η ράβδος θα καμφθεί όταν η δύναμη F γίνει αρκετά μεγάλη. Η θεωρητική απάντηση όμως είναι αρνητική, εάν όντως η ράβδος διαθέτει απόλυτη αξονική συμμετρία (της F συμπεριλαμβανομένης). Η ράβδος μπορεί να συμπιεσθεί (συνθλιβεί) διατηρώντας τον άξονα συμμετρίας απείρου τάξεως (C_∞), αλλά δεν θα καμφθεί διότι η συμμετρία διατηρείται. Το ότι τελικώς κάμπτεται οφείλεται σε κάποια άρση («σπάσιμο») της εξωτερικής ή εσωτερικής συμμετρίας λόγω δομικών ατελειών.

Για προφανείς λόγους η γεωμετρική συμμετρία είναι η πλέον κατανοητή –ήδη αναφερθήκαμε στην αξονική συμμετρία, δηλαδή την ως προς περιστροφή αμεταβλητότητα. Ας εξετάσουμε τώρα την αμεταβλητότητα ως προς επίπεδο (σ), δηλαδή τη συμμετρία επιπέδου. Όλα τα επίπεδα σχήματα έχουν τουλάχιστον ένα επίπεδο συμμετρίας, το επίπεδο επί του οποίου κείνται. Στο σχήμα 3 απεικονίζονται το μόριο του ύδατος (H_2O , Σχ. 3α), του φαινανθρενίου (σχ. 3β) και τα ελληνικά γράμματα Α, Ε και Ζ.

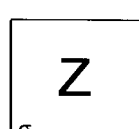
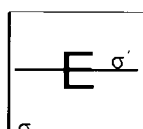
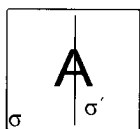


(α)



(β)

Σχ. 3. Επίπεδα γεωμετρικά σχήματα, σ , επίπεδο επί του οποίου κείται το σχήμα (ή μόριο), σ' το ίχνος επιπέδου συμμετρίας καθέτου επί του σ .

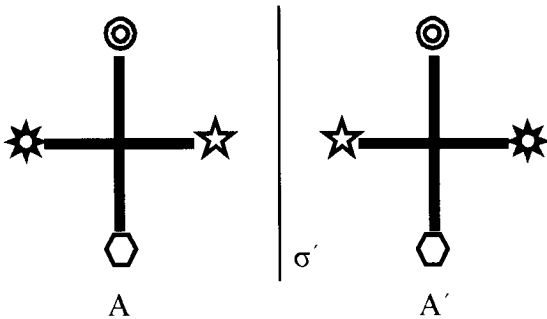


Το μόριο του ύδατος έχει δύο επίπεδα συμμετρίας (ένα προφανώς έχουν όλα τα τριατομικά μόρια), τα σ και σ' , το δεύτερο κάθετο επί του σ (σχ. 3α). Το ίδιο και το πολύ πιο πολύπλοκο μόριο του φαινανθρενίου (σχ. 3β). Τα γράμματα Α και Ε έχουν δύο επίπεδα συμμετρίας –τα σ και σ' –, δεν συμβαίνει το ίδιο όμως με το γράμμα Ζ το οποίο στερείται του επιπέδου σ' . Τα επίπεδα συμμετρίας ονομάζονται και επίπεδα ανακλάσεως. Παρατηρούμε ότι η ανάκλασις ως προς το επίπεδο ανακλάσεως σ' δημιουργεί το άλλο ήμισυ του σχήματος, δηλαδή η γνώση της μισής δομής αρκεί για την κατασκευή ολοκλήρου του σχήματος. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι, εάν αντικαταστήσουμε π.χ. στο μόριο του ύδατος το ένα από τα δύο υδρογόνα (H) με δευτέριο (βαρύ

υδρογόνο, D), το κατοπτρικό επίπεδο σ' παύει να υπάρχει, το σ όμως παραμένει. Θα δούμε ακολούθως τη σημασία των επιπέδων συμμετρίας.

Όπως ήδη αναφέρθη, η αμεταβλητότητα ως προς κάποια πράξη είναι η θεμελιώδης έννοια της συμμετρίας. Εάν καλέσουμε Σ την πράξη (ή «τελεστή», τέλεση της πράξεως) και A το αντικείμενο (ή συνάρτηση) επί του οποίου δρα ο τελεστής Σ , τότε, η αμεταβλητότητα εκφράζεται μαθηματικώς με τη σχέση:

$$\begin{aligned} \Sigma A &= A\Sigma \quad \text{ή} \quad \Sigma A - A\Sigma = 0 \\ \text{ή} \quad [\Sigma, A] &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$



Σχ. 4. Ασύμμετρο επίπεδο σχήμα A και το κατοπτρικό του A' ως προς το κάτοπτρο σ' .

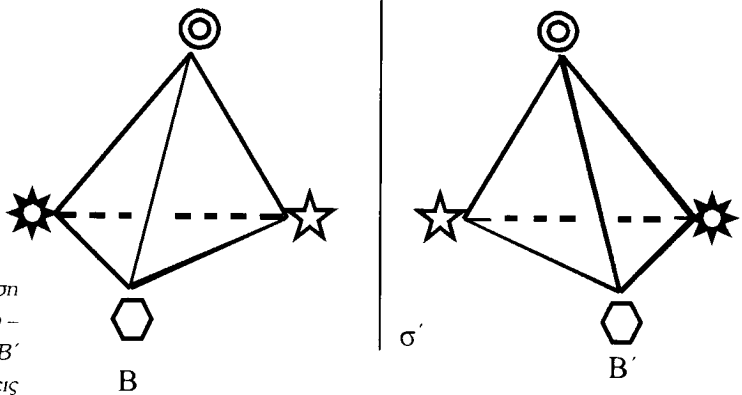
Η σχέση (1) μας λέει ότι τα Σ και A μετατίθενται: ο «μεταθέτης» $[\ ,]$ έχει κεντρική θέση στην εννοιολογία των φυσικών επιστημών, ακριβώς διότι εκφράζει την ύπαρξη ή μη κάποιας συμμετρίας.

Ας εξετάσουμε τώρα ένα επίπεδο αντικείμενο (στον χώρο των 2 διαστάσεων) το οποίο στερείται επιπέδου συμμετρίας σ' (προφανώς δεν υπάρχει κανένα στοιχείο συμμετρίας), δεν υπάρχει δηλαδή τρόπος να επιλέξουμε κάποιο μισό μέρος του αντικειμένου και δι' ανακλάσεως να δημιουργήσουμε το υπόλοιπο, δηλαδή το μισό μέρος του να φέρει την πληροφόρηση αναπαραγωγής του υπολοίπου. Στο σχήμα 4 απεικονίζεται τυπικώς ένα τέτοιο αντικείμενο (οποιοδήποτε επίπεδο «τυχαίο» σχήμα) A , και το κατοπτρικό του A' ως προς επίπεδο σ' το οποίο όμως δεν είναι επίπεδο συμμετρίας.

Τα A και A' δεν είναι υπερθέσιμα στον χώρο των 2 διαστάσεων. Οι οποιοδήποτε μετακινήσεις –επί παραδείγματι του A' επί του επιπέδου–, δηλαδή

μεταφορές ή/και περιστροφές, δεν είναι ικανές να κάνουν τα δύο σχήματα να συμπέσουν το ένα επί του άλλου. Η σχέση αντικειμένου-ειδώλου των A-A' καλείται **σχέση χειρομορφισμού**, τα δε αντικείμενα, **χειρόμορφα** (σχέση αριστερού και δεξιού χειριού).

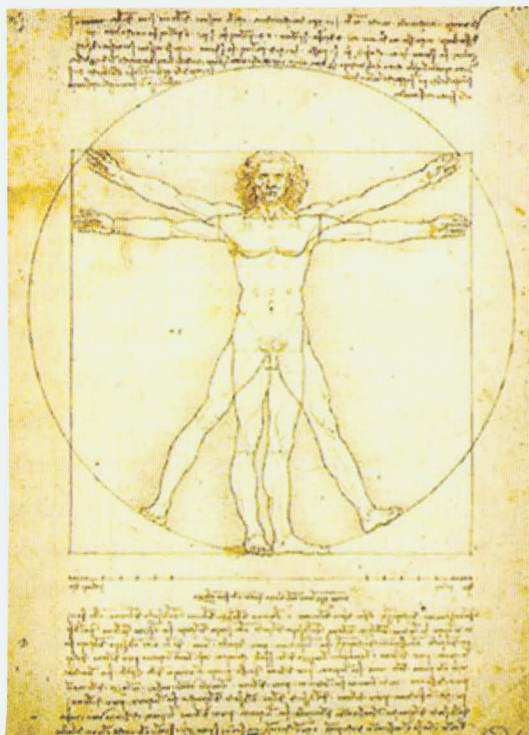
Ας μετακινηθούμε τώρα στον φυσικό χώρο των 3 διαστάσεων. Σε πλήρη αναλογία με το σχήμα 4 έχουμε το σχήμα 5, αλλά ένα από τα τέσσερα «σημεία», έστω το \odot , βρίσκεται εκτός του επιπέδου το οποίο ορίζεται από τα υπόλοιπα τρία (\star , \circ , \star).



Σχ. 5. Σχέση αντικειμένου – ειδώλου B – B' σε τρεις διαστάσεις

Τα B και B' ως χειρόμορφα είναι αδύνατον να τοποθετηθούν το ένα επί του άλλου ώστε να συμπέσουν, η υπέρθεσις δεν είναι εφικτή [εκτός κι εάν το ένα από τα χειρόμορφα αντικείμενα μεταφερθεί στον χώρο των 4 διαστάσεων, περιστραφεί καταλλήλως και επαναφερθεί στον χώρο των 3 διαστάσεων. Αυτό φαίνεται σαφώς στον χώρο των 2 διαστάσεων (σχ. 4)]. Η σημασία της γεωμετρικής συμμετρίας και ο ρόλος της, π.χ. στην ανάπτυξη των εννοιών της Χημείας, είναι δύσκολο να υποτιμηθεί: θα επανέλθουμε σε λίγο σε αυτό.

Θα αναφερθούμε τώρα πολύ σύντομα στο είδος των γεωμετρικών συμμετριών του περιβάλλοντός μας, αλλά και πέραν αυτού. Ο πλανήτης Γη αλλά και κάθε πλανήτης είναι πρακτικώς σφαιρικού σχήματος, έχει τη μέγιστη δυνατή συμμετρία (γεωμετρική συμμετρία σφαίρας: απειρία αξόνων περιστροφής οποιασδήποτε τάξεως, απειρία επιπέδων συμμετρίας και κέντρο συμμετρίας). Αυτό είναι



Σχ. 6. Το ανθρώπινο σώμα έχει (εξωτερικώς) αμφίπλευρη συμμετρία (σ' κατοπτρικό επίπεδο, κάθετη επί του επιπέδου απεικόνισης).

αποτέλεσμα της ισοτροπίας του χώρου (όλες οι κατευθύνσεις είναι ισοδύναμες) και του νόμου της βαρυτικής ελξως του Newton (δυναμικό αντιστρόφως ανάλογο της αποστάσεως, $\Phi \sim -1/r$), ο οποίος έχει εγγενώς σφαιρική συμμετρία.

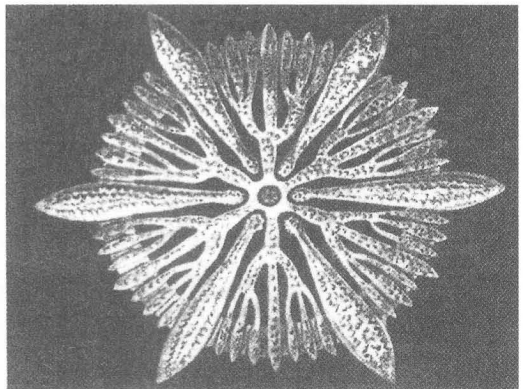
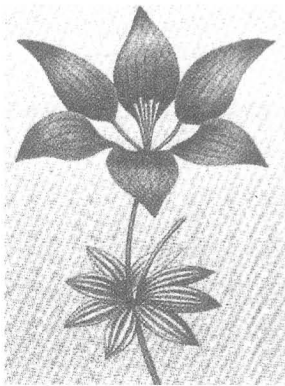
Το ανθρώπινο σώμα έχει, περίπου κατοπτρικό επίπεδο συμμετρίας ή αμφίπλευρη εξωτερική συμμετρία (σχ. 6), στερείται όμως εσωτερικής συμμετρίας, π.χ. σχεδόν όλοι οι άνθρωποι έχουν την καρδιά αριστερά όχι στο μέσον του σώματός τους. Η εσωτερική μας ασυμμετρία είναι αυτή η οποία νοηματοδοτεί τις διευθύνσεις, αριστερά/δεξιά. Εάν η εξωτερική αμφίπλευρη συμμετρία επεκτεινόταν και στο εσωτερικό του ανθρώπινου σώματος, η διαφοροποίηση των κατευθύνσεων αριστερά/δεξιά θα ήταν πολύ δύσκολη.

Εάν π.χ. σε κάποιο άτομο που βρίσκεται πολύ μακριά από εμάς και σε ισότροπο περιβάλλον, στην έρημο λόγου χάρη ή σε κάποιον άγνωστο πλανήτη,

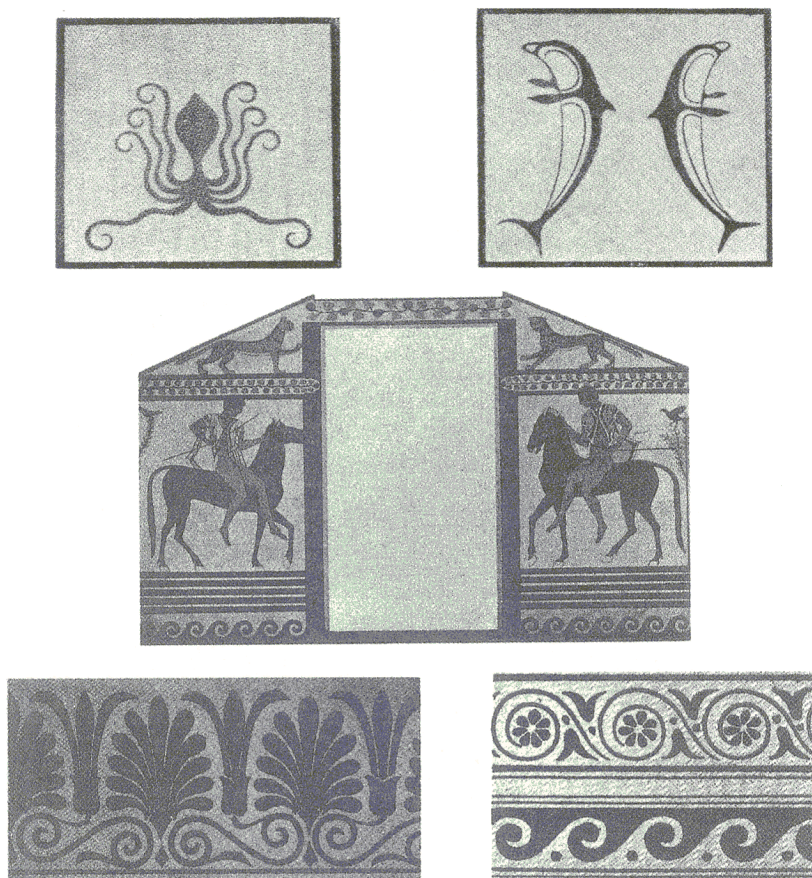
αναφέρετε τη λέξη «δεξιά», αντιλαμβάνεται αμέσως ότι η διεύθυνση αυτή είναι η αντίθετη της καρδιάς. Η εσωτερική αυτή ασυμμετρία, η οποία εκτείνεται και στον εγκέφαλο, εκδηλώνεται στην ικανότητα την οποία έχουν οι περισσότεροι άνθρωποι (σε ποσοστό περίπου 90%) να χρησιμοποιούν με πολύ μεγαλύτερη ευκολία το δεξί χέρι τους παρά το αριστερό. Άτομα με την αυτή λειτουργική ικανότητα και στα δύο χέρια είναι σπάνια, ίσως ανύπαρκτα.

Στη φύση, η συμμετρία των εμβίων όντων είναι εντυπωσιακή. Ό,τι κι αν παρατηρήσουμε γύρω μας είναι περίπου συμμετρικό: Τα δέντρα έχουν κυλινδρική (αξονική) συμμετρία, φύλλα και ζώα διαθέτουν λίγο-πολύ αμφίπλευρη συμμετρία, τα θαλάσσια ζώα έχουν επίσης αμφίπλευρη συμμετρία ή και πολύ υψηλότερες συμμετρίες (σχ. 7). Η αξονική συμμετρία είναι αποτέλεσμα του πεδίου βαρύτητας το οποίο αίρει («σπάει») την ομοιογένεια και ισοτροπία του τρισδιάστατου χώρου ως προς την κατακόρυφη κατεύθυνση, η δε αμφίπλευρη συμμετρία την ομοιογένεια και ισοτροπία του χώρου ως προς την οριζόντια διεύθυνση. Εάν υπάρχει ζωή σε άλλους πλανήτες, τα όντα αυτά πρέπει να έχουν την αυτή περίπου τοπολογία με τα αντίστοιχα γήινα όντα.

Τα ανθρώπινα κατασκευάσματα σπανίως στερούνται συμμετρίας, η αρχιτεκτονική μας είναι σχεδόν πάντα σύμμετρη, σχεδόν πάντοτε θα διαπιστώσουμε



Σχ. 7. Οργανισμοί με άξονα συμμετρίας 6ης τάξεως.



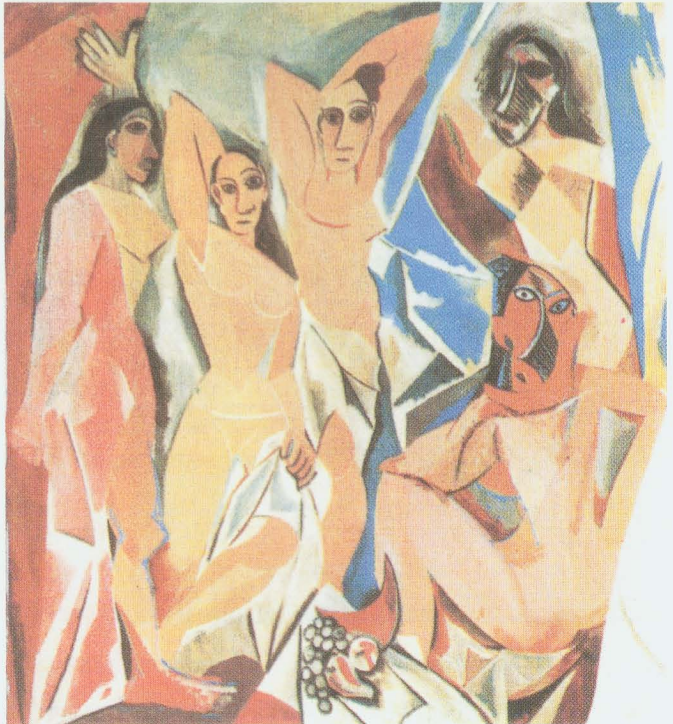
Σχ. 8. Μοτίβα τα οποία χαρακτηρίζονται από κατοπτρική συμμετρία και συμμετρία μεταφοράς.

την ύπαρξη στοιχείων συμμετρίας [(συνήθως κατοπτρική συμμετρία, συμμετρία μεταφοράς και ίσως κέντρων συμμετρίας (σχ. 8)].

Αυτό που συνήθως ονομάζεται αρμονία νομίζω ότι αντανακλά κάποια αμεταβλητότητα. Οι άνθρωποι φαίνεται ότι δεν ανέχονται καθολικές ασυμμετρίες. Καλούμε όμορφο σχεδόν πάντα αυτό το οποίο είναι συμμετρικό, η υψηλή δε συμμετρία πολλές φορές εντυπωσιάζει. Οι έννοιες της συμμετρίας, ομορφιάς,

αισθητικής, αρμονίας, κομψότητας διέπουν τους χώρους της τέχνης, της επιστήμης και αγγίζουν τα μαθηματικά. Ίσως, αυτό που αποκαλείται μοντέρνα τέχνη να χαρακτηρίζεται από έλλειψη στοιχείων συμμετρίας. Ο καλλιτέχνης προσδοκεί να εκφράσει πιθανόν κάποια εσωτερικότητα, η οποία στερείται της καθαρής γεωμετρικής συμμετρίας του έξω κόσμου. Παραδείγματος χάριν, η φοβερή ασυμμετρία της *Γκουέρνικα* του Picasso μας αφήνει άφωνους, δεν ξέρουμε τι να σκεφτούμε. Στη νοερή προσπάθειά μας να συνδέσουμε τα κομμάτια της, προκαλείται μια αγωνία, κι ίσως αυτό να ήθελε να προβάλλει ο καλλιτέχνης: την εσωτερική του αγωνία που δεν θα μπορούσε να εκφραστεί μέσω συμμετρικών (αρμονικών) δομών.

Θα αναφερθώ σε ένα άλλο έργο του ίδιου ζωγράφου, το “Los demoiselles d’ Avignon” (σχ. 9).

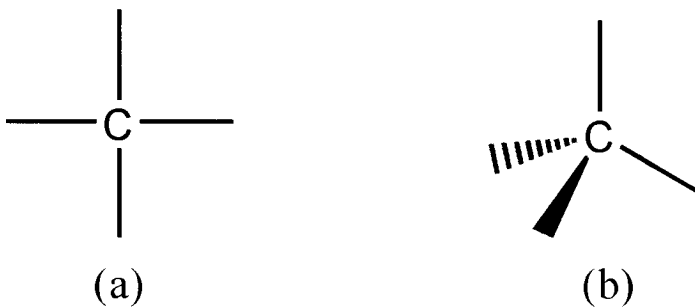


Σχ. 9.
Πάμπλο Πικάσο,
Οι Δεσποινίδες της
Αβινιόν.

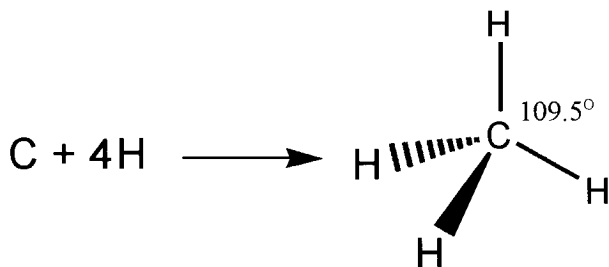
Γυναικεία πρόσωπα στρεβλωμένα, μάσκες φρικτές από τις οποίες απουσιάζει η αμφίπλευρη συμμετρία των φυσικών προσώπων. Ο καλλιτέχνης επέλεξε τη δραματική αυτή άρση της συμμετρίας που προκαλεί ρίγος. Αντιλαμβανόμαστε το ρίγος που προκαλείται, εάν μεταφερθούμε από τον χώρο της τέχνης –όπου θα μπορούσαμε να ερμηνεύσουμε τις άρσεις της συμμετρίας ως μηνύματα αγωνίας ή θολών και ασαφών καταστάσεων του υποσυνειδήτου– στον πραγματικό καθημερινό χώρο. Η άρση της συμμετρίας στο ανθρώπινο σώμα, η κοινώς λεγόμενη τερατογένεση, μόνον έργο τέχνης δεν μπορεί να θεωρηθεί. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση της θαλιδομιδης, φαρμάκου που χορηγείτο στις εγκύους περί τα τέλη της δεκαετίας του '50. Στην περίπτωση αυτή η κατοπτρική συμμετρία των μορίων έπαιξε τραγικό ρόλο (*vide infra*).

Ας εξετάσουμε τώρα τον ρόλο της συμμετρίας στο μοριακό επίπεδο. Το 1874 ο Ολλανδός Jacobus Henricus van't Hoff και ο Γάλλος Joseph Achille Le Bell, αλλά κυρίως ο πρώτος, εισηγούνται ότι τα τέσσερα «σθένη» του ατόμου του άνθρακος είναι διατεταγμένα στον τρισδιάστατο χώρο κι όχι στο επίπεδο, και μάλιστα τετραεδρικώς (σχ. 10).

Η πρόταση van't Hoff-Le Bell έγινε ώστε να αρθούν τα άλγυτα ως τότε προβλήματα δομικής ασυνεπείας των μορίων. Ας εξετάσουμε κάπως λεπτομερέ-



Σχ.10. (a) Επίπεδο άτομο άνθρακος, πριν το 1874. (b) Τετραεδρικό άτομο άνθρακος, μετά το 1874. (Οι απλές γραμμές είναι στο αυτό επίπεδο, η σφηνοειδής έντονη είναι εκτός επιπέδου και προς το μέρος του αναγνώστη και η σφηνοειδής διακεκομμένη γραμμή είναι εκτός επιπέδου και απομακρυνόμενη από τον αναγνώστη).

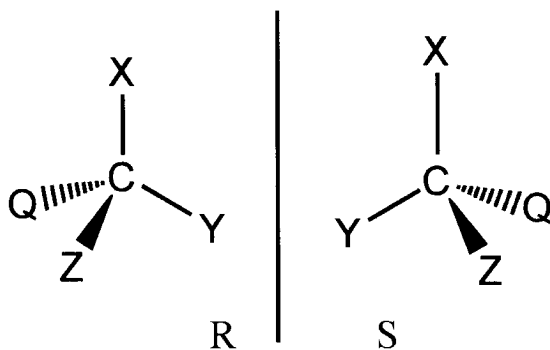


Σχ. 11. Σχηματισμός του μορίου του μεθανίου.

στερα την πρόταση van't Hoff-Le Bell, η οποία απεδείχθη σωστή, καθώς και τις συνέπειές της.

Το απλούστερο χημικώς σταθερό μόριο της οργανικής χημείας είναι το μεθάνιο: Τέσσερα άτομα υδρογόνου (H) συνδεδεμένα με ένα άτομο άνθρακα (C), CH₄, (σχ. 11) [η ομάδα συμμετρίας στην οποία ανήκει το CH₄ είναι αυτή του κανονικού τετραέδρου, ή T_d, με 24 πράξεις αμεταβλητότητας και είναι ίδια με αυτή του κύβου, βλ. (σχ. 1)].

Εάν τώρα αντικαταστήσουμε τα 4 υδρογόνα με διαφορετικά μεταξύ τους άτομα ή ομάδες ατόμων, το μόριο που προκύπτει εξακολουθεί να είναι τρισδιάστατο αλλά κάνει τη συμμετρία του κανονικού τετραέδρου· στην πραγματικότητα δεν έχει κανένα στοιχείο συμμετρίας. Συμβαίνει δε ένα αξιοσημείωτο γεγονός: οι τέσσερις διαφορετικοί υποκαταστάτες δημιουργούν δύο διαφορετικές γεωμετρικές κατανομές με σχέση αντικειμένου-ειδώλου (σχ. 5), αποτέλεσμα του τρισδιάστατου χώρου (σχ. 12).



Σχ. 12. Σχέση εναντιομόρφων (χειρομορφικών) μορίων. Το S είναι οπτικός αναντίπους του R ή και αντιστρόφως.

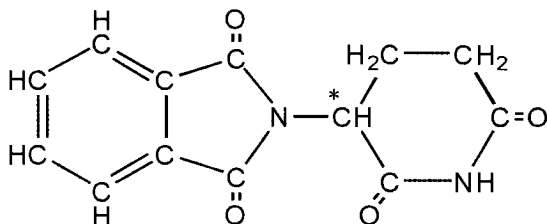
Αυτή η συμμετρία (ή ασυμμετρία) αντικειμένου-ειδώλου (R-S) έχει τεράστια σημασία. Τα δύο μόρια [C(XYZQ)] αν και «ίδια» είναι τελείως διαφορετικά! Η διαφορά τους είναι, όπως προαναφέρθη, η κατοπτρική κατανομή των υποκαταστατών X, Y, Z και Q στον χώρο, με αποτέλεσμα να μην είναι εφικτή η υπέρθεση του S επί του R. Τέτοιου είδους μόρια καλούνται **εναντιομερή** ή **εναντιόμορφα** ή **χειρόμορφα** ή οπτικοί αντίποδες (*vide supra* Σχ. 5), και εάν το ένα χαρακτηριστεί ως R (ή +, ή D) το άλλο θα είναι S (ή -, ή L). Πού διαφέρουν επομένως τα εναντιομερή; Η γεωμετρία τους είναι ακριβώς η ίδια, η κατανομή φορτίου ακριβώς η ίδια, τα φάσματά τους (υπερύθρου, ορατού-υπεριώδους, μαγνητικά, κ.λπ.) ακριβώς τα ίδια, έχουν το ίδιο σημείο τήξεως, ζέσεως ή εξαχνώσεως, κ.λπ. Πού διαφέρουν τελικώς; Οι διαφορές τους, συχνά σημαντικές, εκδηλώνονται στις ασύμμετρες αλληλεπιδράσεις με άλλα ασύμμετρα μόρια ή γενικότερα με το περιβάλλον τους. Ας γίνουμε λίγο σαφέστεροι: Εναντιόμορφα μόρια, R ή S, στρέφουν, για παράδειγμα το επίπεδο του γραμμικώς πολωμένου φωτός, ιδιότητα την οποία στερούνται μόρια με επίπεδα ή κέντρο συμμετρίας ή ένα ισομοριακό μείγμα εναντιομόρφων μορίων (ρακεμικό μείγμα). Δηλαδή, μονοχρωματικό γραμμικώς πολωμένο φως («ασύμμετρο» φως, ή «εναντιόμορφο φως», ή φωτόνια ορισμένης «ελικότητας» χαρακτήρα, έστω Rφ), το οποίο διέρχεται διά μέσου διαλύματος ή τήγματος ή κρυστάλλου ουσίας R (ή S) στρέφει το επίπεδο πολώσεως κατά ορισμένη γωνία. Εάν λόγου χάριν η ουσία τύπου R στρέφει το επίπεδο πολώσεως αριστερόστροφα κατά γωνία θ, υπό τις ίδιες ακριβώς συνθήκες ο οπτικός αντίποδας S θα στρέφει το επίπεδο πολώσεως επίσης κατά γωνία θ, αλλά δεξιόστροφα. Η στροφή του επιπέδου πολώσεως του φωτός είναι αποτέλεσμα αλληλεπιδράσεως δύο α-συμμετρικών οντοτήτων, του πολωμένου φωτός (R_φ) και του μορίου (R). Σχηματικώς, η αλληλεπιδρασις του αντίποδος R-φωτός μπορεί να παρασταθεί ως R*R_φ και του αντίποδα S ως S*R_φ, και επειδή η αλληλεπιδρασις δεν είναι η ίδια, η γωνία στροφής είναι αλγεβρικώς αντίθετη.

Βεβαίως, η αλληλεπιδρασις με ασύμμετρο φως δεν είναι η ουσιαστική διαφορά μεταξύ εναντιομερών μορίων, είναι όμως χαρακτηριστική και υποδεικνύει τις αρχές. Οι διαφορές είναι εντυπωσιακές και αποκτούν πολύ μεγάλη πρα-

κική σημασία στη βιολογική δράση ασυμμέτρων μορίων, π.χ. φαρμάκων στους έμβιους οργανισμούς. Κι αυτό διότι το μοριακό υπόστρωμα των εμβίων όντων είναι χειρόμορφο. Παραδείγματος χάριν, η ουσία D-πενικιλλαμίνη χρησιμοποιείται ως θεραπευτική αγωγή στην ασθένεια του Wilson, στην κυστινουρία και στη ρευματοειδή αρθρίτιδα. Ο οπτικός της αντίποδας L όχι μόνον δεν δρα ευεργετικά, αλλά είναι και επικίνδυνος. Το εναντιομέρες φαρμάκου εναντίον της φυματιώσεως, της εθαμβουτόλης, μπορεί να προκαλέσει τύφλωση. Στο σημείο αυτό είναι ενδιαφέρον να αναφερθούμε λεπτομερέστερα στην περίπτωση του φαρμάκου της θαλιδομίδης (*vide supra*).

Ο μοριακός τύπος της ουσίας αυτής παρίσταται στο σχήμα 13, αποτελείται δε από άτομα οξυγόνου (O), αζώτου (N), άνθρακος (C) και υδρογόνου (H).

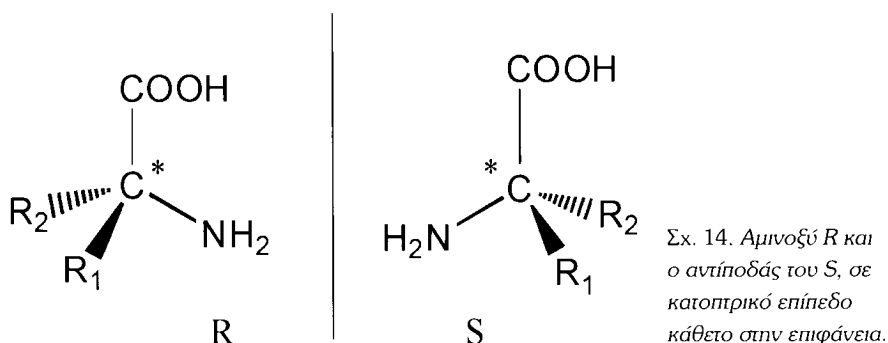
Εάν και το μόριο παρίσταται ως επίπεδο στο σχήμα 13, δεν είναι διότι ο δεξιός δακτύλιος είναι τρισδιάστατος κι η παρουσία του ασυμμέτρου ατόμου άνθρακος (C*) δημιουργεί δύο οπτικούς αντίποδες, R και S. Όπως ήδη αναφέρθη η θαλιδομίδη άρχισε να χορηγείται στις εγκύους διότι επιστεύετο ότι είχε κάποια ευεργετικά αποτελέσματα. Μεταξύ των ετών 1959-1961, οκτώ χιλιάδες βρέφη, στην Αγγλία τα περισσότερα αλλά και στην τότε Δυτική Γερμανία, γεννήθηκαν με παραμορφωμένα άκρα ή καθόλου άκρα, γνωστή ασθένεια που ονομάζεται **φωκομελία**. Το πολύ ενδιαφέρον είναι ότι οι καταστροφικές ιδιότητες της θαλιδομίδης οφείλονται, στο ότι το φάρμακο χορηγείτο στη ρακεμική του μορφή, δηλαδή ως ισομοριακό μίγμα R και S. Υπάρχουν ενδείξεις ότι τα δύο εναντιομερή παρουσιάζουν πολύ μεγάλες διαφορές: ο ένας αντίποδας είναι αβλαβής ή και ελαφρώς ευεργετικός, ο άλλος αιτία τερατογενέσεων.



Σχ.13. Το μόριο της θαλιδομίδης

Το ίδιο συμβαίνει και με άλλες φυσιολογικές ιδιότητες των χειρομόρφων μορίων. Εάν ο ένας αντίποδας είναι γλυκός, ο άλλος μπορεί να είναι λιγότερο γλυκός, άγευστος ή και πικρός, ο ένας να έχει ευχάριστη οσμή και ο άλλος να είναι άοσμος ή εξαιρετικά δύσοσμος. Είναι σαφές ότι ο τρόπος κατά τον οποίο οι χημικές ενώσεις δρουν πάνω στους οργανισμούς καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από τη συμμετρία των χημικών ενώσεων αλλά και τη συμμετρία των μορίων του οργανισμού με τα οποία αλληλεπιδρούν. Στο σημείο αυτό θα αναφερθούμε πολύ σύντομα στις δομικές μοριακές μονάδες των οργανισμών.

Σχεδόν τα πάντα σ' έναν οργανισμό αποτελούνται από πρωτεΐνες, δηλαδή πολύπλοκα μεγαλομόρια (φυσικά πολυμερή) αποτελούμενα από απλούστερα μόρια τα οποία ονομάζονται αμινοξέα. Οι πρωτεΐνες των ανωτέρων οργανισμών αποτελούνται από είκοσι (20) μόνον αμινοξέα. Τα τελευταία είναι ενώσεις του τύπου $CR_1R_2(COOH)(NH_2)$, όπως απεικονίζονται στο σχήμα 14.



Δηλαδή ένα κεντρικό άτομο άνθρακος (C^*) συνδεδεμένο με τέσσερις διαφορετικούς υποκαταστάτες (σχ. 5 και σχ. 12), δύο εκ των οποίων ($-COOH$, $-NH_2$) είναι πάντοτε οι ίδιοι σε όλα τα αμινοξέα και δύο ακόμη (R_1 και $R_2 \neq -COOH$, $-NH_2$) σχεδόν πάντοτε διαφορετικοί μεταξύ τους. Ήδη, γνωρίζουμε (σχ. 12) ότι ένα άτομο άνθρακος με τέσσερις διαφορετικούς υποκαταστάτες παρέχει τη δυνατότητα υπάρξεως δύο αντιπόδων, των R και S, και όντως έτσι είναι. Το περίεργο όμως είναι ότι όλοι οι ανώτεροι οργανισμοί αποτελούνται από πρωτεΐνες, τα αμινοξέα των οποίων είναι τύπου S και μόνον, δηλαδή του

ενός οπτικού αντίποδα ορισμένης στερεοδομής. Οι συνέπειες αυτής της ιδιομορφίας είναι πολύ μεγάλες, είναι αδύνατον όμως να αναφερθούμε εδώ στον θαυμαστό ρόλο των ιδιομορφιών αυτών. Η δράσις των φαρμάκων την οποία προηγουμένως θίξαμε είναι άμεση απόρροια της γεωμετρικής δομής των S αμινοξέων και των αντιστοίχων πρωτεϊνών. Θα ήθελα μόνον να προσθέσω τα εξής: Τίποτα δεν φαίνεται ότι θα άλλαζε εάν οι πρωτεΐνες μας αποτελούντο από αμινοξέα τύπου R κι όχι S· όλα θα ήταν τα ίδια. Δεν θα ήταν δυνατόν όμως οι πρωτεΐνες των ανωτέρων οργανισμών να αποτελούνται από τυχαία μίγματα R και S αμινοξέων, κι αυτό είναι απολύτως κατανοητό. Το μεγάλο όμως ερώτημα είναι γιατί οι πρωτεΐνες αποτελούνται μόνο από S κι όχι μόνον από R αμινοξέα και πώς αυτό συνέβη στο ξεκίνημα της ζωής αρκετά εκατομμύρια χρόνια πριν. Τι ήταν αυτό που υπαγόρευσε τελικώς την προτίμηση του S αμινοξικού αλφαβήτου αντί του R; Ήταν τυχαίο; Αυτή τη στιγμή κανείς δεν γνωρίζει, η απάντηση μπορεί να είναι βαθιά θαμμένη στις συμμετρίες των στοιχειωδών σωματιδίων και των ασθενών αλληλεπιδράσεων ή ακόμη και στην «ανθρωπική αρχή», αν και η τελευταία δεν μπορεί να θεωρηθεί ως «πραγματική» (πρώτων αρχών) εξήγησις.

Θα ήθελα τώρα να αναφερθώ στη σχέση (1), στον μεταθέτη δηλαδή $[\Sigma, A] = [A, \Sigma]$. Εάν θεωρήσω τα A και Σ ως αριθμούς, π.χ. 4 και 12, είναι προφανές ότι $[4, 12] = 4 \times 12 - 12 \times 4 = 0$. Εν γένει όμως, και επειδή τα Σ και A δεν είναι αριθμοί ή συναρτήσεις, $\Sigma * A \neq A * \Sigma$, όπου * κάποια πράξις, δεν έχουμε αμεταβλητότητα. Αυτό είναι προφανές εάν σκεφτούμε κάποιες καθημερινές μας πράξεις: σχεδόν ποτέ δύο πράξεις μας δεν μετατίθενται. Η διαδοχή των πράξεων είναι κεφαλαιώδους σημασίας: Διαφέρει πολύ εάν βάλετε πρώτα τις κάλτσες και μετά τα παπούτσια ή το αντίθετο, το πουκάμισο πρώτα και μετά το σακάκι ή το αντίθετο, εάν παίζετε στο χρηματιστήριο τη χρονική στιγμή t_1 και κατόπιν πουλήσετε τις μετοχές σας ή το αντίθετο. Το ίδιο συμβαίνει με τις «πράξεις» της φύσεως και τους θεμελιώδεις νόμους. Άρα, εν γένει, ο μεταθέτης $[\Sigma, A] \neq 0$. Στις ελάχιστες όμως περιπτώσεις, όπου $[\Sigma, A] = 0$, οι περιπτώσεις αυτές είναι πολύ σημαντικές για την κατανόηση των φυσικών νόμων. Ο δε μηδενισμός διαφόρων μεταθετών είναι αποτέλεσμα ειδικών συμμετριών. Στην κλασική (νευτώνεια) μηχανική αλλά και στην Κβαντική Μηχανική ή σε κάθε δυναμική

της νεότερης Φυσικής, ορισμένα μεγέθη διατηρούνται σταθερά, δηλαδή δεν μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου και ονομάζονται σταθερές κινήσεως (ή απλώς σταθερές ή κβαντικοί αριθμοί). Ο ρόλος τέτοιων μεγεθών βρίσκεται στα θεμέλια των φυσικών νόμων. Τέτοια μεγέθη, όπως ήδη αναφέρθη, είναι η ενέργεια, η ορμή, η στροφορμή, η μάζα, το φορτίο, η ομοτιμία (parity), και άλλα αναλόγως του συστήματος και του κατά πόσον οι συμμετρίες είναι τέλειες ή προσεγγιστικές. Το γιατί διατηρούνται ορισμένα μεγέθη σε τελευταία ανάλυση δεν είναι γνωστό, ίσως δεν έχει και νόημα το τελικό γιατί, αλλά κάθε διατηρητέο μέγεθος είναι αποτέλεσμα κάποιας αντίστοιχης συμμετρίας ή αμεταβλητότητας και του μηδενισμού του αντιστοίχου μεταθέτη. Επί παραδείγματι, η διατήρησης της ενεργείας είναι αποτέλεσμα αμεταβλητότητας ως προς τον χρόνο, της στροφορμής ως προς την περιστροφή (ισοτροπία), της ορμής ως προς τη μεταφορά στον συνθήκη καρτεσιανό χώρο (ομοιογένεια), ενώ η διατήρησης της μάζας είναι αποτέλεσμα ειδικής συμμετρίας, η οποία εκφράζεται μέσω του κανόνα της υπερ-επιλογής, κ.ο.κ.

Όπως ήδη ειπώθηκε, οι διάφορες συμμετρίες δεν μας εξηγούν το γιατί διατηρούνται κάποια μεγέθη, αλλά βοηθούν σε πολύ μεγάλο βαθμό την επίλυση πολύπλοκων προβλημάτων, αυξάνουν την προβλεπτική ισχύ της θεωρίας και εν γένει καθιστούν το θεωρητικό οικοδόμημα απλούστερο, άρα ομορφότερο. Ίσως αυτό ακριβώς είναι και η τελική εξήγηση του γιατί συμβαίνει κάτι, διότι ο κομψός φορμαλισμός οδηγεί στις πλέον αρμονικές (συμμετρικές) εξισώσεις. Εδώ βεβαίως έχουμε τη λανθάνουσα παραδοχή ότι η φύση, τα φυσικά φαινόμενα, είναι δυνατόν να κατανοηθούν και να ελεγχθούν με μαθηματικό τρόπο, μια πολύ παλιά εικασία ισομορφίας φυσικών νόμων και μαθηματικών εκφράσεων, και δη όμορφων μαθηματικών εκφράσεων. Ο πολύ γνωστός στη θεωρία των αριθμών Βρετανός μαθηματικός G. H. Hardy, στο θαυμάσιο βιβλίο του *A mathematician's apology*, γράφει:

«Οι μαθηματικές απεικονίσεις (patterns) πρέπει να είναι όμορφες, οι ιδέες, όπως ακριβώς τα χρώματα και οι λέξεις, πρέπει να συναρμολογούνται μεταξύ τους με αρμονικό τρόπο. Η ομορφιά είναι η πρώτη δοκιμή, δεν υπάρχει χώρος στον κόσμο για δύσμορφα (ugly) μαθηματικά».

Ο επίσης Βρετανός φυσικός P. A. M. Dirac, ένας από τους κορυφαίους του 20ού αιώνας, σε ομιλία του στη Βασιλική Ακαδημία της Ιρλανδίας [Proc. Roy. Irish Acad. 63A, 49-59 (1962-1963)], κλείνοντας τη διάλεξή του λέει:

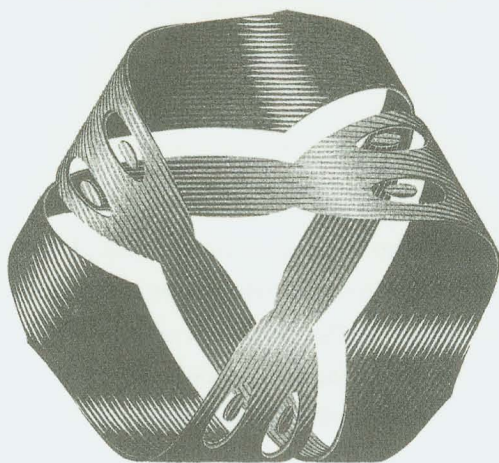
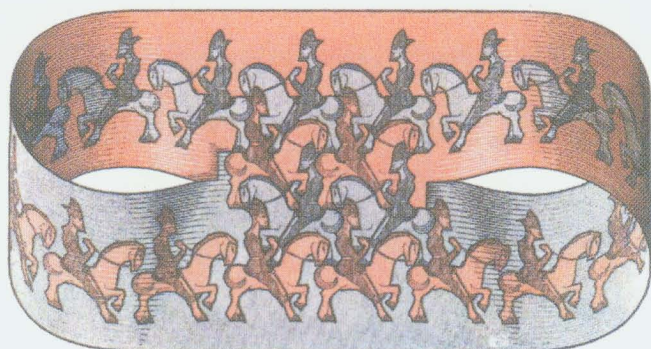
«Μπορούμε να προσπαθήσουμε να προοδεύσουμε (στη Φυσική) ακολουθώντας τα βήματα του Hamilton, θεωρώντας ως οδηγό μας τη μαθηματική ομορφιά και δημιουργώντας κατ' αρχάς ενδιαφέρουσες θεωρίες κρίνοντας μόνον την ομορφιά των μαθηματικών τους. Μπορούμε έτσι να ελπίζουμε ότι τέτοιου είδους εξισώσεις θα αποδειχθούν αξιολογες στη Φυσική, βασίζοντας αυτή την ελπίδα στην πίστη ότι η φύση απαιτεί στους νόμους της μαθηματική ομορφιά».

Σε άρθρο του περί ομορφιάς και αναζήτησης της ομορφιάς στην επιστήμη, ο μεγάλος Ινδός φυσικός S. Chandrasekhar (Physics Today, Ιούλιος 1979, σ. 25) αναφέρει ότι: «Τέτοιες σχέσεις

$$\int_0^{\infty} dx e^{-3\pi x^2} \frac{\sinh \pi x}{\sinh 3\pi x} = \frac{1}{e^{2\pi} \sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n(n+1)\pi} (1 + e^{-\pi})^{-2} \cdot (1 + e^{-3\pi})^{-2} \cdot (1 + e^{-5\pi})^{-2} \dots [1 + e^{-(2n+1)\pi}]^{-2}$$

μου προκαλούν ακριβώς την ίδια συγκίνηση την οποία νιώθω όταν βλέπω την ομορφιά των παραστάσεων του Michelangelo στον τάφο των Μεδίκων Giuliano και Lorenzo, οι οποίες απεικονίζουν τη Νύχτα, την Ημέρα, το Σούρουπο και την Αυγή».

Αναφέρθηκα περισσότερο στην κατοπτρική ή αμφίπλευρη συμμετρία η οποία είναι και η πλέον ανθρωπομορφική. Συμμετρίες πιο αφηρημένες στην τέχνη, δηλαδή που πλησιάζουν τη μαθηματική σκέψη, δημιούργησε ο Ολλανδός χαράκτης M. C. Escher (1898-1971). Είναι όντως κάτι το εκπληκτικό, η συμμετρία διέπει πέρα ως πέρα το έργο του Escher (σχ. 15). Ο ίδιος δεν είχε γνώσεις μαθηματικών αλλά φαίνεται πως είχε επηρεαστεί από τον αδερφό του, ο οποίος είχε σχέση με την κρυσταλλογραφία. Ο περιορισμένος χρόνος δεν μου επιτρέπει να συζητήσω για το έργο του Escher, όμως ομολογώ ότι υποκλίνομαι στη μεγαλειώδη γεωμετρική φαντασία του χαράκτη.



Σχ. 15. Χαρακτικά του Ολλανδού χαρακτι M.C. Escher
(α) Ιππείς (1946), (β) Λωρίδα Mœbius (1963)

ΓΕΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

H. Weyl, *Symmetry*, Princeton University Press, 1952.

A. V. Shubnikov and V. A. Koptsik, *Symmetry in Science and Art*, Plenum Press, 1974.

E. P. Wigner, *Symmetries and Reflections*, Indiana University Press, 1967.

M. Gardner, *The Amphidextrous Universe*, Charles Scribner's and Sons, 1979.

The Graphic Work of M. C. Escher, Ballantine Books, 1973.