

## ANNALEN DER PHYSIK.

## VIERTE FOLGE. BAND 32.

1. *Elektromagnetische Wellen an dielektrischen Drähten;*  
*von D. Hondros und P. Debye.*

Vor kurzem hat der eine von uns<sup>1)</sup> die für das Zustandekommen von Wellen an leitenden Drähten (Einzeldraht) notwendigen Bedingungen genauer untersucht. Es zeigte sich, daß neben dem gewöhnlich beobachteten von Sommerfeld berechneten Typus<sup>2)</sup>, welcher dort Hauptwelle genannt wurde, im allgemeinen noch andere Typen (Nebenwellen) möglich sind, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit in überwiegendem Maße vom Drahtmaterial selbst bestimmt wird — im Gegensatz zu den Hauptwellen, deren Eigenschaften durch das umgebende Dielektrikum bedingt werden. Für die Beobachtung spielen diese Nebenwellen indessen, wie dort näher ausgeführt wird, keine Rolle, da sie auf außerordentlich kurze Wegstrecken bis zu einem unmerklichen Betrage abgedämpft werden. Die Dämpfung wird bewirkt durch die im leitenden Drahte entwickelte Joulesche Wärme, die beim Nebenwellentypus besonders groß ist, da das Feld im Innern des Drahtes keinen Skineffekt zeigt. Unter diesen Umständen schien es uns von Interesse, auch den Fall eines dielektrischen Drahtes näher zu verfolgen, bei dem die obige Ursache der Dämpfung wegfällt und für den also die Existenz der Nebenwellen mit beobachtbarer Intensität wohl von vornherein erwartet werden darf. Tatsächlich zeigt die Diskussion der betreffenden Formeln, daß solche Wellen möglich sind, und zwar allgemein in unendlicher Zahl. Ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit schwankt je nach der erregenden Schwingungszahl zwischen der für das äußere Medium und der für das Drahtmaterial charakteristischen. In der Nähe des ersten Grenzfalles nimmt das Feld mit zu-

1) D. Hondros, Diss. München, auch Ann. d. Phys. 30. p. 905. 1909.

2) Sommerfeld, Ann. d. Phys. 67. p. 233. 1899.

nehmendem Abstände von der Drahtachse nur sehr langsam ab; bei der Annäherung an den zweiten ist das Feld im Außenraum auf unmerkliche Bruchteile gedämpft in Abständen von der Drahtachse, welche mit der dem Drahtmaterial angepaßten Wellenlänge vergleichbar sind. In der Richtung der Drahtachse selbst, der Fortpflanzungsrichtung, ist der Vorgang ungedämpft, da die einzige Ursache der Dämpfung, die Joulesche Wärme, in Wegfall gekommen ist. Freilich könnte die Dämpfung auch durch seitliche Ausstrahlung bewirkt werden; Vorgänge dieser Art haben wir indessen nach Sommerfeld nicht mehr mit dem Namen „Drahtwellen“ belegt, diesen vielmehr nur angewandt auf Vorgänge, bei denen weder Ein- noch Ausstrahlung von Energie aus dem Unendlichen her stattfindet. Mit dieser Definition hängt eine zunächst sehr merkwürdig erscheinende Tatsache zusammen, welche schon für die Nebenwellen bei metallischen Leitern von D. Hondros<sup>1)</sup> hervorgehoben wurde. Ist nämlich die Schwingungszahl des Vorganges eine fest vorgegebene, so sind nur eine endliche Anzahl der zu berechnenden Nebenwellen, Drahtwellen im Sommerfeldschen Sinne, die übrigen sind mit seitlicher Ausstrahlung verbunden. Sinkt die Schwingungszahl unter eine gewisse Größe, so sind in unserem speziellen Falle überhaupt keine „Drahtwellen“ mehr möglich. Man kann aber die Verhältnisse im Experiment durchaus so einrichten, daß man mit der Frequenz oberhalb dieser unteren Grenze bleibt; für sie ist das Verhältnis der „freien Wellenlänge“  $l$  (d. h. derjenigen Wellenlänge, welche dem Vorgange im freien Äther zukommen würde) zum Drahtradius  $\rho$  gegeben durch die Beziehung:

$$\frac{l}{\rho} = 2,61 \sqrt{\nu^2 - 1},$$

wobei  $\nu$  den Brechungsexponenten des Drahtmaterials bedeutet. Für einen Wasserzylinder ( $\nu = 9$ ) vom Radius  $\rho = 1$  cm wird demnach die obere Grenze der freien Wellenlänge, die der unteren Grenze für die Frequenz entspricht:

$$l = 23,4 \text{ cm.}$$

Außer der besprochenen Serie von Nebenwellen ist bei den

1) D. Hondros, l. c. p. 925.

metallischen Leitern noch der von Sommerfeld behandelte Typus „die Hauptwelle“ vorhanden, die dort die einzig beobachtbare ist und sich annähernd mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzt. Bei unserer Voraussetzung eines nicht leitenden Drahtmaterials fehlt von der Hauptwelle jede Spur. Man versteht dies daraus, daß mit abnehmender Leitfähigkeit die Hauptwelle sich immer mehr „abnorm“<sup>1)</sup> verhält, d. h. immer größere Dämpfung und von  $c$  immer verschiedene Fortpflanzung annimmt.

Quantitatives zu der obigen Schilderung ist in den folgenden drei Paragraphen enthalten. Im ersten werden die Formeln im Anschluß an die oben zitierte Arbeit von D. Hondros zusammengestellt, im zweiten werden die in unserem Falle allein vorhandenen Nebenwellen untersucht, schließlich wird im dritten Paragraphen das Feld dieser Wellen näher diskutiert.

§ 1. Die zugrunde gelegten Formeln.

Um die Achse des betrachteten Drahtes vom Radius  $\rho$  (Brechungsindex des Drahtmaterials  $\nu$ ) sind Polarkoordinaten  $r, \varphi$  eingeführt; in Richtung der Achse wird die Koordinate  $z$  gemessen. Die auf  $2\pi$  Sek. als Einheit bezogene Schwingungszahl des Vorganges sei  $\omega$ , so daß die beiden bei Hondros auftretenden Konstanten  $k_1^2$  und  $k_2^2$ , welche sich auf das Äußere (Medium I), bzw. das Innere des Drahtes (Medium II) beziehen, die Werte haben

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad k_2^2 = \nu^2 \frac{\omega^2}{c^2},$$

wenn noch  $c$  die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Neben den von Hondros eingeführten Zahlen  $x$  und  $y$ , welche das Verhalten des Feldes in I und II in radialer Richtung charakterisieren, wollen wir noch die neuen Abkürzungen

$$(1) \quad \alpha = k_1 \rho = 2\pi \frac{\rho}{l}, \quad \beta = 2\pi \frac{\rho}{L}$$

eingeführen. Die erste Größe  $\alpha$  ist der vorgegebenen freien Wellenlänge  $l$  umgekehrt proportional, ebenso soll  $\beta$  der gesuchten, am Drahte zu beobachtenden Wellenlänge  $L$  umgekehrt proportional sein. Man kann dann das Resultat der Hondrosschen Untersuchung folgendermaßen aussprechen:

1) Vgl. Beispiel 2, § 9 bei Sommerfeld, l. c.

Hat man bei vorgegebenem Werte von  $\alpha = 2\pi(\rho/l)$  die beiden Zahlen  $x$  und  $y$  so bestimmt, daß die beiden Gleichungen:

$$(2) \quad \frac{J'(y)}{yJ(y)} = \frac{1}{v^2} \frac{H'(x)}{xH(x)},$$

$$(2') \quad y^2 - x^2 = (v^2 - 1)\alpha^2$$

erfüllt sind, so folgt die am Drahte zu beobachtende Wellenlänge mit Rücksicht auf (1) aus irgend einer der beiden (nach (2') äquivalenten) Gleichungen

$$(3) \quad \beta^2 = v^2 \alpha^2 - y^2 = \alpha^2 - x^2.$$

Das Feld wird dann in den beiden Medien I und II dargestellt durch die Formeln:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_z = xyJ(y)H\left(x\frac{r}{\varrho}\right) \\ \mathfrak{E}_r = i\beta yJ(y)H'\left(x\frac{r}{\varrho}\right) \\ \mathfrak{S}_\varphi = i\alpha yJ(y)H'\left(x\frac{r}{\varrho}\right) \end{array} \right\} e^{i\frac{\beta z - \alpha ct}{e}},$$

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_z = yxH(x)J\left(y\frac{r}{\varrho}\right) \\ \mathfrak{E}_r = i\beta xH(x)J'\left(y\frac{r}{\varrho}\right) \\ \mathfrak{S}_\varphi = iv^2\alpha xH(x)J'\left(y\frac{r}{\varrho}\right) \end{array} \right\} e^{i\frac{\beta z - \alpha ct}{e}},$$

Die Funktionen  $J$  bzw.  $H$  sind die Besselsche, bzw. die erste Hankelsche Zylinderfunktion, deren Definitionsformeln bei Hondros p. 948 zusammengestellt sind.<sup>1)</sup> Für Drahtwellen im Sommerfeldschen Sinne kommt zu der durch (2) und (2') vermittelten Definition von  $x$  und  $y$ , noch die Bedingung hinzu, daß der imaginäre Teil von  $x$  positiv ist

$$(4) \quad \Im m[x] > 0;$$

anderenfalls würde nämlich die Hankelsche Funktion  $H\left(x\frac{r}{\varrho}\right)$

1) Die dort unter (52) und (53) angegebenen Formeln sind zu verbessern in:

$$(52) \quad H_{(1,2)0} \simeq 1 \pm \frac{2i}{\pi} \left( C \pm \log \frac{x}{2} \right) = \pm \frac{2i}{\pi} \log \frac{\alpha_{1,2}x}{2}$$

$$(53) \quad \log \alpha_{1,2} = C \mp \frac{\pi i}{2}, \quad \alpha_{1,2} = e^{\mp \frac{\pi i}{2} + 0,5772} = \mp i 1,781.$$

nicht für  $r = \infty$  verschwinden und der Vorgang mit Strahlung verbunden sein.

Es sei im übrigen bemerkt, daß wir uns bei der obigen Formulierung auf die elektrischen symmetrischen Wellen beschränkt haben, da diese offenbar das Hauptinteresse beanspruchen dürften.

§ 2. Die Nebenwellen in ihrer Abhängigkeit von der freien Wellenlänge der erzeugenden Schwingungen.

Wir betrachten zunächst Gleichung (3) und schließen daran eine allgemeine Bemerkung. Da Leitfähigkeit des Drahtmaterials ausgeschlossen wurde, so muß (für unsere Drahtwellen)  $\beta$  reell sein, damit folgt dann sogleich, daß  $x$  nur rein imaginär oder rein reell sein kann. Im letzteren Falle müßte überdies

$$x < a$$

sein. Daß diese zweite Möglichkeit bedeutungslos ist, werden wir am Schluß dieses Paragraphen sehen. Wir untersuchen deshalb zunächst die positiv imaginäre  $x$ -Achse.<sup>1)</sup> Nun ist für

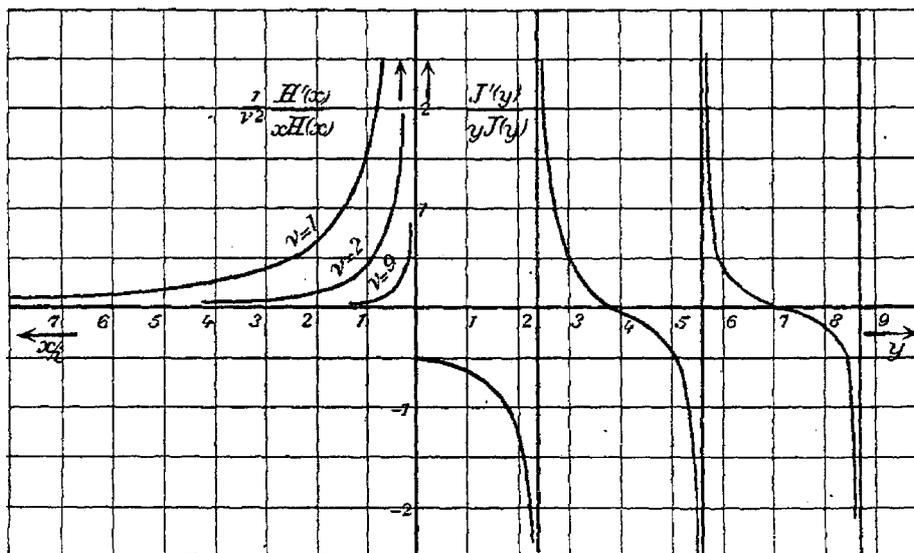


Fig. 1.

rein imaginäres Argument die erste Hankelsche Funktion  $H(x)$  rein imaginär<sup>2)</sup>, Zähler sowohl wie Nenner der rechten

1) Die negativ imaginäre Achse ist durch die Definitionsbedingung (4) der Drahtwellen ausgeschlossen.

2) Vgl. N. Nielsen, Zylinderfunktionen, Leipzig 1904, p. 17.

Seite von (2) werden deshalb rein reell. Andererseits muß, damit die linke Seite reell wird, auch  $y$  als reell angenommen werden; bei der Diskussion von (2) können wir also vollständig im Reellen bleiben und uns die Verhältnisse graphisch veranschaulichen. Zu diesem Zwecke wurden in Fig. 1 in horizontaler Richtung rechts von der vertikalen Achse die Werte von  $y$ , links die von  $x/i$  abgesteckt und senkrecht dazu die zugehörigen Funktionen

$$\frac{J'(y)}{y J(y)}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{v^2} \frac{H'(x)}{x H(x)}$$

aufgetragen. Erstere Kurve verhält sich für einigermaßen große Werte von  $y$  wie

$$-\frac{1}{y} \operatorname{tg} \left( y - \frac{\pi}{4} \right),$$

und hat also asymptotisch Nullstellen bei

$$y = (4n + 1) \frac{\pi}{4}$$

und Unendlichkeitsstellen bei

$$y = (4n - 1) \frac{\pi}{4}.$$

Die ersten von diesen Werten noch abweichenden Nullstellen finden sich bei<sup>1)</sup>

$$y = 3,83, \quad y = 7,02, \quad y = 10,2, \dots,$$

und die ersten Unendlichkeitsstellen bei

$$y = 2,40, \quad y = 5,52, \quad y = 8,65, \dots$$

Die zweite Funktion  $\frac{1}{v^2} \frac{H'(x)}{x H(x)}$ , welche im linken Teil der Fig. 1 aufgetragen<sup>2)</sup> ist, verhält sich für große Werte von  $x/i$ , wie  $\frac{1}{v^2} \frac{1}{x/i}$ , für kleine Werte von  $x/i$  wird sie  $\infty$  wie

$$-\frac{1}{v^2} \frac{1}{\left(\frac{x}{i}\right)^2 \log \frac{x}{i}};$$

die betreffenden Kurven sind in Fig. 1 eingetragen für  $v = 1$ ,  $v = 2$  und  $v = 9$  (Wasser); im Grenzfall  $v = \infty$  würde die

1) Vgl. die Tabellen bei E. Jahnke u. F. Emde, Funktionentafeln, Leipzig 1909, p. 122 u. 123.

2) Benutzt wurde die Tabelle bei E. Jahnke u. F. Emde; l. c. p. 135.

Kurve mit der geradlinigen linken Ecke der Figur zusammenfallen. Nach Gleichung (2) sind jetzt Werte mit gleichen Ordinaten zusammengehörig, so daß, wie aus Fig. 1 ersichtlich, zu einem bestimmten Werte von  $x/i$  unendlich viele Werte von  $y$  gehören. Der allgemeine Zusammenhang zwischen  $y$  und  $x/i$  ist in Fig. 2 unter Zugrundelegung von Fig. 1 dargestellt für die schon oben angenommenen Werte  $\nu = 1$ ,  $\nu = 2$  und  $\nu = 9$ . Das erste Kurvenbüschel, dessen einzelne Kurven

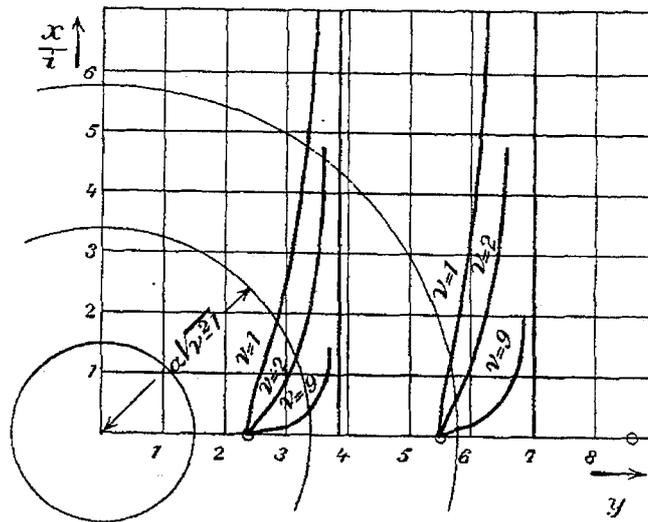


Fig. 2.

durch die verschiedenen Werte von  $\nu$  unterschieden sind, fängt an bei  $y = 2,40$  (erste Asymptote der Fig. 1) und erhebt sich ins Unendliche längs einer senkrechten Asymptote bei  $y = 3,83$  (erste Nullstelle der Fig. 1 rechts). Zwischen  $y = 3,83$  und  $y = 5,52$  sind keine reellen, durch (2) dargestellten Kurven möglich; von  $y = 5,52$  geht indessen wieder ein neues Kurvenbüschel aus, das seine Asymptote bei  $y = 7,02$  hat, usw.

Außer (2) haben wir noch (2') zu erfüllen, welche Gleichung wir schreiben wollen:

$$(2') \quad y^2 + \left(\frac{x}{i}\right)^2 = (\nu^2 - 1) \alpha^2.$$

In Fig. 2 wird demnach Gleichung (2') dargestellt durch einen Kreis mit dem bei wachsendem  $\alpha$  wachsenden Radius

$$\sqrt{y^2 + \left(\frac{x}{i}\right)^2} = \alpha \sqrt{\nu^2 - 1}.$$

Der Schnittpunkt dieses Kreises mit einer der vorher besprochenen Kurven liefert also analytisch gesprochen zwei Werte, einen für  $x/i$  und einen für  $y$ , welche die beiden Gleichungen (2) und (2') befriedigen. Die gesuchte Größe  $\beta$  selbst folgt schließlich aus (3).

Um den Überblick zu erleichtern, haben wir nun schließlich noch in dieser Weise  $\beta = 2\pi \rho / L$  als Funktion von  $\alpha = 2\pi \rho / l$  ermittelt und in Fig. 3 durch ein Kurvenbild veranschaulicht für den Spezialfall  $\nu = 9$ . Gehen wir aus von

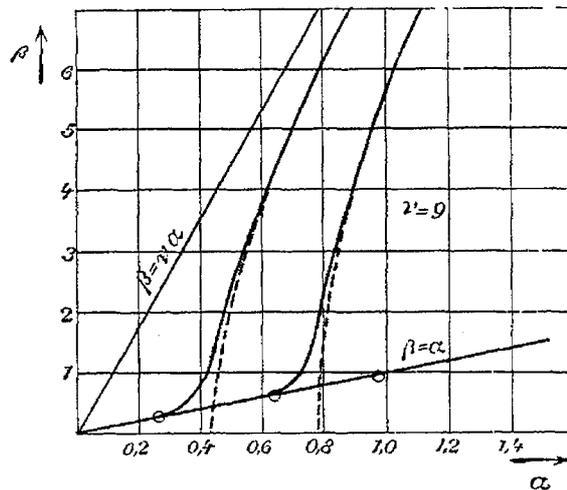


Fig. 3.

statischen Zuständen ( $l = \infty$ ), so wächst  $\alpha$  von 0 an. Zunächst ist der Radius des Kreises in Fig. 2 (welcher sich ja proportional  $\alpha$  ergab) zu klein, um eine der (2) darstellenden Kurven zu schneiden: Drahtwellen sind unmöglich. Erst wenn  $\alpha$  so weit gewachsen, daß

$$(5) \quad \alpha \sqrt{\nu^2 - 1} = 2,40,$$

werden, wie schon in der Einleitung bemerkt, Wellen möglich; dann ist gerade  $y = 2,40$  und  $x/i = 0$ , so daß nach (3)  $\beta = \alpha$  wird.<sup>1)</sup> Dieser Lösung entspricht der erste in Fig. 3 durch einen kleinen Kreis angedeutete Punkt. Wegen  $x/i = 0$  ist das Feld in radialer Richtung gerade noch ungedämpft, während  $\beta = \alpha$  mit Rücksicht auf (I) und (II) bedeutet, daß die Wellen

1) Die Lösung  $\beta = -\alpha$  entspricht Wellen, welche sich in entgegengesetzter Richtung fortpflanzen, wir können sie also ohne weiteres außer Betracht lassen.

sich mit Vakuumgeschwindigkeit längs des Drahtes fortpflanzen. Für Wasser mit  $\nu = 9$  erhält man für  $\alpha$  den Grenzwert

$$\alpha = \frac{2,40}{\sqrt{80}} = 0,268,$$

der schon in der Einleitung angegebenen freien Wellenlänge  $l = 23,4$  cm entsprechend, berechnet für einen Drahtradius von 1 cm. Je weniger  $\nu$  von 1 verschieden ist, um so größer wird der Wert von  $\alpha$ , welcher für das Zustandekommen von Drahtwellen überhaupt nötig ist. Für einen Körper mit  $\nu = 2$  ist dieser Grenzwert schon  $\alpha = 1,38$  geworden, so daß jetzt nur mehr Wellen möglich sind für die  $l/\rho < 4,55$ . Wird  $\nu = 1$ , so ist der Radius unseres durch (2') definierten Kreises dauernd Null; Drahtwellen sind dann natürlich überhaupt nicht mehr möglich. Wächst  $\alpha$  nun weiter von dem durch (5) definierten Wert aus, so rückt der Schnittpunkt in Fig. 2 stetig höher, in der Grenze für  $\alpha = \infty$  erreicht er die Grenzlage  $x/i = \infty$ ,  $y = 3,83$ , so daß wir für  $\beta$  nach (3) erhalten

$$\beta^2 = \nu^2 \alpha^2 - (3,83)^2.$$

Die durch diese Gleichung in der  $\alpha\beta$ -Ebene dargestellte Hyperbel mit der Asymptote  $\beta = \nu\alpha$  ist in Fig. 3 gestrichelt, die wirkliche (ausgezogene) Kurve für  $\beta$  als Funktion von  $\alpha$  schließt sich ihr mehr und mehr an. Aus dem Obigen ersieht man weiter, wie mit abnehmender freier Wellenlänge die Nebenwellen immer stärker in radialer Richtung gedämpft werden (wachsendes  $x/i$ ), so daß das Feld immer mehr auf das Innere des Drahtes beschränkt wird. Zugleich nimmt plausiblerweise die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ab (zunehmendes  $\beta/\alpha$ ), um schließlich, dem für  $\beta$  gefundenen Grenzwerte  $\beta = \nu\alpha$  entsprechend, gleich der für das Drahtmaterial eigentümlichen Geschwindigkeit  $c/\nu$  zu werden.

Das Obige bezieht sich auf Schnittpunkte unseres Kreises mit dem ersten Kurvenbündel in Fig. 2; sobald aber

$$(6) \quad \alpha \sqrt{\nu^2 - 1} = 5,52$$

geworden ist und weiter wächst, wird auch das zweite Kurvenbündel geschnitten, es tritt also eine neue Nebenwelle auf, welche die analogen Erscheinungen wie die erste Nebenwelle mit wachsendem  $\alpha$  wiederholt. Für unseren Wasserzylinder

mit  $\rho = 1$  liegt die Grenze der freien Wellenlänge für die zweite Nebenwelle nach (6) bei  $l = 10,2$  cm. Die weitere Abhängigkeit unserer Größe  $\beta$  von  $\alpha$  wird durch die zweite, ausgezogene Kurve der Fig. 3 veranschaulicht.

Es erübrigt schließlich noch, im Einklange mit dem am Anfange dieses Paragraphen Gesagten, solche *reelle* Werte von  $x$  zu untersuchen für die  $x < \alpha$ . Man kann nun ohne weiteres einsehen, daß diese Werte keinen Drahtwellen entsprechen. Nach (2') müßte nämlich einerseits zugleich mit  $x$  auch  $y$  reell sein, andererseits ist bei reellem  $x$  die rechte Seite von (2) stets komplex, so daß aus (2) für  $y$  ein komplexer Wert folgen würde. Mit den oben behandelten Nebenwellen haben wir also den ganzen Vorrat brauchbarer Lösungen unserer Gleichungen (2) und (2') erschöpft.

### § 3. Explizite Darstellung des Feldes.

Für eine eventuelle experimentelle Verifizierung der vorher besprochenen Wellen ist es unbedingt notwendig, das Verhalten des Feldes genauer zu kennen. Wir wollen deshalb die beiden charakteristischen Grenzfälle, die den Endpunkten unseres ersten Kurvenastes in Fig. 3 entsprechen,

- a) freie Wellenlänge = Grenzwellenlänge,
- b) freie Wellenlänge sehr klein

besonders betrachten.

Im Falle a) ist nach § 2 unsere Größe  $x=0$  und  $y=2,40$ , als erste Wurzel von  $J(y) = 0$ ;  $\alpha$  selbst ist nach (5) gleich  $2,40 / \sqrt{\nu^2 - 1}$ , während  $\beta = \alpha$  wird. Nach (I) und (II) würde sich für alle Feldkomponenten der Wert Null ergeben, wir setzen deshalb  $x$  nicht vollends Null. Gleichung (2) ergibt dann in erster Näherung:

$$y = 2,40 - \frac{\nu^2}{2,40} \left(\frac{x}{i}\right)^2 \log 0,89 \frac{x}{i},$$

so daß

$$J(y) = - \frac{J'(2,40)}{2,40} \nu^2 \left(\frac{x}{i}\right)^2 \log 0,89 \frac{x}{i}.$$

Multiplizieren wir jetzt noch mit einem geeigneten für alle Feldkomponenten konstanten Faktor und ersetzen die Zahlenfaktoren durch ihre numerischen Werte, so erhalten wir schließlich in unserem Grenzfalle a) für die Feldkomponenten

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_z = 0,52 v^2 \left(\frac{x}{i}\right)^2 H\left(x \frac{r}{\varrho}\right) \\ \mathcal{E}_r = 1,25 \frac{v^2}{\sqrt{v^2-1}} \frac{x}{i} H'\left(x \frac{r}{\varrho}\right) \\ \mathcal{H}_\varphi = 1,25 \frac{v^2}{\sqrt{v^2-1}} \frac{x}{i} H'\left(x \frac{r}{\varrho}\right) \end{array} \right\} e^{i \frac{2,40}{\sqrt{v^2-1}} \frac{z-ct}{e}},$$

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_z = i 1,53 J\left(2,40 \frac{r}{\varrho}\right) \\ \mathcal{E}_r = -1,53 \frac{1}{\sqrt{v^2-1}} J'\left(2,40 \frac{r}{\varrho}\right) \\ \mathcal{H}_\varphi = -1,53 \frac{v^2}{\sqrt{v^2-1}} J'\left(2,40 \frac{r}{\varrho}\right) \end{array} \right\} e^{i \frac{2,40}{\sqrt{v^2-1}} \frac{z-ct}{e}}.$$

Die elektrischen Kraftlinien endigen demnach beinahe senkrecht zum Drahte (wegen  $\mathcal{E}_z/\mathcal{E}_r \ll 1$ ) und die Wellen pflanzen sich, wie schon in § 2 bemerkt, mit Vakuumgeschwindigkeit fort, beides Merkmale, die auch der sonst bei leitenden Drähte beobachteten Hauptwelle zukommen.

Im zweiten Grenzfall b) ist nach § 2 unsere Größe  $x/i \gg 1$ , während  $y = 3,83$  als erste Wurzel von  $J'(y) = 0$ . Nach (3) wird dementsprechend  $\beta = v\alpha$ , so daß die beobachtete Wellenlänge  $L = l/v$ . Überdies gilt dann nach (2) angenähert  $x/i = \alpha \sqrt{v^2-1}$ , so daß wir wieder ebenso wie oben für unsere Feldkomponenten folgende Darstellungen erhalten:

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_z = 1,54 \frac{H\left(i \sqrt{v^2-1} \frac{\alpha r}{\varrho}\right)}{H\left(i \sqrt{v^2-1} \alpha\right)} \\ \mathcal{E}_r = 1,54 \frac{v}{\sqrt{v^2-1}} \frac{H'\left(i \sqrt{v^2-1} \frac{\alpha r}{\varrho}\right)}{H\left(i \sqrt{v^2-1} \alpha\right)} \\ \mathcal{E}_\varphi = 1,54 \frac{1}{\sqrt{v^2-1}} \frac{H'\left(i \sqrt{v^2-1} \frac{\alpha r}{\varrho}\right)}{H\left(i \sqrt{v^2-1} \alpha\right)} \end{array} \right\} e^{i v \alpha \frac{z - \frac{c}{v} t}{e}},$$

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_z = 3,83 J\left(3,83 \frac{r}{\varrho}\right) \\ \mathcal{E}_r = v J'\left(3,83 \frac{r}{\varrho}\right) \\ \mathcal{H}_\varphi = v^2 J'\left(3,83 \frac{r}{\varrho}\right) \end{array} \right\} e^{i v \alpha \frac{z - \frac{c}{v} t}{e}}.$$

Nach außen hin nimmt jetzt das Feld exponentiell ab, und zwar um so schneller, je größer  $\alpha$ , d. h. je kleiner die freie Wellenlänge  $\lambda$ . Das innere Feld ist bis in die Achse überall von derselben Größenordnung und ist nur insofern von dem im Falle a) gefundenen verschieden, als die in Richtung der Drahtachse gerichtete elektrische Feldstärke  $\mathcal{E}_z$  innerhalb des Drahtes einen Zeichenwechsel erfährt, so daß in der Achse der Verschiebungsstrom die entgegengesetzte Richtung hat wie an der Oberfläche des Drahtes. Mit zunehmendem Brechungs-exponent  $\nu$  wird die magnetische Feldstärke  $\mathcal{H}_\varphi$  im Innern von der Größenordnung  $\nu^2$  mal der elektrischen Kraft  $\mathcal{E}_z$ , wie es sein muß, da für das magnetische Feld der Verschiebungsstrom  $\varepsilon \mathcal{E}_z = \nu^2 \mathcal{E}_z$  maßgebend ist.

Zum Schluß sei nochmals hervorgehoben, daß die hier besprochenen Wellen bei geeigneter Wahl des Drahtmaterials durchaus experimentell realisierbar sein dürften. Freilich ist es nicht ausgeschlossen, daß wenigstens für Werte der freien Wellenlänge, die nicht ganz nahe bei der Grenzwellenlänge liegen, die gewöhnlichen Beobachtungsmethoden eine Abänderung erfahren müssen, die mehr der Eigenart unserer besonders im Innern des Drahtes starken Wellen angepaßt ist.

Athen-München, Januar 1910.

(Eingegangen 14. Februar 1910.)

---