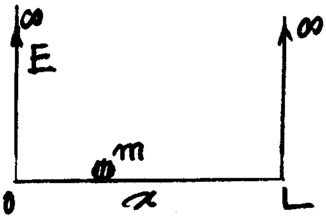
Μονοδιάστατο φρέαρ δυναμικού ἀπείρων τοιχωμάτων



Σχ. 1.

Ἡ ἐξ. (8) στὴν προκειμένη περίπτωση γίνεται

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right)\psi(x)=E\psi(x)$$

ὅπου

$$V(x)=\begin{cases}\infty & x<0\\ V_0=\text{σταθ.} & 0\leq x\leq L\\ \infty & x>L\end{cases}$$

Λόγῳ τῆς ἰδιομορφίας τοῦ δυναμικοῦ V γνωρίζουμε ἐκ τῶν προτέρων ὅτι τὸ σωματίδιο κινεῖται αὐστηρῶς στὸν χῶρο 0–L, δηλ. δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ παρουσία τοῦ σωματιδίου στὶς περιοχὲς $x<0$ καὶ $x>L$, αὐτὸ ἐξ ἄλλου σημαίνει δυναμικὸ ἀπείρων τοιχωμάτων. Στὸν ἐνδιάμεσο χῶρο θέτουμε $V_0=0$ · τὸ τελευταῖο ἁπλῶς σημαίνει μετακίνηση τοῦ "ἐνεργειακοῦ" μηδενὸς καὶ προφανῶς ἡ ἐπιλογὴ αὐτὴ δὲν ἐπηρεάζει τὶς λύσεις τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως. Ἔχουμε λοιπὸν

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)=\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x)$$

Ὁρίζουμε τὴν ποσότητα $$k^2=\frac{2mE}{\hbar^2} \qquad (11)$$

$$\Rightarrow E=\frac{(\hbar k)^2}{2m} \qquad (11\alpha)$$

Ἄρα ἡ πρὸς λύσιν ἐξίσωσις γίνεται

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+k^2\psi(x)=0 \qquad (12)$$

Ἡ γενική λύση τῆς (12) (γραμμικός συνδυασμός δύο ἀνεξαρτήτων λύσεων) εἶναι:

$$\psi(x)=A\cos kx+B\sin kx \qquad (13)$$

Οἱ "φυσικοί" περιορισμοί τοῦ προβλήματός μας ἐπιβάλλουν τίς ἑξῆς ὁριακές συνθῆκες

$$\psi(0)=\psi(L)=0$$

Ἀπό τήν πρώτη συνθήκη ἔχουμε $A=0$, ἄρα

$$\psi(x)=B\sin kx \qquad (13a)$$

Ἀπό τήν δεύτερη

$$\psi(L)=0=B\sin kL \Rightarrow B\neq 0 .$$

Ἀπαιτοῦμε $B\neq 0$, διότι ἐάν $B=0$ καί ἐπειδή $A=0 \Rightarrow \psi=0$ ἡ ὁποία δέν εἶναι λύση παριστάνουσα ἐπί φυσικοῦ σωματιδίου ἐπιπέδου. Ἄρα

$$\sin kL=0 \Rightarrow kL=N\pi$$

ὅπου N ἀκέραιος $\neq 0$, δηλ. $N=1,2,3\ldots$ Ἡ μηδενική τιμή τοῦ N ἀπορρίπτεται διότι ἐάν $N=0 \Rightarrow k=0 \Rightarrow \psi(x)=0$. Ἄρα ἡ γενική λύση τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\underline{\psi(x)=B\sin\frac{N\pi}{L}x} \qquad (14)$$

$$N=1,2,3\ldots$$

Ἂς κάνουμε ὁρισμένες παρατηρήσεις. Ἐκτός ἀπό τήν τιμή $N=0$, ἀπορρίψαμε καί τίς ἀρνητικές τιμές· ὁ λόγος εἶναι ὅτι ἀποδεχόμενοι καί ἀρνητικές τιμές τοῦ N ἁπλῶς ἀλλάζουμε τήν "φάση" τῆς $\varphi(x)$, κάτι πού ὅπως θά δοῦμε εἶναι ἄνευ σημασίας τουλάχιστον στά προβλήματα "φυσικοῦ" ἐνδιαφέροντος, ἐπί πλέον, ἡ ἀπόλυτος φάσις τῆς φ δέν εἶναι δυνατόν νά προσδιορισθῇ. Τώρα ἀπό τήν (11a) ἔχουμε

$$E=\frac{(\hbar k)^2}{2m}=\frac{(\hbar N\pi)^2}{2mL^2}=\frac{N^2h^2}{8mL^2}$$

ἤ $$\underline{E_N=E_1N^2}\,,\quad E_1=\frac{h^2}{8mL^2} \qquad (15)$$

$$N=1,2,3,\dots$$

Παρατηροῦμε τήν "κβάντωση" τῆς ἐνεργείας ἡ ὁποία προῆλθε ἀπό τίς ὁριακές συνθῆκες $\varphi(0)=\varphi(L)=0$. Ἡ διαφορετικά, ὅτι ἡ διαφορική ἐξίσωσις $\mathcal{H}\varphi=E\varphi$ ἱκανοποιεῖται μόνον ἀπό ὁρισμένες ἐνεργειακές τιμές, τίς τιμές (15), οἱ ὁποῖες εἶναι καί συμβατές μέ τίς ὁριακές συνθῆκες τοῦ προβλήματος. Οἱ τιμές αὐτές E_N καλοῦνται καί ἰδιοτιμές, οἱ δέ ἀντίστοιχες συναρτήσεις φ_N ἰδιοσυναρτήσεις.
Ἡ κλασσική ἐνέργεια σωματιδίου κινουμένου ἐντός σταθεροῦ δυναμικοῦ εἶναι

$E_c=\frac{p_x^2}{2m}$ ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ μέ τήν $\frac{(\hbar k)^2}{2m}$

$$\frac{p^2}{2m}\longleftrightarrow\frac{(\hbar k)^2}{2m}\Rightarrow \underline{p=\hbar k} \qquad (16)$$

Τό k, ὅπως φαίνεται καί ἀπό τόν ὁρισμό του ἔχει διαστάσεις ἀντιστρόφου μήκους ("κυματάριθμος"), τό δέ $\hbar$ (σταθερά

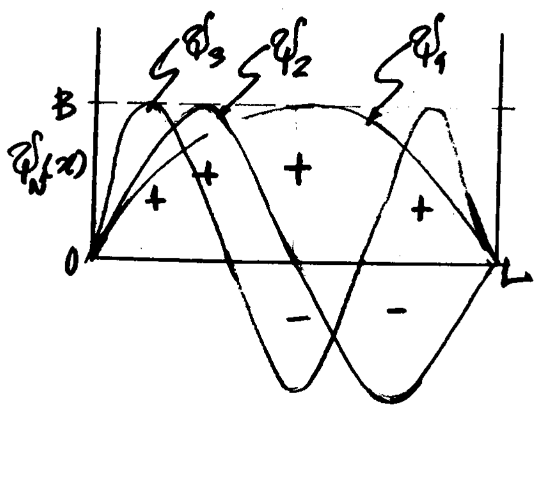
Planck) προσδιορίζει τό ἐλάχιστο μέγεθος «[illegible]σεως».
Ἡ σχέσις (16) λέγεται καί σχέσις de Broglie.
Πρίν ἐξετάσουμε τήν φυσική σημασία τῆς $\psi_N(x)$ ἄς δοῦμε τήν συμπεριφορά της. Προφανῶς μηδενίζεται στά σημεῖα 0 καί L. Ποῦ ἀλλοῦ;

$$B\sin\frac{N\pi}{L}x=0 \Rightarrow \frac{N\pi}{L}x = n\pi \quad \text{ὅπου } n \text{ ἀκέραιος}$$

$$\Rightarrow x=\frac{n}{N}L$$

Προφανῶς $n_{max}=N$ διότι μᾶς ἐνδιαφέρει τό διάστημα 0–L. Ἄρα μεταξύ 0 καί L (καί ἐκτός τῶν 0, L ὅπου πάντα μηδενίζεται) ἡ $\psi_N(x)$ μηδενίζεται στά σημεῖα $x=\frac{n}{N}L$, $n=1,2,3,\dots N-1$. Ἐάν ἐξαιρέσουμε δηλ. τά σημεῖα 0 καί L ἡ $\psi_N(x)$ μηδενίζεται σέ $N-1$ σημεῖα, τά ὁποῖα καλοῦνται καί κομβικά σημεῖα.

$\psi_1(x)$, $\quad n = N-1 = 0$
$\psi_2(x)$, $\quad n = N-1 = 1$, $\quad x = L/2$
$\psi_3(x)$, $\quad n = 1,\ 2 = N-1$, $\quad x = L/3$ καί $2L/3$
⋮



Σχ. 2. Γραφική παράστασις τῶν συναρτήσεων ψ_1, ψ_3, ψ_2.

Παραμένει βέβαια πρός προσδιορισμόν ἡ ποσότητα B (vide infra)

Ποιά εἶναι τώρα ἡ φυσική ἑρμηνεία τῆς $\Phi_\omega(x)$ καί γενικώτερα τῆς $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots \vec{r}_n)$; Θά δεχθοῦμε τήν λεγομένη "ὀρθόδοξη" ἑρμηνεία ἤ ἑρμηνεία τῆς Κοπεγχάγης (M. Born, 1882-1970). Θά δεχθοῦμε δηλ. ὅτι ἡ Ψ στερεῖται "φυσικῆς" ἑρμηνείας διότι δέν εἶναι δυνατόν νά συνδεθῆ ἀπ' εὐθείας μέ μετρήσιμα μεγέθη. (Προειδοποιοῦμε ὅτι ἡ ἄποψις αὐτή δέν εἶναι γενικῶς ἀποδεκτή) Ἀποδίδομεν φυσική ἑρμηνεία στό τετράγωνο τοῦ μέτρου τῆς Ψ, $|\Psi|^2$. Ἄς δοῦμε τί ἐννοοῦμε. Ἡ γενικώτερη μορφή τῆς συναρτήσεως εἶναι χρονικῶς ἐξηρτημένη $\Psi = \Psi(x,t)$, ὅπου μέ x συμβολίζουμε μία ἤ πολλές συντεταγμένες καί t εἶναι ἡ παράμετρος τοῦ χρόνου. Ἡ $\Psi(x,t)$ ἱκανοποιεῖ τήν *χρονικῶς ἐξηρτημένη ἐξίσωση τοῦ Schrödinger*

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \qquad (17)$$

Ἑρμηνεύουμε τό γινόμενο $\Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx$ ὡς τήν *πιθανότητα* τοῦ συστήματος νά εὑρεθῆ μεταξύ x, καί $x+dx$ σέ χρόνο t. $\Psi^*(x,t)$ εἶναι ἡ συζυγής τῆς $\Psi(x,t)$. Ἡ

$$\rho(x,t)dx = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx$$

$$\Rightarrow \rho(x,t) = |\Psi(x,t)|^2 \qquad (18)$$

Ἡ $\rho(x,t)$ εἶναι ἡ πιθανότητα ἀνά μονάδα "μήκους" (ἤ ἐπιφάνεια, ὄγκο ἤ γενικευμένο ὄγκο) νά βρεθῆ τό σωματίδιο στό σημεῖο x καί σέ χρόνο t. Ἡ συνάρτησις ρ καλεῖται *πυκνότητα πιθανότητος* ἤ *πιθανοτική πυκνότητα*

Ἀπαιτοῦμε τώρα τό σωματίδιο (σωματίδια) νά βρίσκεται ἐντός τοῦ χώρου ὁ ὁποῖος μᾶς ἐνδιαφέρει, δηλ. ἀπαιτοῦμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \rho(x,t) = \text{πεπερασμένο}$$

ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ὁ χῶρος ὁλοκληρώσεως εἶναι $-\infty$ — $+\infty$. Στό φρέαρ δυναμικοῦ ἀπείρων τοιχωμάτων ὁ χῶρος ὁ ὁποῖος μᾶς ἀφορᾶ εἶναι 0 — L. Μαθηματικῶς ζητᾶμε τήν σύγκλιση τοῦ προηγουμένου ὁλοκληρώματος. Μᾶς διευκολύνει νά θέσουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \Psi^*(x,t)\,\Psi(x,t) = 1 \qquad (19)$$

Παρατηροῦμε ὅτι τό ἀποτέλεσμα τῆς ὁλοκληρώσεως εἶναι χρονικῶς ἀνεξάρτητο. Ἡ συνθήκη (19) καλεῖται συνθήκη <u>κανονικοποιήσεως</u>. Δεχόμεθα ἐπίσης τίς ἑξῆς συνθῆκες τίς ὁποῖες πρέπει πάντοτε νά πληροῖ ἡ $\Psi(x,t)$

(i) Ἡ $\Psi(x,t)$ νά κανονικοποιεῖται
(δηλ. νά ὑπάρχει τό ὁλοκλήρωμα $\int_x dx\, \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)$)

(ii) Ἡ $\Psi(x,t)$ νά εἶναι μονότιμος
(αὐστηρῶς μᾶς ἐνδιαφέρει ἡ $|\Psi(x,t)|^2$ νά εἶναι μονότιμος· ἡ προσθήκη τῆς ἰδιότητος αὐτῆς στήν $\Psi(x,t)$ δέν εἶναι ἀπαραίτητος)

(iii) Ἡ $\Psi(x,t)$ ὡς καί ἡ παράγωγός της $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ νά εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις ἐκτός βεβαίως ἐκεῖ ὅπου τό δυναμικό $V(x) \to \infty$

(iv) Τό ολοκλήρωμα τῆς $|\Psi(x,t)|^2$ ως πρός όλο τόν χώρο τοῦ ενδιαφέροντός μας, δηλ. τό ολοκλήρωμα

$$\int_x dx\,|\Psi(x,t)|^2$$ πρέπει νά είναι χρονικώς ανεξάρτητο.

Οἱ συναρτήσεις οἱ οποίες συνήθως αφοροῦν τά φυσικά προβλήματα "δέσμης" είναι τῆς μορφῆς

$$\Psi_n(x,t) = \psi_n(x)\,e^{iE_n t/\hbar} \qquad (20)$$

τότε

$$\Psi_n^*(x,t)\Psi_n(x,t) = \psi_n^*(x)\,\psi_n(x) = |\psi_n(x)|^2$$

καί όπου ή E_n ιδιοτιμή τῆς $H\psi_n = E_n\psi_n$. Ἡ (20) όπως θά δοῦμε ικανοποιεῖ τήν χρονικῶς εξαρτημένη εξίσωση Schrödinger, εξ. (17).

Ἄς μελετήσουμε τώρα τήν συνάρτηση τοῦ φρέατος, έχουμε

$$\psi_n(x) = B\sin\frac{N\pi}{L}x$$

Σύμφωνα μέ τήν συνθήκη (i), σελ. 13, θά έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, B^*\sin^*\frac{N\pi}{L}x\; B\sin\frac{N\pi}{L}x = 1$$

ή $$|B|^2\int_0^L dx\,\sin^2\frac{N\pi}{L}x = 1 \Rightarrow |B|^2 = B^*B = \frac{2}{L}$$

ή $$|B| = \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \quad \text{καί} \quad B = |B|e^{i\gamma}$$ όπου $e^{i\gamma}$

παράγων φάσεως. Καταλαβαίνουμε ότι οι κανονικοποιήσεις μας ἐπηρεάζει τόν προσδιορισμό τοῦ μέτρου τῆς ποσότητος Β, |B| καί ὄχι τό πλῆρες μέγεθος Β. Ἡ φάσις εἶναι μόνη ἀπροσδιόριστος. Δίχως βλάβη τῆς γενικότητος θέτουμε

$$e^{i\alpha}=1 \Rightarrow \alpha = 2k\pi \qquad k=0,\pm1,\pm2\cdots$$

ἄρα

$$\begin{cases} \psi_N(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{N\pi}{L}x \\ E_N = E_1 N^2 \end{cases} \qquad N=1,2,3,\ldots \qquad (21)$$

Παρατηροῦμε ὅτι οἱ «διαστάσεις» τῆς $\psi_N(x)$ εἶναι $(\text{μῆκος})^{-1/2}$.

<u>Γενική</u> ἰδιότης τῶν ἰδιοσυναρτήσεων τῶν ὁποίων καί θά συζητήσουμε ἀργότερα εἶναι ἡ ὀρθογωνικότης. Ἰσχύει δηλ. στήν προκειμένη περίπτωση ἡ σχέσις

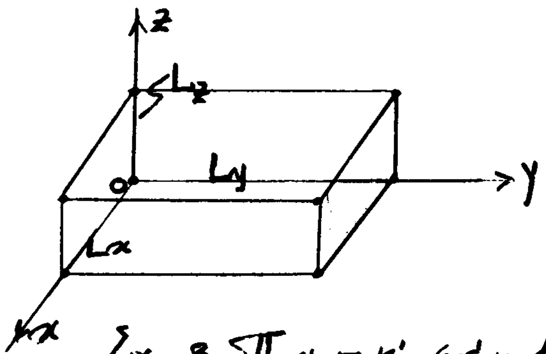
$$\int_0^L dx \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{N\pi}{L}x\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{M\pi}{L}x = \delta_{NM}$$

ἤ γενικώτερα

$$\int_X dx\, \psi_i^*(x)\,\psi_j(x) = \delta_{ij} \qquad (22)$$

ὅπου $\delta_{ij}=0$ ἐάν $i\neq j$ καί $\delta_{ij}=1$ ἐάν $i=j$.

Σωματίδιο εντός πρισματικού φρέατος δυναμικού απείρων τοιχωμάτων – Ἐγκλωβισμός.



Σχ. 3. Πρισματικό φρέαρ δυναμικού απείρων (ἐνεργειακών) τοιχωμάτων.

Ἐξίσωσις Schrödinger (χρονικώς ἀνεξάρτητος)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec r) + V(\vec r)\psi(\vec r) = E\psi(\vec r) \qquad (23)$$

Τὸ δυναμικό $V(\vec r) = V(x,y,z)$ παίρνομε ὅπως καὶ προηγουμένως, εἰς ἐνθέσεις $V = V_0 = \mu\eta\delta\acute{\epsilon}\nu$ (ἢ σταθερό) ἐντὸς τοῦ πρίσματος καὶ $V = \infty$ ἐκτός, δηλ. τὸ σωματίδιο δὲν μπορεῖ νὰ διαπεράση τὰ τοιχώματα, ὅπερ μας ἐνδιαφέρει ὁ χῶρος $0 \leq x \leq L_x$, $0 \leq y \leq L_y$, $0 \leq z \leq L_z$ μὲ ἐξίσωσις ἐντὸς

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec r) = E\psi(\vec r) \qquad (23\alpha)$$

ὅπου $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ τελεστὴς Laplace.

Γράφουμε ἐπ' εὐθείας τὴν λύση:

$$\psi_{N_xN_yN_z}(\vec r) = \left(\frac{2}{L_x}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{L_y}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{L_z}\right)^{1/2}\times$$

$$\times \sin\frac{N_x\pi}{L_x}x \, \sin\frac{N_y\pi}{L_y}y \, \sin\frac{N_z\pi}{L_z}z \qquad (24)$$

καί

$$E=E(N_xN_yN_z)=\frac{h^2}{8m}\left(\frac{N_x^2}{L_x^2}+\frac{N_y^2}{L_y^2}+\frac{N_z^2}{L_z^2}\right) \qquad (25)$$

Οἱ (24) καί (25) ἀποτελοῦν τίς ἰδιοσυναρτήσεις καί ἰδιοτιμές τοῦ προβλήματος ἀντιστοίχως.

$N_x, N_y, N_z = 1, 2, 3, \ldots$ ἀνεξαρτήτως ὁ ἕνας ἀπό τόν ἄλλο.

(Γράψαμε τήν ἰδιοσυνάρτηση (24) κατευθείαν βασιζόμενοι στό ἑξῆς θεώρημα: "Ἐάν ἡ Χαμιλτωνιανή συστήματος $\hat H$ εἶναι ἄθροισμα ἐπί μέρους Χαμιλτωνιανῶν π.χ. $\hat H(1)$ καί $\hat H(2)$, ἡ ἰδιοσυνάρτησις ψ τῆς $\hat H$ εἶναι γινόμενο τῶν $\psi(1)$ καί $\psi(2)$ ὅπου

$$\hat H(1)\psi(1) = \lambda_1\psi(1)$$
$$\hat H(2)\psi(2) = \lambda_2\psi(2)$$

οἱ δέ ἰδιοτιμές εἶναι τό ἄθροισμα τῶν $\lambda_1 + \lambda_2$.

Ἀπόδειξις:

$$\hat H\left(\psi(1)\psi(2)\right) = \left(\hat H(1) + \hat H(2)\right)\psi(1)\psi(2)$$

$$= \psi(2)\hat H(1)\psi(1) + \psi(1)\hat H(2)\psi(2)$$

$$= \psi(2)\lambda_1\psi(1) + \psi(1)\lambda_2\psi(2) = (\lambda_1+\lambda_2)\psi(1)\psi(2)$$)

Στήν συνάρτηση (24) ὑπάρχουν N_x-1, N_y-1, καί N_z-1

κομβικά σημεῖα κατά μῆκος τῶν ἀξόνων x, y καί z ἀντιστοίχως. Ἐάν τώρα $L_x = L_y = L_z = L$, δηλ. τό δοχεῖο εἶναι κύβος ἀκμῆς L, τότε ἡ (25) γράφεται

$$E(N_x N_y N_z) = \frac{h^2}{8mL^2}\left(N_x^2 + N_y^2 + N_z^2\right)$$

καί ἐπειδή $V = L^3 \Rightarrow L^2 = V^{2/3}$ τελικῶς

$$E(N_x N_y N_z) = \frac{h^2}{8mV^{2/3}}\left(N_x^2 + N_y^2 + N_z^2\right) \qquad (26)$$

Ἡ θεμελιώδης ἐνέργεια τοῦ συστήματος εἶναι προφανῶς ἡ E(111) καί εἶναι μοναδική

$$E(111) = \frac{3h^2}{8mV^{2/3}}$$

Στήν E(111) ἀντιστοιχεῖ μία καί μόνον Ψ ἡ Ψ_{111}. Ἡ πρώτη διηγερμένη κατάσταση ἐπιτυγχάνεται ἐάν ἕνας (ὁποιοσδήποτε) ἀπό τούς κβαντικούς ἀριθμούς αὐξηθεῖ κατά μονάδα, π.χ. ὁ N_x:

$$E(211) = \frac{6h^2}{8mV^{2/3}}$$

μέ ἀντίστοιχη συνάρτηση τήν

$$\Psi_{211}(\bar{r}) = \left(\frac{2}{L}\right)^{3/2} \sin\frac{2\pi}{L}x \, \sin\frac{\pi}{L}y \, \sin\frac{\pi}{L}z$$

Ὅμως ἡ ἴδια ἐνέργεια ἐπιτυγχάνεται ὅταν ἀντί τῆς σειρᾶς 211 τῶν κβαντικῶν ἀριθμῶν, ἡ σειρά εἶναι 121 ἤ 112:

$$E_{211} = E_{121} = E_{112} = E$$

Οἱ ἀντίστοιχες ὅμως συναρτήσεις εἶναι διαφορετικές.

Οἱ συναρτήσεις $\psi_{211}(\vec{r})$, $\psi_{121}(\vec{r})$ καί $\psi_{112}(\vec{r})$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητες. Τό γεγονός ὅτι στήν αὐτή ἰδιοτιμή E ἀντιστοιχοῦν περισσότερες τῆς μιᾶς γραμμικῶς ἀνεξάρτητες συναρτήσεις ὀνομάζεται ἐκφυλισμός, προσδιορίζεται δέ ἀπό τήν συμμετρία τοῦ προβλήματος. Καλοῦμε βαθμό ἐκφυλισμοῦ g τόν ἀριθμό τῶν ἀνεξαρτήτων συναρτήσεων ψ οἱ ὁποῖες ἀντιστοιχοῦν στήν αὐτή ἰδιοτιμή. $g=1$ σημαίνει ὅτι δέν ὑπάρχει ἐκφυλισμός, ἤ ὅτι ὑπάρχει ἕνα πρός ἕνα ἀντιστοιχία μεταξύ συναρτήσεων καί τιμῶν ἐνεργείας. Ἐκφραζόμεθα ἀναλυτικότερα ἐάν γράψουμε

$$\hat{H}\psi_{ij} = E_i\psi_{ij}, \quad j = 1, 2 \ldots g \qquad (27)$$

Οἱ συναρτήσεις $\psi_{i1}, \psi_{i2}, \psi_{i3}, \ldots \psi_{ig}$ ἔχουν ὅλες τήν αὐτή ἰδιοτιμή E_i, εἶναι δέ γραμμικῶς ἀνεξάρτητες. Ὁ πίνακας πού ἀκολουθεῖ παρουσιάζει τόν βαθμό ἐκφυλισμοῦ γιά ὡρισμένους κβαντικούς ἀριθμούς τοῦ κυβικοῦ φρέατος δυναμικοῦ.

Καταστάσεις (N_x, N_y, N_z)	Ἐνέργεια (σέ μονάδες $h^2/8mL^2$)	Ἐκφυλισμός (g)
1 1 1	3	1
2 1 1		
1 2 1	6	3
1 1 2		
1 2 2		
2 1 2	9	3
2 2 1		
3 1 1	11	
1 3 1	11	3
1 1 3	11	

2	2	2	12	1
1	2	3		
1	3	2		
2	1	3		
3	1	2	14	6
2	3	1		
3	2	1		
⋮			⋮	⋮

Ὅπως ἤδη ἀναφέρθη ἡ πηγή τοῦ ἐκφυλισμοῦ εἶναι κάποια συμμετρία φανερή, δηλ. προφανής ἢ ὄχι. Ἐκφυλισμός ὁ ὁποῖος δέν προέρχεται ἀπό συμμετρία εἶναι ἁπλῶς συμπτωματικός (τυχαῖος) καί δέν θεωρεῖται ἐκφυλισμός. Στήν προκειμένη περίπτωση ἐάν $L_x \neq L_y \neq L_z$ δέν ἔχουμε ἐκφυλισμό, εἶναι δυνατόν ὅμως νά ἐπιλεγοῦν ἔτσι οἱ παράμετροι L_x, L_y, L_z (πάντα διάφοροι βέβαια) αὐτῶς ὥστε γιά δεδομένη ἐνέργεια E (δηλ. γιά δεδομένη τριάδα N_x, N_y, N_z) νά ἔχουμε δύο ἢ περισσότερες, ἀνεξάρτητες μεταξύ τους, συναρτήσεις Ψ. Τό φαινόμενο καλεῖται "τυχαῖος" ἐκφυλισμός.