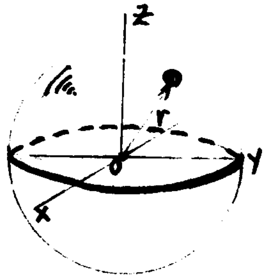
Σωματίδιο κινούμενο ἐπὶ σφαιρικοῦ δυναμικοῦ σταθερᾶς ἀκτῖνος



Σχ. 4. Κίνησις ἐπὶ σταθεροῦ σφαιρικοῦ δυναμικοῦ

$r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ = σταθερά, $\mathcal{V}$ = σταθερό. Ἡ Χαμιλτωνιανὴ τοῦ συστήματος θὰ εἶναι σύμφωνα μὲ τὰ γνωστά

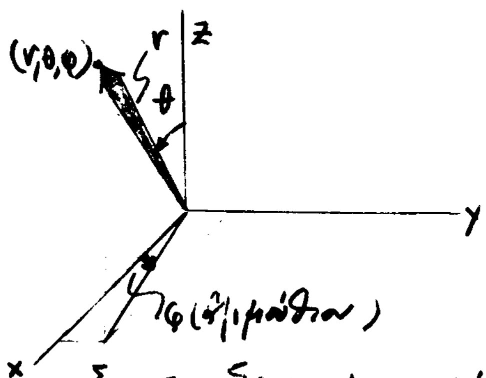
$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \cancel{\mathcal{V}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \qquad (24)$$

καὶ ἡ ἀντίστοιχος ἐξίσωσις Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \qquad (25)$$

Οἱ λύσεις $\psi(\vec{r})$ περιμένουμε νὰ μοιάζουν ἀρκετὰ μὲ τὶς λύσεις τοῦ προηγουμένου προβλήματος τῆς κινήσεως σωματιδίου ἐπὶ κυκλικοῦ δυναμικοῦ. Ἡ σφαῖρα μπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ σειρὰ παραλλήλων κύκλων (καθέτων τοῦ z) μεταβαλλομένης ἀκτῖνος καὶ ἡ κίνησις ἐπὶ τῆς σφαίρας κίνησις ἐπὶ κύκλων ἀλλὰ μεταβλητῆς ἀκτῖνος ἀπὸ $r = r_{max}$ ἕως $r = r_{min} = 0$. Πράγματι αἱ λύσεις τῆς (25) ἐμπεριέχουν τὶς λύσεις τοῦ κυκλικοῦ δυναμικοῦ.
Κατ' ἀρχὰς πρέπει νὰ ἀλλάξουμε σύστημα συντεταγμένων

Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας του προβλήματος οι Καρτεσιανές συντεταγμένες δεν προσφέρονται για τη λύση της (25). Επιλέγουμε λοιπόν τις "σφαιρικές πολικές" συντεταγμένες με τη βοήθεια του Σχήματος 5.



Σχ. 5. Σφαιρικές πολικές συντεταγμένες

Καρτεσιανές συντεταγμένες : $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$

Σφαιρικές πολικές : $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$

Μεταξύ τους σχέσεις :

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Στοιχείο όγκου, $dx\,dy\,dz = r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = r^2 dr\, d\Omega$

όπου $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ στοιχείο στερεάς γωνίας (27)

Χρησιμοποιώντας τίς γνωστές σχέσεις μετατροπής καρτεσιανών συντεταγμένων σέ πολικές σφαιρικές (ή ὁποιοδήποτε ἄλλο σύστημα) π.χ.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} \quad \text{κ.τ.λ. παίρνουμε}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) r + \frac{1}{r^2}\hat{\Lambda}^2(\theta,\varphi) \qquad (28)$$

ὅπου

$$\hat{\Lambda}^2 = \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} \qquad (29)$$

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ τελεστής $\hat{\Lambda}$ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπό τίς γωνίες θ καί φ. Στήν προκαθορισμένη περίπτωση $r=$σταθ., ἄρα $\partial/\partial r = 0$ καί

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\hat{\Lambda}^2(\theta,\varphi) \qquad (28a)$$

Ἄρα

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 = -\frac{\hbar^2}{2mr^2}\hat{\Lambda}^2(\theta,\varphi) \qquad (30)$$

ἤ

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2I}\hat{\Lambda}^2(\theta,\varphi) \qquad (30a)$$

ὅπου $I = mr^2$ ἡ ροπή ἀδρανείας τοῦ συστήματος. Ἡ ἐξ. (25) γράφεται

$$-\frac{\hbar^2}{2I}\hat{\Lambda}^2\psi = E\psi$$

ἤ

$$\hat{\Lambda}^2\psi = \left(-\frac{2EI}{\hbar^2}\right)\psi \qquad (31)$$

Ἡ (31) εἶναι καί ἡ πρός λύσιν ἐξίσωσις Schrödinger, ὅπου $\psi = \psi(\theta,\varphi)$. Ἀποδεικνύεται εὔκολα ὅτι ἡ $\psi(\theta,\varphi)$ μπορεῖ νά γραφῆ ὡς γινόμενο δύο συναρτήσεων :

$$\Psi(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi) \qquad (32)$$

Ἡ ὡς πρὸς $\Phi(\varphi)$ διαφορικὴ ἐξίσωση εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἴδια μὲ τὴν διαφορικὴ ἐξίσωση σωματιδίου σὲ κυκλικὸ δυναμικό, ἄρα γνωρίζουμε τὶς συναρτήσεις $\Phi(\varphi)$, εἶναι οἱ (21). Οἱ λύσεις τῆς ὡς πρὸς $\Theta(\theta)$ διαφορικῆς ἐξισώσεως εἶναι πολὺ πιὸ δύσκολες, πρὸς στιγμὴν θὰ θεωρήσουμε τὶς λύσεις αὐτὲς εὑρεθείσες. Τὸ γινόμενο $\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$, δηλ. ἡ συνάρτησις $\Psi(\theta,\varphi)$ ὀνομάζεται καὶ σφαιρικὲς ἁρμονικὲς καὶ συμβολίζεται μὲ τὸ γράμμα Y:

$$Y_{lm_l}(\theta,\varphi) = \text{σφαιρικὲς ἁρμονικὲς}$$

Ὁ κβαντικὸς ἀριθμὸς m_l προκύπτει ἀπὸ τὴν κατὰ $\Phi(\varphi)$ διαφορικὴ ἐξίσωση, ὁ δὲ κβαντικὸς ἀριθμὸς l προκύπτει ἀπὸ τὴν ὡς πρὸς $\Theta(\theta)$ διαφορικὴ ἐξίσωση. Ἀποδεικνύεται ὅτι οἱ ἰδιοτιμὲς τοῦ τελεστοῦ $\hat{\Lambda}^2$ εἶναι

$$\hat{\Lambda}^2\Psi(\theta,\varphi) = \hat{\Lambda}^2 Y_{lm_l}(\theta,\varphi) = -l(l+1)Y_{lm_l}(\theta,\varphi)$$

ἤ

$$\hat{\Lambda}^2 Y_{lm_l}(\theta,\varphi) = -l(l+1)Y_{lm_l}(\theta,\varphi) \qquad (33)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωση (33) εἶναι φανερὸ ὅτι ἡ ποσότης $l(l+1)$ εἶναι καθαρὸς ἀριθμός, δηλ. ὁ l εἶναι καθαρὸς ἀριθμός. Θὰ ἐπανέλθουμε στὸ l. Σύγκρισις τώρα τῆς (33) μὲ τὴν (31) μᾶς δίνει

$$-l(l+1) = -\frac{2EI}{\hbar^2} \quad ἢ$$

$$E_l = \frac{\hbar^2}{2I}l(l+1) \qquad (34)$$

Ἡ ποσότης $\hbar^2 l(l+1)$ εἶναι τό μέγεθος τοῦ τετραγώνου τῆς στροφορμῆς, J^2. (ὅπως θυμηθοῦμε ὅτι ἡ ποσότης $(m_l \hbar)^2$ παριστᾶ τό μέγεθος τοῦ τετραγώνου τῆς z συνιστώσης τῆς στροφορμῆς)

Ἄς γυρίσουμε τώρα πίσω εἰς συναρτήσεις $Y_{lm_l}(\theta,\varphi)$ οἱ ὁποῖες ὅπως ἤδη ἀναφέραμε εἶναι γινόμενο δύο συναρτήσεων, συγκεκριμένα:

$$Y_{lm_l}(\theta,\varphi) = \Theta_{lm_l}(\theta)\Phi_{m_l}(\varphi) \qquad (35)$$

Ἔχουμε:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{m_l}(\varphi) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\, e^{im_l\varphi} \\ \text{καί}\quad \Theta_{lm_l}(\theta) &= \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m_l|)!}{2(l+|m_l|)!}}\, P_l^{|m_l|}(\cos\theta) \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

Γνωρίζουμε ἤδη ὅτι ὁ m_l παίρνει τιμές $0, \pm1, \pm2 \ldots$ Ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ κβαντικός ἀριθμός l παίρνει ἀκέραιες μή ἀρνητικές τιμές, δηλ. $l = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Λόγω τῆς συζεύξεως τῶν ἀριθμῶν l καί m_l μέσω τῆς συναρτήσεως $\Theta(\theta)$ ὁ m_l περιορίζεται ἀπό τόν ἀριθμό l, ἐξακολουθεῖ καί παίρνει τίς τιμές $0, \pm1, \pm2, \ldots$ ἀλλά ἔχει ἄνω καί κάτω ὅρια τούς ἀριθμούς $+l$ καί $-l$ ἀντιστοίχως. Αὐτός εἶναι καί ὁ λόγος πού ἐξ ἀρχῆς ὁ κβαντικός ἀριθμός "m" συμβολίστηκε ὡς m_l. Ἄρα

$$\left.\begin{aligned} l &= 0, 1, 2, 3 \ldots \\ m_l &= -l, -l+1, -l+2, \ldots +l \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

ἤ ὅτι ὁ m_l παίρνει $2l+1$ τιμές.

Οἱ συναρτήσεις $P_\ell^{|m_\ell|}$ ὀνομάζονται καί "προσηρτημένες συναρτήσεις κατά Legendre". Ὁ παράγων $\left\{\dfrac{(2\ell+1)(\ell-|m_\ell|)!}{2(\ell+|m_\ell|)!}\right\}^{1/2}$ εἶναι ἁπλῶς παράγων κανονικοποιήσεως τῶν συναρτήσεων $\Theta_{\ell m_\ell}(\theta)$ ἀκριβῶς ὅπως ὁ παράγων $1/\sqrt{2\pi}$ εἶναι παράγων κανονικοποιήσεως τῶν συναρτήσεων $\Phi_{m_\ell}(\varphi)$, οὕτως ὥστε οἱ συναρτήσεις $Y_{\ell m_\ell}(\theta,\varphi)$ δηλ. τό γινόμενο τῶν Θ καί Φ νά εἶναι κανονικοποιημένες.

Γιά τήν ἔκφραση τῆς ἐνεργείας (34) παρατηροῦμε τά ἑξῆς:

- $E_0 = 0$, δηλ. δέν ὑπάρχει ἐνέργεια μηδενός
- Ἡ E_ℓ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ κβαντικοῦ ἀριθμοῦ m_ℓ (ἀποτέλεσμα τῆς ἰσοτροπίας τοῦ χώρου)
- Ὑπάρχει ἐκφυλισμός βαθμοῦ $g = 2\ell+1$.
- Κλασσικῶς ἡ ἐνέργεια τοῦ συστήματος δίνεται ἀπό τήν σχέση

$$E = \frac{J^2}{2I} \longleftrightarrow \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2I}$$

Ἡ ἀντιστοιχία εἶναι σαφής, ὅπως ἤδη ἔχουμε πεῖ ὅτι

$$J^2 \left(= |\vec{J}|^2\right) = \ell(\ell+1)\hbar^2$$

ἤ ὅτι τό μέγεθος τῆς στροφορμῆς στό κβαντικό σύστημα εἶναι

$$J_\ell = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar \qquad (38)$$

Θά <u>δείξουμε</u> ἀργότερα ὅτι ἡ ἰδιοτιμή $\ell(\ell+1)\hbar^2$ εἶναι τό μέγεθος τῆς στροφορμῆς τοῦ συστήματος, δηλ. ὅτι ὁ τελεστής $\Lambda^2(\theta,\varphi)$ εἶναι οὐσιαστικῶς ὁ τελεστής τοῦ τετραγώνου τῆς στροφορμῆς, ἀκριβῶς ὅπως ἡ $m\hbar$ εἶναι ἡ ἰδιοτιμή τῆς προβολῆς κατά μῆκος τοῦ ἄξονος τοῦ z (αὐθαιρέτως)

τῆς στροφορμῆς $\vec{J}$.
Ἡ πλήρης ἔκφρασις τῶν $Y_{\ell m_\ell}(\theta,\varphi)$ (τῶν $P_\ell^{|m_\ell|}(\cos\theta)$ συμπεριλαμβανομένων βέβαια) εἶναι

$$Y_{\ell m_\ell}(\theta,\varphi) = \frac{(-1)^{\ell+m_\ell}}{(2\ell)!!}\left\{\frac{(2\ell+1)(\ell-m_\ell)!}{4\pi(\ell+m_\ell)!}\right\}^{1/2}(\sin\theta)^{m_\ell}\times$$
$$\times\frac{d^{\ell+m_\ell}}{d(\cos\theta)^{\ell+m_\ell}}(\sin\theta)^{2\ell}e^{im_\ell\varphi} \qquad (39)$$

Ὁ παράγων $(-1)^{\ell+m_\ell}$ εἶναι παράγων φάσεως καί τό $(2\ell)!!$ σημαίνει $(2\ell)!! \equiv 2\cdot4\cdot6\cdot8\cdots(2\ell)$. $\ell=0,1,2,3,\ldots$ καί $m_\ell=0,\pm1,\pm2,\ldots\pm\ell$. Οἱ σφαιρικές ἁρμονικές (39) εἶναι κανονικοποιημένες καί ὀρθογώνιες· κανονικοποιημένες διότι τίς κανονικοποιήσαμε καί ὀρθογώνιες λόγω γενικοτέρων ἰδιοτήτων τῶν ἀντιστοίχων τελεστῶν ὅπως θά δοῦμε. Γράφουμε λοιπόν

$$\int_\Omega d\Omega\, Y^*_{\ell m_\ell}(\theta,\varphi)\,Y_{\ell' m_\ell'}(\theta,\varphi) = \delta_{\ell\ell'}\,\delta_{m_\ell m_\ell'}$$

Ἡ ὁλοκλήρωσις $\int_\Omega d\Omega$ σημαίνει ὁλοκλήρωσιν στήν στερεά γωνία, δηλ.

$$\int_\Omega d\Omega \to \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\,\sin\theta \qquad (40)$$

Ὁρισμένες ἀπό τίς ἰδιότητες τῶν σφαιρικῶν ἁρμονικῶν εἶναι:

$$Y^{*}_{lm_l}(\theta,\varphi) = (-1)^{m_l}\, Y_{l-m_l} \qquad (41\alpha)$$

Ἀντικατάστασις τοῦ $\vec{r}$ μέ $-\vec{r}$ ἢ σέ σφαιρικές πολικές συντεταγμένες $r \to r$, $\theta \to \pi-\theta$, $\varphi \to \varphi+\pi$ παρέχει

$$Y_{lm_l}(\pi-\theta, \pi+\varphi) = (-1)^{l}\, Y_{lm_l}(\theta,\varphi) \qquad (41\beta)$$

Ἐπειδή αἱ $Y_{lm_l}(\theta,\varphi)$ ἀποτελοῦν "πλῆρες σύνολον συναρτήσεων" τυχοῦσα συνάρτησις $f(\theta,\varphi)$ μπορεῖ νά ἐκφρασθεῖ ὡς σειρά σφαιρικῶν ἁρμονικῶν (περί "πλήρους συνόλου" ἀργότερον)

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} c_{lm_l}\, Y_{lm_l}(\theta,\varphi) \qquad (41\gamma)$$

καί βέβαια

$$c_{lm_l} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, Y^{*}_{lm_l}(\theta,\varphi) f(\theta,\varphi) \qquad (41\delta)$$

Ἀντικαθιστῶντας τήν (41δ) στήν (41γ) παίρνουμε:

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m_l=-l}^{+l} Y_{lm_l}(\theta,\varphi) \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} \sin\theta'\, d\theta'\, Y^{*}_{lm_l}(\theta',\varphi') f(\theta',\varphi')$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta',\varphi') \left(\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m_l=-l}^{+l} Y^{*}_{lm_l}(\theta',\varphi')\, Y_{lm_l}(\theta,\varphi) \sin\theta' \right) d\theta'\, d\varphi'$$

Ἄρα

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m_l=-l}^{+l} Y^{*}_{lm_l}(\theta',\varphi')\, Y_{lm_l}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sin\theta}\, \delta(\theta-\theta')\, \delta(\varphi-\varphi') \qquad (41\varepsilon)$$

ὅπου $\delta(\theta-\theta')$, $\delta(\varphi-\varphi')$ συναρτήσεις «δ» Dirac.

"Ας εξετάσουμε γιά μερικές τιμές των l, m_l την γενική σχέση (39)

$l=0,\ m_l=0 \Rightarrow \underline{\underline{Y_{00}}} = 1/\sqrt{4\pi}$

$l=1,\ m_l=0.$

$$Y_{10}(\theta,\varphi) = \frac{(-1)^{1+0}}{(2)!!}\left\{\frac{(2\cdot1+1)(1-0)!}{4\pi(1+0)!}\right\}^{1/2}(\sin\theta)^0$$

$$\times\frac{d}{(d\cos\theta)}(\sin\theta)^{2\cdot1}e^{i\cdot0\cdot\varphi} \quad \text{ή}$$

$$Y_{10}(\theta,\varphi) = -\,{}^1\!/_2\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/2}(-2\cos\theta) \quad \text{ή}$$

$$\underline{Y_{10}(\theta,\varphi)} = +\,{}^1\!/_2\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta$$

$l=1,\ m_l=1.$

$$Y_{11} = \frac{(-1)^{1+1}}{(2\cdot1)!!}\left\{\frac{3\cdot(1-1)!}{4\pi(1+1)!}\right\}^{1/2}(\sin\theta)^{+1}\frac{d^2}{(d\cos\theta)^2}(\sin\theta)^2e^{+i\varphi}$$

$$= \frac{1}{2!}\left(\frac{3}{4\cdot2\pi}\right)^{1/2}\sin\theta\frac{d^2}{(d\cos\theta)^2}(1-\cos^2\theta)e^{i\varphi}$$

$$= {}^1\!/_2\cdot{}^1\!/_2\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta\,(-2)\,e^{i\varphi} \quad \text{ή}$$

$$\underline{Y_{11}} = -\,{}^1\!/_2\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta\, e^{i\varphi}$$

$l=1,\ m_l=-1.$

$$Y_{1-1}(\theta,\varphi) = \frac{(-1)^{1-1}}{(2\cdot1)!!}\left\{\frac{(2\cdot1+1)(1+1)!}{4\pi(1-1)!}\right\}^{1/2}(\sin\theta)^{-1}\times$$

$$\times \frac{d^{1-1}}{(d\cos\theta)^{1-1}} (\sin\theta)^2 e^{-i\varphi}$$
$$= +\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin\theta\, e^{-i\varphi} \quad \tilde{\ell}$$

$$\underline{\underline{Y_{1-1}(\theta,\varphi)}} = +\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin\theta\, e^{-i\varphi}$$

$\ell = 2,\ m_\ell = 0.$

$$Y_{20}(\theta,\varphi) = \frac{(-1)^{2+0}}{(2\cdot 2)!!}\left\{\frac{(2\cdot 2+1)(2-0)!}{4\pi\ (2+0)!}\right\}^{1/2} (\sin\theta)^0 \times$$
$$\times \frac{d^2}{(d\cos\theta)^2} (\sin\theta)^4 e^{i\times 0\varphi}$$
$$= \frac{1}{2\cdot 4}\left(\frac{5\cdot 2}{4\pi\cdot 2}\right)^{1/2} \times 4(3\cos^2\theta - 1) \quad \tilde{n}$$

$$\underline{\underline{Y_{20}(\theta,\varphi)}} = +\frac{1}{4}\left(\frac{5}{\pi}\right)^{1/2}(3\cos^2\theta - 1)$$

$\ell = 2,\ m_\ell = 1.$

$$Y_{21}(\theta,\varphi) = \frac{(-1)^{2+1}}{2\cdot 4}\left\{\frac{(2\cdot 2+1)(2-1)!}{4\pi\,(2+1)!}\right\}^{1/2} (\sin\theta)^1 \times$$
$$\times \frac{d^3}{(d\cos\theta)^3} (1+\cos^4\theta - 2\cos^2\theta)\, e^{i\varphi}$$
$$= \frac{-1}{2\cdot 4}\left(\frac{5\times 0!}{4\pi\times 1\cdot 2\cdot 3}\right)^{1/2} \sin\theta \times 24 \cos\theta\, e^{i\varphi}$$
$$= -\tfrac{1}{2}\left(\frac{5}{6\pi}\right)^{1/2} 3 \sin\theta \cos\theta\, e^{i\varphi} \quad \tilde{n}$$

$$\underline{\underline{Y_{21}(\theta,\varphi)}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{15}{2\pi}\right)^{1/2} \sin\theta\cos\theta\, e^{i\varphi}$$

$\ell = 2,\ m_\ell = 2.$

$$Y_{22}(\theta\varphi) = \frac{(-1)^{2+2}}{2\times4}\left\{\frac{(2\times2+1)(2-2)!}{4\pi\,(2+2)!}\right\}^{1/2}\sin^2\theta \times$$

$$\times\frac{d^4}{(d\cos\theta)^4}(\sin\theta)^4 e^{i2\varphi}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{5}{4\pi\cdot1\times2\times3\times4}\right)^{1/2}\sin^2\theta\ 24\ e^{2i\varphi}$$

$$= \left(\frac{5\times9}{4\pi\times2\times3\times4}\right)^{1/2}\sin^2\theta\, e^{i2\varphi} \qquad \tilde{n}$$

$$\underline{\underline{Y_{22}(\theta,\varphi)}} = \frac{1}{4}\left(\frac{15}{2\pi}\right)^{1/2}\sin^2\theta\, e^{i2\varphi}$$

$l=2,\ m_l=-1.$

$$Y_{2-1}(\theta,\varphi) = \frac{(-1)^{2-1}}{2\cdot4}\left\{\frac{(2\cdot2+1)(2+1)!}{4\pi(2-1)!}\right\}^{1/2}(\sin\theta)^{-1}\times$$

$$\times\frac{d^{2-1}}{(d\cos\theta)^{2-1}}(\sin\theta)^4 e^{-i\varphi}$$

$$= \frac{-1}{2\cdot4}\left(\frac{5\times1\cdot2\cdot3}{4\pi\times0!}\right)^{1/2}\frac{1}{\sin\theta}4\cos\theta(\cos^2\theta-1)e^{-i\varphi}$$

$$= \frac{1}{2\cdot4}\left(\frac{5\times3}{2\pi}\right)^{1/2}\cos\theta\sin\theta\, e^{-i\varphi} \qquad \tilde{n}$$

$$\underline{\underline{Y_{2-1}(\theta,\varphi)}} = +\frac{1}{2}\left(\frac{15}{2\pi}\right)^{1/2}\sin\theta\cos\theta\, e^{-i\varphi}$$

$l=2,\ m_l=-2$

$$Y_{2-2}(\theta,\varphi) = \frac{(-1)^{2-2}}{2\cdot4}\left\{\frac{(2\times2+1)(2+2)!}{4\pi\,(2-2)!}\right\}^{1/2}\sin^{-2}\theta\ \times$$

$$\times\frac{d^{2-2}}{(d\cos\theta)^{2-2}}\sin^4\theta\ e^{-i2\varphi} \qquad \tilde{n}$$

$$\underline{\underline{Y_{2-2}(\theta,\varphi)}} = +\frac{1}{4}\left(\frac{15}{2\pi}\right)^{1/2}\sin^2\theta\, e^{-i2\varphi}$$

Ο κάτωθι πίνακας δίνει τις σφαιρικές αρμονικές για $l=0,1,2$ και 3.

Πίνακας Σφαιρικών Αρμονικών

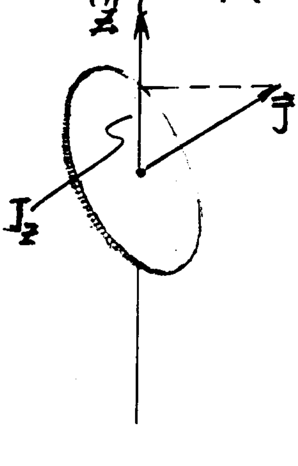
l	m_l	$Y_{lm_l}(\theta,\varphi)$
0	0	$1/\sqrt{4\pi}$
1	0	$1/2\,(3/\pi)^{1/2}\cos\theta$
	±1	$\mp 1/2\,(3/2\pi)^{1/2}\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}$
2	0	$1/4\,(5/\pi)^{1/2}(3\cos^2\theta-1)$
	±1	$\mp 1/2\,(15/2\pi)^{1/2}\cos\theta\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}$
	±2	$1/4\,(15/2\pi)^{1/2}\sin^2\theta\, e^{\pm 2i\varphi}$
3	0	$1/4\,(7/\pi)^{1/2}(2-5\sin^2\theta)\cos\theta$
	±1	$\mp 1/8\,(21/\pi)^{1/2}(5\cos^2\theta-1)\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}$
	±2	$1/4\,(105/2\pi)^{1/2}(\cos\theta-\sin^2\theta)\, e^{\pm 2i\varphi}$
	±3	$\mp 1/3\,(35/\pi)^{1/2}\sin^3\theta\, e^{\pm 3i\varphi}$

Λύσαμε, στά προηγούμενα κεφάλαια τό πρόβλημα της κινήσεως σωματιδίου σέ κυκλικό φρέαρ δυναμικού. Τό σωματίδιο κινεῖται στό ἐπίπεδο, π.χ. xy (ἤ $z=0$) καί ἡ στροφορμή του καθορίζεται πλήρως ἀπό τόν κβαντικό ἀριθμό m_ℓ. Μέ τήν λέξη "πλήρως" ἐννοοῦμε ὅτι καθορίζεται τό μέγεθος της στροφορμής $m_\ell \hbar$, ἀλλά καί ἡ διεύθυνση ἡ ὁποία εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο xy. Τώρα στίς τρεῖς διαστάσεις τό διάνυσμα της στροφορμής δέν εἶναι περιορισμένο σέ κανένα ἄξονα διότι δέν ὑπάρχει λόγος νά εἶναι. Μποροῦμε ὅμως νά μιλᾶμε γιά τό μέγεθος της στροφορμής καθώς καί τό μέγεθος μιᾶς συνιστώσας ἔστω της z. Ἐπί παραδείγματι γιά $\ell=2$ ἔχουμε ὅτι $m_\ell = 0, \pm1, \pm2$. Τό μέγεθος της στροφορμής εἶναι σαφῶς καθορισμένο, στήν προκειμένη περίπτωση

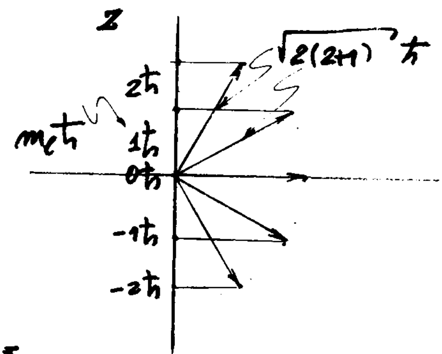
$$|\vec{J}| = \sqrt{\ell(\ell+1)\hbar^2} = \hbar\sqrt{6} \quad \text{ἤ}$$

$$|\vec{J}| = \left(J_x^2+J_y^2+J_z^2\right)^{1/2} = \hbar\sqrt{6}$$

Ἡ J_z συνιστῶσα παίρνει τίς τιμές $2\hbar, \hbar, 0, -\hbar, -2\hbar$. Στό χῶρο παρίσταται ὡς



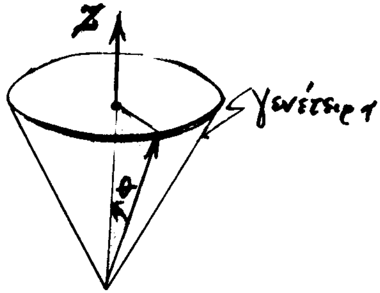
Σχηματικῶς ἔχουμε:



Σχ. 6. Σχηματική παράστασις κβαντώσεως της συνιστώσας z, J_z, της στροφορμής. $l=2$.

"Ας σημειωθή ότι παρουσία εξωτερικού πεδίου, π.χ. μαγνητικού πεδίου, η διεύθυνσις z είναι τελείως αυθαίρετη. Τό φαινόμενο των διακρίτων τιμών μιας των συνιστωσών της στροφορμής ονομάζεται καί "κβάντωσις του χώρου", αυτό δέν σημαίνει όμως ότι ο χώρος έχει κβαντική δομή.

Συνοψίζοντας: Η κβαντική θεωρία μας επιτρέπει τόν προσδιορισμό μόνον του μεγέθους της στροφορμής $|\vec{J}|$ καθώς καί μία από τις συνιστώσες της, έστω τήν J_z. Οι κβαντικοί αριθμοί l καί m_l δέν δίνουν καμμία πληροφορία γιά τις συνιστώσες J_x καί J_y. Η πιό "ενδεικτική" εικόνα είναι του Σχ. 7



Σχ. 7. Η γενέτειρα του κώνου διαγράφει κάποια ορισμένη τιμή του l_z καθώς καί η γωνία θ. Τό Σχ. 6 δηλ. "μετασχηματισμένο" από Σχ. 7 από τέσσερις ομοαξονικούς κώνους με διαφορετική θ καί έναν δίσκο.

Ἡ εἰκόνα (Σχ. 7) δέν εἶναι "δυναμική", δέν πρέπει δηλ. νά σκεφθοῦμε ὅτι τό διάνυσμα τῆς στροφορμῆς <u>κινεῖται</u> ἐπί τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, ἀλλά ὅτι εἶναι δυνατόν νά βρεθῆ ὁπουδήποτε ἐπ' αὐτῆς τῆς ἐπιφανείας. Φυσικά ἡ "γενέτειρα" τοῦ κώνου καθορίζεται ἀπό τούς κβαντικούς ἀριθμούς l, m_l. Ἄς σημειωθῆ ἐπίσης ὅτι ἡ στροφορμή δέν εἶναι δυνατόν νά γίνη παράλληλη μέ τόν ἄξονα z (ἤ μέ ὁποιονδήποτε ἄλλο ἄξονα), διότι ἡ μεγίστη προβολή της εἶναι $l\hbar$ ($m_{max} = l$) ἐνῶ τό μέγεθος γιά δεδομένο l εἶναι $\{l(l+1)\hbar^2\}^{1/2}$ καί πάντοτε

$$\sqrt{l(l+1)} > l$$

(στήν περίπτωση ὅπου $l=0$, δέν ὑπάρχει στροφορμή)
Ἡ γωνία θ, Σχ. 7 δίνεται ἀπό τήν σχέση

$$\cos\theta = \frac{m\hbar}{\hbar\sqrt{l(l+1)}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}}$$

Γιά πολύ μεγάλους κβαντικούς ἀριθμούς $\sqrt{l(l+1)} \simeq l$ καί ἡ συμπεριφορά τῆς στροφορμῆς ἀρχίζει νά γίνεται "κλασσική" (ἀρχή τῆς ἀντιστοιχίας, βλ. καί Σχ. 4 τῆς σ. 31)

Ἡ σχέση $\nabla^2 = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)r + 1/r^2\,\hat{\Lambda}^2(\theta,\varphi)$, ἐξ. (28), συνδέει τίς καρτεσιανές μέ τίς σφαιρικές πολικές συντεταγμένες, καί ἀπό τήν κλασσική ἔκφραση τῆς ἐνεργείας, μέ ἀντιστοίχηση, ἀποδείξαμε ὅτι ὁ $\hat{\Lambda}^2(\theta,\varphi)$ εἶναι τό τετράγωνο τοῦ τελεστοῦ τῆς στροφορμῆς. Ἄς τό δείξουμε αὐτό μέ μεγαλύτερη ἐνάργεια. Γνωρίζουμε ὅτι

$$\hat{\vec{J}} = \vec{r}\times\hat{\vec{P}} \quad ἤ$$

$$\hat J_x = (y\hat p_z - z\hat p_y) \longrightarrow \hat J_x = \hbar/i\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
$$\hat J_y = (z\hat p_x - x\hat p_z) \longrightarrow \hat J_y = \hbar/i\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$$
$$\hat J_z = (x\hat p_y - y\hat p_x) \longrightarrow \hat J_z = \hbar/i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (26) και τις γνωστές σχέσεις μετασχηματισμού συντεταγμένων σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες παίρνουμε:

$$\left.\begin{aligned}
\hat J_x &= -\frac{\hbar}{i}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\varphi} + \cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\
\hat J_y &= +\frac{\hbar}{i}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\
\hat J_z &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}
\end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

Άρα $\hat J^2 = \hat J_x^2 + \hat J_y^2 + \hat J_z^2$. Παίρνοντας τα τετράγωνα των εξ. (42) και αντικαθιστώντας στην τελευταία προκύπτει

$$\hat J^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \qquad (43)$$

Διά συγκρίσεως της (43) με την (29) έχουμε

$$\hat J^2 = -\hbar^2\hat\Lambda^2(\theta,\varphi) \qquad (44)$$

Γνωρίζουμε και

$$\hat\Lambda^2 Y_{lm_l}(\theta,\varphi) = -l(l+1)Y_{lm_l}(\theta,\varphi)$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με την σταθερά $-\hbar^2$ και συνδυάζοντάς την μὲ τὴν (44) προκύπτει

$$\hat{J}^2 Y_{lm_l}(\theta,\varphi) = l(l+1)\hbar^2 Y_{lm_l} \qquad (45)$$

$$l = 0, 1, 2, \dots$$
$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \pm l.$$

Ἡ (45) μᾶς λέει ὅτι οἱ σφαιρικὲς ἁρμονικὲς εἶναι ἰδιοσυναρτήσεις τοῦ τετραγώνου τῆς στροφορμῆς μὲ ἰδιοτιμὲς $l(l+1)\hbar^2$. Τὸ μέγεθος τῆς στροφορμῆς εἶναι ἡ θετικὴ ρίζα τῆς ποσότητας $l(l+1)\hbar^2$.
Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι οἱ σφαιρικὲς ἁρμονικὲς $Y_{lm_l}(\theta,\varphi)$ εἶναι ἰδιοσυναρτήσεις τοῦ τελεστοῦ $\hat{J}_z$. Πράγματι

$$\hat{J}_z Y_{lm_l}(\theta,\varphi) = \hat{J}_z \Theta_{lm_l}(\theta)\Phi_{m_l}(\varphi) = \Theta_{lm_l}(\theta)\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Phi_{m_l}(\varphi) = \Theta_{lm_l}(\theta)\, m_l\hbar\,\Phi_{m_l}$$

ἢ

$$\hat{J}_z Y_{lm_l}(\theta,\varphi) = m_l\hbar\, Y_{lm_l}(\theta,\varphi)$$

Δηλ. οἱ συναρτήσεις $Y_{lm_l}(\theta,\varphi)$ εἶναι <u>συγχρόνως</u> ἰδιοσυναρτήσεις τῶν $\hat{J}^2$ καὶ $\hat{J}_z$. Θὰ δοῦμε ἀργότερα ὅτι αὐτὸ ὀφείλεται στὴν ἰδιότητα τῶν τελεστῶν $\hat{J}^2$ καὶ $\hat{J}_z$ νὰ "μετατίθενται".