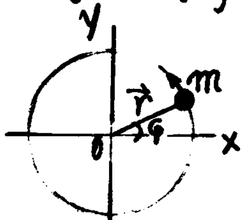
ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΙΣ- ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

Κυκλικό φρέαρ δυναμικού.



Σχ. 1. Κυκλικό φρέαρ σταθερού δυναμικού.

Θεωροῦμε σωματίδιο μάζης m τό ὁποῖο κινεῖται ἐντός κυκλικοῦ φρέατος δυναμικοῦ ἀκτῖνος $r = (x^2+y^2)^{1/2}$=σταθ. Τά ἀποτελέσματα εἶναι τά ἴδια ἀνεξαρτήτως κατανομῆς τῆς μάζης m, δηλ. εἶναι ἴσον σωματίδιον ἐάν ἡ ἴδια μάζα κατανεμηθῆ σέ μορφή δίσκου ἀκτῖνος r.

Ἡ Χαμιλτωνειανή τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+V \qquad (1)$$

$$V = \text{σταθ.}\ (=0$$

Μετασχηματίζομε ἀπό Καρτεσιανές σέ πολικές συντεταγμένες. Ἔχομε:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ r &= \text{σταθερό} \end{aligned} \qquad (2)$$

Ἡ μοναδική μεταβλητή εἶναι ἡ γωνία φ διότι r=σταθερά. Ἀπό τίς (2) προκύπτει ὅτι

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} \qquad (3)$$

Χρησιμοποιούμε τώρα τις γνωστές σχέσεις, π.χ. σε σφαιρικές–καρτεσιανές συντεταγμένες·

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_{y,z}\frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{y,z}\frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{y,z}\frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \text{κ.τ.λ.}$$

Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{y}\frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \text{καί} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{x}\frac{\partial}{\partial \varphi} \qquad (4)$$

Άρα πρέπει νά υπολογίσουμε τίς ποσότητες $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$. Χρησιμοποιούμε τήν (3).
Θέτουμε $\tan\varphi = g(\varphi)$, άρα

$$\frac{\partial g(\varphi)}{\partial x} = \frac{\partial g(\varphi)}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$$

Αλλά $\frac{\partial g(\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi}$. Από τίς τελευταίες δύο σχέσεις παίρνουμε

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\cos^2\varphi \qquad (5)$$

Ομοίως

$$\frac{\partial g(\varphi)}{\partial y} = \frac{\partial g(\varphi)}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 1/x$$

καί

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos^2\varphi}{x} \qquad (6)$$

Από τίς (5), (6) καί (2) προκύπτει ότι

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{r\sin\varphi}{r^2\cos^2\varphi}\cos^2\varphi \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\cos^2\varphi}{r\cos\varphi} \rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r}$$

Καταλήξαμε δηλ. στίς σχέσεις (7)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r} \qquad (7)$$

Θέση τῶν (7) σέ (4) γράφονται

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} \quad \text{καί} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

Ἤ

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\cos^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \qquad (8)$$

Λόγω τῶν (8) ἡ $\hat{H}$ (βλ. (1)) μετασχηματίζεται στήν

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\cos^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

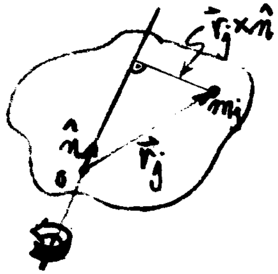
ἤ

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2mr^2}\underbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{1}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \quad \text{ἄρα}$$

$$\underline{\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2I}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}} \qquad (1a)$$

ὅπου $I \equiv mr^2$ ἡ ροπή ἀδρανείας τοῦ συστήματος $=$ σταθερά, διότι m καί r σταθερές.

(Υπενθυμίζουμε τόν γενικότερο ορισμό τῆς ροπῆς ἀδρανείας σώματος τό ὁποῖο ἀποτελεῖται ἀπό σωματίδια μάζης $\{m_j\}_{j=1}^N$, σέ ἀποστάσεις $\{r_j\}_{j=1}^N$ καί περιστρεφομένου γύρω ἀπό ἄξονα κατευθύνσεως $\hat{n}$ · $\hat{n}$ εἶναι τό μοναδιαῖο διάνυσμα.



$$I = \sum_{j=1}^{N} m_j \, (\vec{r}_j \times \hat{n}) \cdot (\vec{r}_j \times \hat{n})$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την (9α) η εξίσωσις του Schrödinger γράφεται

$$-\frac{\hbar^2}{2I}\frac{d^2}{d\varphi^2}\Phi(\varphi) = E\Phi(\varphi) \qquad (9)$$

ή

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -\left(\frac{2IE}{\hbar^2}\right)\Phi(\varphi)$$

Θέτουμε $\frac{2IE}{\hbar^2} = m_\ell^2$ (10)

(Η ποσότης m_ℓ είναι αδιάστατος) άρα

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m_\ell^2\Phi(\varphi) = 0 \qquad (11)$$

Η γενική λύσις της εξ. (11) είναι

$$\Phi(\varphi) = Ae^{im_\ell\varphi} + Be^{-im_\ell\varphi} \qquad (12)$$

Δεν υπάρχει απαίτησις να μηδενίζεται η συνάρτησις σε κάποιο σημείο του δακτυλίου, απαιτούμε όμως μονότιμη πιθανοτική πυκνότητα ή στην προκειμένη περίπτωση

$$\Phi(\varphi+2\pi) = \Phi(\varphi) \qquad (13)$$

περίοδος 2π

Λόγω των (12) καί (13) έχουμε

$$Ae^{im_\ell\varphi}e^{2\pi i m_\ell}+Be^{-im_\ell\varphi}e^{-2\pi i m_\ell}=Ae^{im_\ell\varphi}+Be^{-im_\ell\varphi}$$

Ἡ τελευταία ἱκανοποιεῖται μόνον ὅταν m_ℓ εἶναι μηδέν ἤ ἀκέραιος, διότι μόνον τότε $e^{i2\pi m_\ell}=1$. Ἄρα ἡ συνθήκη περιοδικότητος (13) ἐπιβάλλει τόν περιορισμό†

$$m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \qquad (14)$$

Ἄρα λόγω τῆς (10) καί τῆς (14)

$$E_{m_\ell} = \frac{(m_\ell \hbar)^2}{2I}, \quad m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (15)$$

Τό m_ℓ ὀνομάζεται κβαντικός ἀριθμός καί προέκυψε ἀπό τόν περιορισμό (13). Παρατηροῦμε ὅτι ἡ E_{m_ℓ} εἶναι ἐκφυλισμένη, βαθμοῦ ἐκφυλισμοῦ $g=2$ (ἐκτός ἀπό τήν θεμελιώδη E_0 ὅπου $m_\ell=0$ καί $g=1$) ‡

Ἡ κλασσική ἔκφρασις ἐνεργείας δίνεται ἀπό τήν σχέση

$$E = \frac{\vec{J}^2}{2I} \quad \text{ὅπου} \quad \vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$$ ἡ κλασσική στροφορμή.

Σύγκρισις τῆς τελευταίας μέ τήν (15) μᾶς ἐπιτρέπει νά ἑρμηνεύσουμε τό μέγεθος $(m_\ell \hbar)^2$ ὡς τό τετράγωνο τοῦ μεγέθους τῆς στροφορμῆς, δηλ.:

$$J^2 = (m_\ell \hbar)^2 \qquad (16)$$

Διαπιστώνουμε δηλ. τήν κβάντωση τῆς στροφορμῆς καί ὅτι τό μέγεθος τῆς στροφορμῆς εἶναι ἀνεξάρτητο τοῦ σημείου τοῦ m_ℓ.

Έχουμε επίσης ότι $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ και ο τρόπος με τον οποίο έχουμε περιορίσει την κίνηση του σωματιδίου, Σχ. 1 σημαίνει ότι $J_x = J_y = 0$ και $J_z \neq 0$.

Γιά αυστηρότερη επεξήγηση των προηγουμένων ας σχηματίσουμε τον τελεστή της στροφορμής $\hat{J}$. Κλασσικώς έχουμε $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$ και επειδή η κυκλική κίνηση περιορίζεται στο επίπεδο xy ή $z=0$ όπως ήδη αναφέραμε, η μόνη μη μηδενική συνιστώσα της στροφορμής είναι J_z, άρα

$$J_z = x P_y - y P_x$$

ή σύμφωνα με τα γνωστά

$$\hat{J}_z = \frac{\hbar}{i}\left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}\right) \qquad (17)$$

Μετασχηματίζοντας την (17) σε πολικές συντεταγμένες έχουμε:

$$\hat{J}_z = \frac{\hbar}{i}\left(r\cos\varphi \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + r\sin\varphi \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = \frac{\hbar}{i}\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

ή $$\underline{\hat{J}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}} \qquad (18)$$

Έχουμε την κυματοσυνάρτηση (12)· θέτουμε $B=0$ (η γενικότητα δεν βλάπτεται διότι $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) και εφαρμόζουμε τον τελεστή στροφορμής (18) να δράση επί της

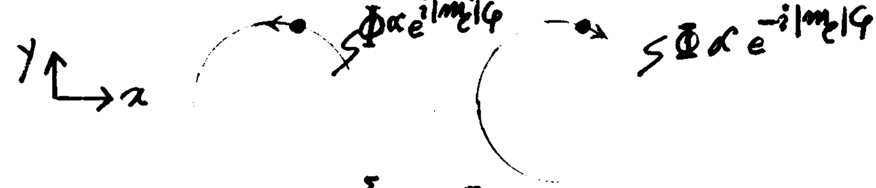
$$\Phi_{m_l}(\varphi) = A e^{i m_l \varphi} \qquad (B=0)$$

$$\hat{J}_z \Phi_{m_l}(\varphi) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi} A e^{i m_l \varphi} = m_l \hbar A e^{i m_l \varphi},$$ ή

$$\underline{\hat{J}_z \Phi_{m_l}(\varphi) = m_l \hbar \Phi_{m_l}(\varphi)} \qquad (19)$$

$, m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Ἡ ἐξίσωσις (19) μᾶς λέγει ὅτι ἡ συνάρτησις $\Phi_{m_\ell}(\phi)$ εἶναι ἰδιοσυνάρτησις τοῦ τελεστοῦ τῆς στροφορμῆς J_z μὲ ἰδιοτιμὴ $m_\ell\hbar$ ἢ ὅτι ἡ "στροφορμὴ εἶναι κβαντισμένη κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος τοῦ z", μὲ τιμὴ κβαντώσεως $m_\ell\hbar$. Ἀντίθετες τιμὲς τοῦ m_ℓ ἀντιστοιχοῦν εἰς διαφορετικὴ φορὰ "περιστροφῆς" τοῦ "σωματιδίου", Σχ. 2



Σχ. 2.

Ἡ ἐνέργεια, προφανῶς, δὲν πρέπει νὰ ἐπηρεάζεται ἀπὸ τὴν φορὰ περιστροφῆς καὶ πράγματι $E \propto m_\ell^2$, ἐξ. (15) καὶ $g=2$. Δὲν ὑπάρχει "φορὰ περιστροφῆς" στὴν θεμελιώδη κατάστασι διότι ἡ στροφορμὴ εἶναι μηδέν, $m_\ell=0$.
Μένει ὁ προσδιορισμὸς τῆς σταθερᾶς A τῆς ἰδιοσυναρτήσεως $Ae^{im_\ell\varphi}$, ἀπαιτοῦμε

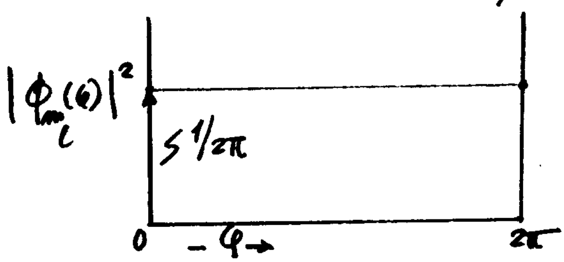
$$\int_0^{2\pi} d\varphi\, |A|^2 e^{-im_\ell\varphi} e^{im_\ell\varphi} = |A|^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi |A|^2 = 1$$

ἢ
$$A = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \qquad (20)$$
μὲ φάσιν μονάδα.

Ἄρα

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_{m_\ell}(\varphi) = \sqrt{\dfrac{1}{2\pi}}\, e^{im_\ell\varphi} \quad \text{μὲ} \quad E_{m_\ell} = \dfrac{(m_\ell\hbar)^2}{2I} \\ m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \end{array}\right\} \qquad (21)$$

Ἡ πιθανοτικὴ πυκνότης εἶναι $|\Phi_{m_\ell}(\varphi)|^2 = \dfrac{1}{2\pi}$ (=σταθερά) ἀνεξαρτήτως τοῦ m_ℓ. Γραφικῶς



Σχ. 3. Γραφική παράστασις τῆς $|\Phi_{m_\ell}(\varphi)|^2$ συναρτήσει τῆς φ.

Σημειώνουμε καί πάλι τήν γενική ἰδιότητα τῆς ὀρθογωνιότητος τῶν συναρτήσεων $\Phi_{m_\ell}(\varphi)$, καί λόγω τῆς κανονικοποιήσεως

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\, \Phi^*_{m_\ell}(\varphi)\,\Phi_{m_\ell'}(\varphi) = \delta_{m_\ell m_\ell'} \qquad (22).$$

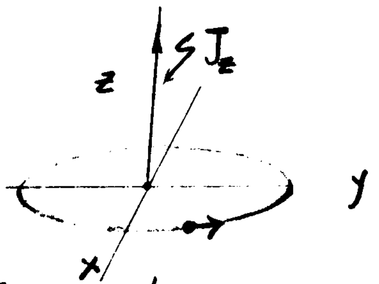
<u>Παρατήρησις</u>. Ἀπό τήν ἔκφρασιν τῆς ἐνεργείας, ἐξ. (15) ἤ ἐξ. (21), ὅπως ἤδη ἔχουμε ἀναφέρει, ὅλες οἱ καταστάσεις εἶναι διπλῶς ἐκφυλισμένες ἐκτός τῆς περιπτώσεως ὅπου $m_\ell=0$. Στήν περίπτωση ὅπου $m=0$, $\Phi_0(\varphi)=1/\sqrt{2\pi}$ μέ $E_0=0$ καί $J=0$. Ὁ ἐκφυλισμός προέρχεται ἀπό τό γεγονός ὅτι ἡ ἐνέργεια δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τήν κατεύθυνση κινήσεως. Στήν θεμελιώδη κατάσταση ἡ ἐνέργεια εἶναι μηδέν, ἄρα δέν ὑπάρχει ἡ "διπλή κατεύθυνσις". Σημειώνουμε ἐπίσης ὅτι

$$\Phi_{m_\ell}(\varphi+\pi)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\,e^{im_\ell(\varphi+\pi)}=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\,e^{im_\ell\varphi}\,e^{i\pi m_\ell}$$

ἤ ἐπειδή $e^{i\pi}=-1$

$$\Phi_{m_\ell}(\varphi+\pi)=(-1)^{m_\ell}\,\Phi_{m_\ell}(\varphi) \qquad (23)$$

Ἀπό τήν (23) συνάγεται ὅτι σημεῖα διαμετρικά ἐπί τοῦ κύκλου (σημεῖα διαφέροντα κατά π) ἔχουν τό αὐτό μέγεθος $\Phi_m(\varphi)$ ἀλλά ἀντίθετα σημεῖα ἐάν ὁ m εἶναι περιττός καί τά αὐτά ἐάν ὁ m εἶναι ἄρτιος.



Σχ. 3. Κλασσική κυκλική κίνηση περιστροφῆς.

Τό Σχῆμα 3 παριστᾶ κλασσική κυκλική κίνηση περιστροφῆς. Τό μέγεθος τῆς στροφορμῆς παρίσταται ἀπό τό μῆκος τοῦ καθέτου ἐπί τοῦ ἐπιπέδου xy, ἐνῶ ἡ διεύθυνση ἀπό τήν φορά περιστροφῆς. Ἡ διαφορά μεταξύ κλασσικῆς καί κβαντικῆς κινήσεως μπορεῖ νά ἐντοπισθῆ στό γεγονός ὅτι στήν πρώτη περίπτωση τό μῆκος τοῦ διανύσματος τῆς στροφορμῆς εἶναι συνεχές (παίρνει οποιαδήποτε τιμές), ἐνῶ στήν δεύτερη εἶναι ἀκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ $\hbar$, $m\hbar$.