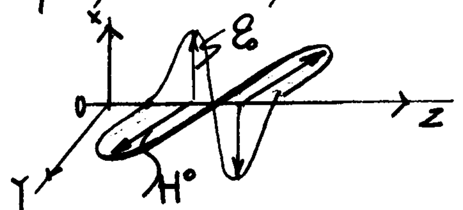
2. Διατάραξις της μορφής $\hat{f}(\vec{r})\cos(\omega t+\alpha)$

Ποιός ὁ λόγος εἰσαγωγῆς διαταράξεως της μορφής μέ χρονική ἐξάρτησιν ἔστω $\cos(\omega t+\alpha)$; Μας ἐνδιαφέρει ἡ ἀλληλεπίδρασις ἠλεκτρομαγνητικῆς ἀκτινοβολίας μέ μοριακά συστήματα. Ἠλεκτρομαγνητικό "ἐπίπεδο" κῦμα κυκλικῆς συχνότητας ω καί κυματάριθμου $\vec{k}$ ($|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$) περιγράφεται (τό ἠλεκτρικό του πεδίο) ἀπό τήν σχέση

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}^{0} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \qquad (34)$$

ὅπου $\vec{\mathcal{E}}^{0}$ τό εὖρος ταλαντώσεως. Ἐάν τώρα θεωρήσουμε ὅτι διαθέτουμε πολωμένο φῶς ἐπιπέδου πολώσεως xz ($y=0$) τό ὁποῖο κινεῖται κατά μῆκος τοῦ ἄξονος z,



τότε ἡ ἐξ. (34) γράφεται

$$\vec{\mathcal{E}} = \hat{e}_x \mathcal{E}_x = \hat{e}_x \mathcal{E}^{0}_x e^{i(kz-\omega t)} \qquad (35)$$

Ἐπειδή μόνον τό πραγματικό μέρος εἶναι αὐτό πού φυσικῶς μας ἐνδιαφέρει μποροῦμε νά γράψουμε γιά τό ἠλεκτρικό πεδίο πολωμένου ἠλεκτρομαγνητικοῦ κύματος στό ἐπίπεδο xz

$$\vec{\mathcal{E}} = \hat{e}_x \mathcal{E}^{0}_x \cos(\omega t - kz) \qquad (35')$$

Τό ἀντίστοιχο μαγνητικό διάνυσμα εἶναι

$$\vec{H} = \hat{e}_y H^{0} \cos(\omega t - kz) \qquad (36)$$

Τώρα ἕνα ἠλεκτρομαγνητικό κῦμα μεταφέρει ἐνέργεια· ἡ ροή ἐνεργείας ἀνά μονάδα χρόνου καί μονάδα ἐπιφανείας δίνεται ἀπό τό διάνυσμα Poynting, $\vec{S}$,

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H} \qquad (37)$$

ὅπου c ἡ ταχύτης τοῦ φωτός στό κενό καί σέ μονάδες Gauss.

$\mathcal{E}$ $\vec S$ H

Ἂς σημειωθῆ ὅτι ἡ διεύθυνσις τοῦ $\vec S$ εἶναι ἡ διεύθυνσις κινήσεως· ἡ ὁποία εἶναι βέβαια καὶ ἡ διεύθυνσις ῥοῆς ἐνεργείας.
Ὑποθέτοντας πολωμένο φῶς ἐπιπέδου xz καὶ ἐπειδὴ $\mathcal{E}^0 = H^0_y$ σὲ σύστημα μονάδων Gauss, τὸ μέγεθος τοῦ $\vec S$, $|\vec S|$ εἶναι

$$|\vec S| \equiv S = \frac{c}{4\pi}\left|\vec{\mathcal{E}}\times\vec H\right| = \frac{c}{4\pi}\mathcal{E}_x^2 \qquad (38)$$

Ἡ μέση τιμὴ (ἀνὰ κύκλο) τῆς ποσότητος $\mathcal{E}_x^2=(\mathcal{E}_x^0)^2\cos^2\phi$ (ὅπου $\phi=\omega t-kz$) εἶναι

$$\overline{\mathcal{E}_x^2}=(\mathcal{E}_x^0)^2\,\overline{\cos^2\phi},$$

ἀλλά

$$\overline{\cos^2\phi} \equiv 1/2\pi\int_0^{2\pi} d\phi\,\cos^2\phi = 1/2\pi\left[1/2\,\phi+1/4\sin 2\phi\right]_0^{2\pi} = 1/2\pi\,(\pi) = 1/2$$

Ἄρα $\overline{\mathcal{E}_x^2} = 1/2\,(\mathcal{E}_x^0)^2$. Ἑπομένως ἡ μέση τιμὴ τοῦ διανύσματος Poynting, $\bar S$, εἶναι

$$\bar S = \frac{c}{4\pi}\overline{\mathcal{E}_x^2} = \frac{c}{4\pi}\,1/2\,(\mathcal{E}_x^0)^2 = \frac{c}{8\pi}(\mathcal{E}_x^0)^2 \qquad (39)$$

(Διαστάσεις τοῦ S εἶναι Ενέργεια/Επιφάνεια × χρόνο)

Τώρα ἡ δύναμις F ἡ ὁποία ἀσκεῖται ἐπὶ κινουμένου σωματιδίου, φορτίου q καὶ ταχύτητος $\vec v$ (δύναμις Lorentz) δίνεται ἀπὸ τὴν σχέση

$$\vec F = q\left(\vec{\mathcal{E}} + \frac{\vec v}{c}\times\vec H\right). \qquad (40)$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ $\vec F$ ἔχει δύο συνιστῶσες, μία λόγῳ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου $\mathcal{E}$ καὶ μία λόγῳ μαγνητικοῦ $\vec H$. Ἐπειδὴ $|\vec{\mathcal{E}}|=|\vec H|$, ὁ λόγος τῆς δυνάμεως λόγῳ μαγνητικοῦ πεδίου πρὸς τὴν δύναμη λόγῳ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, $F_H/F_{\mathcal{E}}$ εἶναι

$$F_H/F_{\mathcal{E}} = \frac{|\vec v|}{c}\sin(\vec v,\vec H)$$

Στὴν περίπτωση τῶν ἠλεκτρονίων καὶ παίρνοντας ὡς πρότυπο τὸ ἄτομο τοῦ ὑδρογόνου, ἀποδεικνύεται εὔκολα ὅτι

$$\frac{\langle v^2\rangle^{1/2}}{c} = 1/137 .$$

Ἄρα, ἐν γένει, στὰ φυσικὰ συστήματα καὶ ὅσον ἀφορᾶ τὰ ἠλεκτρόνια "σθένους" τῶν ὁποίων ἡ $\langle v^2\rangle^{1/2}$ εἶναι τῆς αὐτῆς τάξεως μεγέθους μέ τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου στήν θεμελιώδη του κατάσταση, $F_H/F_E \simeq 150$. Ἄρα μέ σχετικά καλή προσέγγιση ἡ δύναμις ἐπί κινουμένου φορτισμένου σωματιδίου, συγκεκριμένα ἠλεκτρονίου ἑνός μοριακοῦ συστήματος, λόγω μαγνητικῆς συνιστώσας τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου μπορεῖ νά παραληφθῆ. Γράφουμε

$\vec{F} = +q\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\Phi$ ὅπου Φ τό ἠλεκτρικό δυναμικό. Ὁλοκλήρωσις τῆς x συνιστώσης τῆς προηγουμένης σχέσεως παρέχει

$$-\int_0^x dx' \frac{\partial\Phi}{\partial x'} = q\int_0^x dx'\, \mathcal{E}_x^0 \cos(\omega t - kz)$$

ἤ

$$\Phi = -q\,\mathcal{E}_x^0 \cos(\omega t - kz)\,x \quad \text{μέ } \Phi(0)=0 \qquad (41)$$

Γιά N σωματίδια ἡ προηγουμένη σχέσις γράφεται

$$\Phi = -\mathcal{E}_x^0 \sum_{i=1}^{N} q_i x_i \cos(\omega t - kz_i) \qquad (41')$$

Ἡ σχέσις (41') εἶναι καί ἡ διαταραχή $V(\vec{r},t)$. Ὅμως, $kz_i = \frac{2\pi}{\lambda} z_i$ ὅπου λ τό μῆκος κύματος τῆς προσπιπτούσης ἀκτινοβολίας καί z_i τό μέγεθος τοῦ "ἀτόμου", δηλ. τό μέγεθος τοῦ μοριακοῦ συστήματος μέ τό ὁποῖο ἡ ἀκτινοβολία ἀλληλεπιδρᾶ. Γιά μεταπτώσεις ὁρατοῦ – ὑπεριώδους, $\lambda \simeq 5000 - 1000$ Å καί ἐπειδή $z_i \simeq 1$ Å, $kz_i \simeq 0$. Ἄρα ὁ ὅρος kz μπορεῖ νά παραληφθῆ ἀπό τήν (41') στήν περίπτωση μεταπτώσεων περιοχῆς UV καί χαμηλοτέρας ἐνεργείας. Γράφουμε λοιπόν γιά τήν τελική διαταραχή $V(\vec{r},t)$ τήν ὁποία θά χρησιμοποιήσουμε

$$V(\vec{r},t) = -\mathcal{E}_x^0 \cos\omega t \sum_{i=1}^{N} q_i x_i \qquad (42)$$

Ἡ ἠλεκτρική διπολική ροπή $\vec{d}$ συστήματος ὁρίζεται ἀπό τήν σχέση

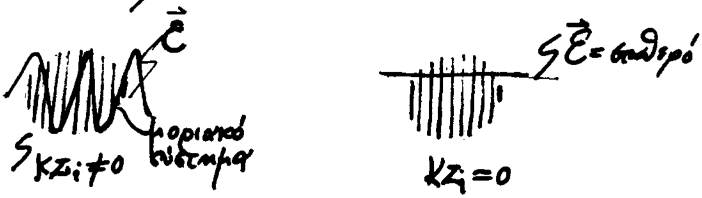
$$\vec{d} = \sum_i q_i \vec{r}_i = \sum_i q_i (x_i \hat{e}_x + y_i \hat{e}_y + z_i \hat{e}_z) = (d_x, d_y, d_z)$$

Ἑπομένως $V(\vec{r},t) = -\mathcal{E}_x^0 \cos\omega t\, d_x$ (43)

όπου βέβαια d_x ή συνιστώσα x της διπολικής ηλεκτρικής ροπής $\vec{d}$.
Γενικότερα

$$V(\vec{r},t) = -\vec{\mathcal{E}}^0\cdot\vec{d}\cos\omega t \qquad (43')$$

Παρατηρούμε ότι ή διαταραχή $V(\vec{r},t)$, έξ. (43), μέ τήν προσέγγιση $kz\simeq 0$ τήν οποία δεχθήκαμε, είναι τώρα της μορφής $f(\vec{r})\Theta(t)$ μέ $f(\vec{r}) = -\mathcal{E}_x^0 d_x$ καί $\Theta(t)=\cos\omega t$. Οι προηγούμενες διαδικασίες δικαιολογούν τήν επιλογή $f(\vec{r})\cos(\omega t+\alpha)$ ως διαταράξεως. Δέν μένει παρά νά εφαρμόσουμε τήν σχέση (23). "Φυσικώς", ή προσέγγιση $kz_i\simeq 0$ σημαίνει ότι τό σύστημα "βλέπει" ένα σταθερό πεδίο δεδομένης εντάσεως· δηλ. οι διαστάσεις του ατομικού συστήματος είναι τέτοιες, έν σχέσει μέ τό μήκος κύματος της ακτινοβολίας ("φωτονίου") ώστε δέν υπάρχει βαθμίδα πεδίου εντός του συστήματος· εικονογραφικώς



Πρίν εφαρμόσουμε τήν σχέση (23) άς εξετάσουμε κατά πόσον ή σχέση αυτή είναι ικανή προσέγγιση στήν παρούσα περίπτωση, δηλ. πρέπει νά συγκρίνουμε τό μέγεθος του ηλεκτρικού πεδίου τό προερχόμενο από τήν διαταραχή (ακτινοβολία) πρός τό μέγεθος του "εσωτερικού" πεδίου του συστήματος. Αυτό τό τελευταίο μπορεί νά εκτιμηθή θεωρώντας τό άτομο του υδρογόνου· μέ προσέγγιση τάξεως μεγέθους, τό ηλεκτρικό πεδίο $\mathcal{E}$ λόγω του φορτίου +1 του πυρήνος τό οποίο αισθάνεται τό ηλεκτρόνιο σε απόσταση $\simeq 1$Å είναι

$$\mathcal{E}_{\varepsilon\sigma} \approx \frac{e}{r^2} = \frac{4.8\times 10^{-10}}{(0.53)^2}\,\frac{\text{statcoulomb}}{\text{Å}^2} = \frac{4.8\times 10^{-10}}{(0.53)^2\times 10^{-16}}\,\frac{\text{statC}}{\text{cm}^2} \quad \text{ή}$$

$$\mathcal{E}_{\varepsilon\sigma} \simeq 10^{7}\,\frac{\text{statVolt}}{\text{cm}} \quad \text{σε μονάδες CGS.}$$

Περίπου της αυτής τάξεως μεγέθους πεδία "αισθάνονται" τά ηλεκτρόνια σθένους κάθε μοριακού συστήματος. Είναι προφανής ότι τά ηλεκτρικά πεδία, στό εσωτερικό των μοριακών συστημάτων είναι μία έως τρεις τάξεις μεγέθους μεγαλύτερα, κυμαινόμενα μεταξύ $10^7 - 10^{10}$ StatVolt/cm.

Τώρα από την σχέση (39), έχομε $\mathcal{E}_x^0 = \left(\frac{8\pi}{c}\bar{S}\right)^{1/2}$. Εάν λοιπόν διαθέτουμε πηγή εντάσεως περίπου 1 Watt cm^{-2}, σέ μονάδες c.g.s., από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι

$$\mathcal{E}_x^0 = \left(\frac{8\pi}{c}\times 10^7 \frac{erg}{s\,cm^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{8\pi}{3\times 10^{10}}\times 10^7 \frac{erg}{s\cdot cm^2\cdot cm\,s^{-1}}\right)^{1/2} \simeq 0.1\,\frac{StatVolt}{cm}$$

και $\mathcal{E}_{es}/\mathcal{E}_x^0 \simeq 10^8$ (προφανώς ανεξαρτήτως συστήματος μονάδων)

Άρα η σχέση (23) (ή (29')) μπορεί νά εφαρμοσθή δίχως φόβο σέ χαμηλές ροές φωτονίων. Λόγω της (23) γράφομε

$$c_\ell(t) = f_{\ell s}\frac{1}{i\hbar}\int_0^t dt'\cos(\omega t'+\alpha)e^{i\omega_{\ell s}t'} \qquad (44)$$

Τό στοιχείο $f_{\ell s}$ τό οποίο θά μας απασχολήσει εδώ, στην περίπτωση δηλ. αυτή είναι της μορφής $\langle \phi_\ell^{(0)}(\vec r)|\hat{\vec r}|\phi_s^{(0)}\rangle$ λόγω της (42) (ή (43) και (43')). Η τιμή του εξαρτάται από τις συναρτήσεις $\{\phi_k^{(0)}(\vec r)\}_k$ του αδιατάρακτου συστήματος και τό μέγεθός του χαρακτηρίζει τις αντίστοιχες μεταπτώσεις $\ell \leftarrow s$ ασθενείς (ή μηδέν) ή ισχυρές (κανόνες επιλογής). Είναι κατανοητό ότι η συμμετρία του συστήματος παίζει σημαντικό ρόλο στον προσδιορισμό, <u>όχι</u> του μεγέθους $f_{\ell s}$, αλλά του εάν τό $f_{\ell s}$ είναι μηδέν ή διάφορο του μηδενός. Πριν προχωρήσουμε στον υπολογισμό μικροστοιχείων "ηλεκτρικού διπόλου" $f_{\ell s}$, δηλ. πριν επιλέξουμε συγκεκριμένα παραδείγματα ($\phi^{(0)}(\vec r)$) θά εξετάσουμε κάπως λεπτομερώς τό "χρονικό" μέρος της εκφράσεως (44). Έστω

$$G(\omega,\omega_0,\alpha,t) \equiv \int_0^t dt'\cos(\omega t'+\alpha)e^{i\omega_0 t'} \qquad (45)$$

όπου θέσαμε $\omega_{\ell s}\equiv\omega_0$ πρός χάριν ευκολίας. Λόγω της (45) η πιθανότης μεταπτώσεως $|c_\ell(t)|^2$ είναι

$$|c_\ell(t)|^2 = |f_{\ell s}|^2 \frac{1}{\hbar^2} |G|^2 \qquad (46)$$

Ὑπολογίζουμε τό ὁλοκλήρωμα G. Εἶναι

$$\cos(\omega t+\alpha) = \frac{1}{2}\left(e^{i(\omega t+\alpha)} + e^{-i(\omega t+\alpha)}\right), \text{ ἄρα}$$

$$G(\omega,\omega_0,\alpha,t) = \int_0^t dt' \, \frac{1}{2}\left(e^{i(\omega t'+\alpha)} + e^{-i(\omega t'+\alpha)}\right) e^{i\omega_0 t'}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \int_0^t dt' e^{i(\omega t'+\alpha)} e^{i\omega_0 t'} + \int_0^t dt' e^{-i(\omega t'+\alpha)} e^{i\omega_0 t'} \right\} = \tfrac{1}{2}(I_1 + I_2)$$

Ὑπολογίζουμε τό ὁλοκλήρωμα I_1

$$I_1 = \int_0^t dt' e^{i[(\omega+\omega_0)t'+\alpha]} = \frac{1}{i(\omega+\omega_0)}\left\{ e^{i[(\omega+\omega_0)t+\alpha]} - e^{i\alpha} \right\}$$

$$= \frac{1}{i(\omega+\omega_0)} e^{i\alpha} e^{i\frac{(\omega+\omega_0)}{2}t} \left\{ e^{i\frac{(\omega+\omega_0)}{2}t} - e^{-i\frac{(\omega+\omega_0)}{2}t} \right\}$$

$$= \frac{1}{i(\omega+\omega_0)} e^{i\alpha} e^{i\frac{(\omega+\omega_0)}{2}t} \times 2i\sin\frac{(\omega+\omega_0)}{2}t = 2e^{i\alpha} e^{i\frac{(\omega+\omega_0)}{2}t} \frac{\sin\frac{(\omega+\omega_0)}{2}t}{\omega+\omega_0}$$

Μέ τόν ἴδιο τρόπο $$I_2 = \int_0^{t'} dt' e^{-i[(\omega-\omega_0)t'+\alpha]} = -2e^{-i\alpha} e^{-i\frac{(\omega-\omega_0)}{2}t} \frac{\sin\frac{(\omega-\omega_0)}{2}t}{\omega-\omega_0}$$

Συνδυασμός τῶν δύο τελευταίων ἐκφράσεων παρέχει

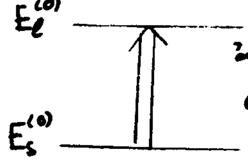
$$G(\omega,\omega_0,\alpha,t) = e^{i\alpha} e^{i\frac{(\omega+\omega_0)}{2}t} \frac{\sin\frac{(\omega+\omega_0)}{2}t}{\omega+\omega_0} - e^{-i\alpha} e^{-i\frac{(\omega-\omega_0)}{2}t} \frac{\sin\frac{(\omega-\omega_0)}{2}t}{\omega-\omega_0} \qquad (47)$$

Ἄρα

$$|G|^2 = \left\{\frac{\sin\frac{(\omega+\omega_0)}{2}t}{(\omega+\omega_0)}\right\}^2 + \left\{\frac{\sin\frac{(\omega-\omega_0)}{2}t}{(\omega-\omega_0)}\right\}^2 - 2\cos(\omega t+2\alpha) \times \frac{\sin\frac{(\omega+\omega_0)}{2}t \cdot \sin\frac{(\omega-\omega_0)}{2}t}{(\omega+\omega_0)(\omega-\omega_0)} \qquad (47')$$

Ὑπενθυμίζουμε ὅτι $\omega_0 = \omega_{\ell s}$. Τά μεγέθη τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων κυμαίνονται μεταξύ ± 1, ἄρα τό μέγεθος $|G|^2$ ἐξαρτᾶται ἀπό τούς παρονομαστές $\omega \pm \omega_{\ell s}$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις
(α) $E_s < E_\ell$, δηλ. $\omega_{\ell s} = \frac{E_\ell^{(0)} - E_s^{(0)}}{\hbar} > 0$ καί ἀναφερόμεθα στό φαινόμενο

το οποίο ονομάζεται <u>απορρόφησις</u>. Η κατάστασις $\varphi_s^{(0)}$ βρίσκεται, ενεργειακώς χαμηλότερα της $\varphi_\ell^{(0)}$. Μία από τις πλέον συνήθεις περιπτώσεις είναι η $s=0$, $\varphi_0^{(0)}$ δηλ. η θεμελιώδης. Διαγραμματικώς

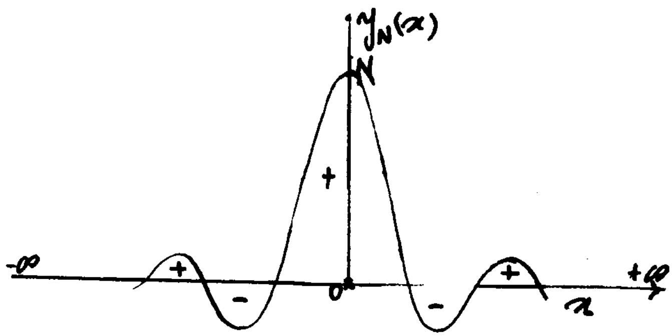


απορρόφησις ακτινοβολίας με σύγχρονη διέγερση του συστήματος

Από την φύση $|c_\ell(t)|^2$, εξ. (46), (47') παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής $\omega+\omega_{\ell s}$ είναι πάντοτε θετικός και ποτέ δεν είναι δυνατόν να μηδενισθή διότι $\omega_{\ell s}>0$ και προφανώς $\omega>0$. Άρα ο πρώτος εκ δεξιών όρος της εκφράσεως $|G|^2$ δεν συνεισφέρει σημαντικά στο μέγεθος της $|G|^2$. Ο δεύτερος όμως όρος εάν $\omega\to\omega_{\ell s}$ (δηλ. $\omega\to\frac{E_\ell-E_s}{\hbar}$) ή $\omega-\omega_{\ell s}\to 0$ και αυτό είναι δυνατόν διότι $-\omega_{\ell s}<0$, ο όρος αυτός γίνεται ο πλέον σημαντικός της εκφράσεως $|G|^2$. Η συνάρτησις $\sin\frac{(\omega\pm\omega_{\ell s})t}{(\omega\pm\omega_{\ell s})}$ είναι της μορφής $y_N=\sin Nx/x$ όπου $N=t/2$ και $x=\omega\pm\omega_{\ell s}$. Ρωτάμε κατ' αρχάς ποιά η τιμή της συναρτήσεως y_N του $x\to 0$

Έχουμε $\displaystyle\lim_{x\to 0} y_N(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin Nx)'}{(x)'}=N$

Πότε μηδενίζεται η $y_N(x)$, $x\neq 0$. $y_N(x)=0=\frac{\sin Nx}{x}\Rightarrow Nx=n\pi$ όπου n ακέραιος $\Rightarrow x=\frac{n}{N}\pi$. Η γραφική παράσταση της $y_N(x)$ είναι της μορφής



Ἐπειδή $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin Nx}{x} = \pi$ ἡ «κανονικοποιημένη» συνάρτηση $y_N(x)$ θά εἶναι

$y_N(x) = \frac{\sin Nx}{\pi x}$ καί τό ἀντίστοιχο ὅριο $\lim_{x\to 0} y_N(x) = \frac{N}{\pi}$

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ συνάρτησις παίρνει τήν μέγιστη τιμή της στό σημεῖο $x=0$ ($y_N(0) = N/\pi$ μέ τήν y_N κανονικοποιημένη). Ἐπίσης παρατηροῦμε ὅτι καθώς τό $N \to$ αὐξάνει ἡ συνάρτησις συγκεντρώνεται ὅλο καί περισσότερο γύρω ἀπό τό μηδέν μέ αὐξανόμενο ὕψος ἐνῶ συγχρόνως τό ὁλοκλήρωμά της («ἐμβαδόν») παραμένει τό ἴδιο. Ἐάν καί ὑπάρχουν ὁρισμένες ἐπιφυλάξεις μαθηματικῆς φύσεως στήν ὕπαρξη τοῦ ὁρίου τοῦ $N\to\infty$, ἀντιμετωπίζονται καί ὁδηγούμεθα στόν ὁρισμό τῆς συναρτήσεως Dirac ἤ συναρτήσεως «δ». Δηλ.

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sin Nx}{\pi x} = \delta(x) \qquad (48)$$

Δέν πρόκειται νά συζητήσουμε στό σημεῖο αὐτό τά τῆς συναρτήσεως δ. Θ' ἀναφέρουμε ἁπλῶς ὁρισμένες ἰδιότητές της

(i) $\delta(x) = 0$ γιά κάθε x ἐκτός ἀπό τό σημεῖο $x=0$

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(x) = 1$

(iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(x) F(x) = F(0)$

Ἀπό τίς προηγούμενες ἰδιότητες φαίνεται ὅτι ἡ $\delta(x)$ εἶναι «γραμμή» ἄπειρου «ὕψους» καί ἐμβαδοῦ 1. Καί μέχρι τώρα τέτοια συνάρτηση δέν ὑπάρχει, ἡ ὕπαρξή της ὅμως ὡς κανονικῆς δικαιολογεῖται μαθηματικῶς. Μποροῦμε ὅμως νά προσεγγίσουμε τίς ἰδιότητες τῆς δ ὅσο κοντά θέλουμε μέ διάφορες συναρτήσεις καί μία ἀπό αὐτές εἶναι ἡ $y_N(x)$ (Μία ἄλλη εἶναι ἡ κατά Gauss συνάρτηση $N/\sqrt{\pi}\, e^{-N^2x^2} = \delta_N(x)$. Τό $N\to\infty$ ἡ $y_N(x)$ εἶναι πρακτικῶς μηδέν καί τείνει σέ ἄπειρο στό σημεῖο $x=0$ μέ δεδομένο πάντα ἐμβαδόν. Ἀκριβῶς τό ἴδιο συμπεριφέρεται καί ἡ συνάρτησις $\sin^2 Nx/x^2$. Ἡ ἀντίστοιχη κανονικοποιημένη συνάρτησις εἶναι $\frac{\sin^2 Nx}{N\pi x^2} = \frac{\pi}{N} y_N^2(x) = \delta(x)$ τοῦ $N\to\infty$.

(Ἡ γενικὴ παράστασις τῆς $y_N^2(x)$ εἶναι οὐσιαστικῶς ἡ αὐτὴ μὲ τῆς $y_N(x)$, ἡ προφανὴς διαφορὰ εἶναι ὅτι ἡ πρώτη εἶναι παντοῦ θετική)

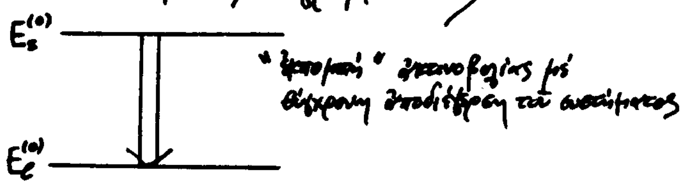
Ἐπανερχόμεθα τώρα στὴν συνάρτησιν $|G|^2$ καὶ εἰδικώτερα ἐπειδὴ ἔχομε ἀναφερθῇ στὸ φαινόμενο τῆς ἀπορροφήσεως, στὴν

$$\frac{\sin^2\frac{(\omega-\omega_{ls})t}{2}}{(\omega-\omega_{ls})^2} \propto \delta(\omega-\omega_{ls})$$

Καταλαβαίνομε πλέον ὅτι ἐκτὸς ἀπὸ τὸν προηγούμενο ὅρο οἱ ὑπόλοιποι δύο ὅροι τῆς ἐκφράσεως (47') ἔχουν πολὺ μικρὴ προσφορὰ στὴν τιμὴ τῆς $|G|^2$. Ἄρα μποροῦμε νὰ γράψωμε στὴν περίπτωσι τοῦ φαινομένου τῆς ἀπορροφήσεως

$$|c_l(t)|^2 \simeq \frac{1}{\hbar^2}|f_{ls}|^2 \frac{\sin^2\frac{(\omega-\omega_{ls})t}{2}}{(\omega-\omega_{ls})^2} \qquad (49)$$

β) $E_s^{(0)} > E_l^{(0)}$, δηλ. $\omega_{ls} = \frac{E_l^{(0)}-E_s^{(0)}}{\hbar} < 0$ καὶ ἀναφερόμεθα στὸ φαινόμενο τῆς ἐκπομπῆς, διαγραμματικῶς



Σύμφωνα μὲ τὴν προηγούμενη συζήτησι, στὴν προκειμένη περίπτωσι ὁ μόνος σημαντικὸς ὅρος τῆς ἐκφράσεως $|G|^2$, ἐξ. (47') εἶναι ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου μέλους, διότι μόνον τὸ ἄθροισμα $\omega+\omega_{ls}$ εἶναι δυνατὸν νὰ τείνῃ στὸ μηδὲν ἐὰν $\omega \to -\omega_{ls}$. Ἄρα, ἡ ἀνάλογη ἔκφρασις τῆς (49) εἶναι

$$|c_l(t)|^2 \simeq \frac{1}{\hbar^2}|f_{ls}|^2 \frac{\sin^2\frac{(\omega+\omega_{ls})t}{2}}{(\omega+\omega_{ls})^2} \qquad (50)$$

Συνδυασμὸς τῶν ἐκφράσεων (49) καὶ (50) δίνει

$$\boxed{|c_l(t)|^2 \simeq \frac{|f_{ls}|^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2\frac{(\omega\pm\omega_{ls})t}{2}}{(\omega\pm\omega_{ls})^2}} \qquad (51)$$

ὅπου τὸ πρόσημο + ἀναφέρεται στὸ φαινόμενο τῆς ἐκπομπῆς ἐνῶ τό — στό φαινόμενο τῆς ἀπορροφήσεως.

Ὁρισμένες παρατηρήσεις στό σημεῖο αὐτό εἶναι μᾶλλον ἀπαραίτητες. Ἡ ἐξ. (51) μᾶς λέει ὅτι ἐάν $E_s^{(0)} < E_\ell^{(0)}$, τό σύστημα ἀπορροφᾶ ἱκανοποιητικῶς (ἐξωτερική) ἀκτινοβολία μέ σύγχρονη μετάβασή του στήν κατάσταση ℓ, μόνον ἐάν ἡ συχνότης ω τῆς ἀκτινοβολίας εἶναι $\omega = \Delta E/\hbar = (E_\ell^{(0)} - E_s^{(0)})/\hbar$ (συνθήκη Bohr). Δηλ. τό πεδίο τοῦ φωτός χάνει ἕνα φωτόνιο τό ὁποῖο χρησιμοποιεῖται στήν προώθηση τοῦ συστήματος σέ κατάσταση ὑψηλοτέρας ἐνεργείας. Προφανῶς ἡ ὅλη ἐνέργεια, σύστημα + πεδίο διατηρεῖται καί θεωρεῖται "φυσικό" ὅτι χρειαζόμεθα ἐνέργεια γιά τήν μετάβαση ἀπό "χαμηλότερα", ὑψηλότερα. Στό φαινόμενο ὅμως τῆς ἐκπομπῆς τά πράγματα εἶναι διαφορετικά. Ἀρχικῶς τό σύστημα βρίσκεται σέ κατάσταση ὑψηλοτέρας ἐνεργείας ἀπό τήν τελική, $E_s^{(0)} > E_\ell^{(0)}$ καί κατ' ἀρχήν (δίχως νά παραβιάζεται ἡ διατήρηση τῆς ἐνεργείας) θά μποροῦσε νά ἐκπέμψει ἀπό <u>μόνο</u> του φωτόνιο συχνότητος $\omega = (E_\ell^{(0)} - E_s^{(0)})/\hbar$. Πρᾶγμα αὐτό συμβαίνει καί ὀνομάζεται <u>αὐθόρμητος</u> ἐκπομπή. Ἡ ἐκπομπή ἡ ὁποία περιγράφεται ἀπό τήν ἐξ. (50) εἶναι διαφορετικοῦ εἴδους φαινόμενο· γιά νά συμβῇ ἀπαιτεῖται ἡ ἀλληλεπίδρασις τοῦ συστήματος μέ τό πεδίο τῆς ἀκτινοβολίας, <u>παρ' ὅλο</u> πού αὐτό δέν εἶναι ἀναγκαῖο ἀπό πλευρᾶς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας. Ἡ ἐκπομπή τήν ὁποία ἐμεῖς περιγράψαμε καί στήν ὁποία ἀναφέρεται ἡ ἐξ. (50) λέγεται <u>ἐπαγωμένη</u>. Ἡ ἀδυναμία μας νά περιγράψουμε τήν αὐθόρμητο ἐκπομπή ὀφείλεται στό ὅτι ἡ θεωρία τήν ὁποία ἐχρησιμοποιήσαμε εἶναι ἡμικλασσική (ἢ ἡμικβαντική!), δηλ. θεωρεῖ τό σύστημα ὡς κβαντισμένο καί τήν ἀκτινοβολία ὡς συνεχῆ. Πλήρης (σωστή) θεωρία θ' ἀπαιτοῦσε κβάντωση καί τοῦ συστήματος καί τῆς ἀκτινοβολίας. Ἡ ἀπορρόφησις τῆς ἀκτινοβολίας (προφανῶς πάντα ἐπαγωμένη λόγω τοῦ θεμελιώδους κανόνος ἐπιλογῆς τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας), εἶναι ἀπολύτως συμμετρική τῆς ἐπαγωμένης ἐκπομπῆς ὄχι ὅμως καί τῆς αὐθορμήτου.

Ἐπί τοῦ φαινομένου τῆς ἐπαγωμένης ἐκπομπῆς στηρίζεται καί τό φαινόμενο L.A.S.E.R. (οὐσιαστικό πλέον, τό Laser, τοῦ Laser κ.τ.λ.)