Στροφορμή συνθέτων συστημάτων - Σύζευξις στροφορμής

Θεωρούμε σύστημα τό όποιο "φέρει" δύο στροφορμές $\vec{J}_1$ καί $\vec{J}_2$. Τό σύστημα είναι δυνατόν νά είναι ένα σωματίδιο τροχιακής στροφορμής $\vec{J}_1$ καί στροφορμής spin $\vec{J}_2$, ή μπορεί ν' αποτελείται από δύο συστήματα τά όποια καί τά δύο φέρουν στροφορμή spin ή καί τά δύο τροχιακή στροφορμή, ή τό ένα στροφορμή spin καί τό άλλο τροχιακή στροφορμή, ή σωματίδιο (π.χ. $\bar{e}$) μέ στροφορμή spin τό όποιο ανήκει σέ περιστρεφόμενο μόριο. Τί συμβαίνει μέ τήν ολική στροφορμή τού συνθέτου συστήματος; Ρωτάμε εάν ή στροφορμή τού ενός μέρους έχει πλήρως καθορισθή (πλήρως μέ τήν κβαντική έννοια, δηλ. τό μέγεθος καί ή προβολή) είναι δυνατόν νά καθορισθή πλήρως καί ή στροφορμή τού υπολοίπου μέρους; Ή κατάστασις στροφορμής τού μέρους 1 καθορίζεται μέ τούς κβαντικούς αριθμούς j_1 καί m_{j1}· ομοίως ως πρός τό μέρος 2 μέ τούς κβαντικούς αριθμούς j_2 καί m_{j2}. Μάς ενδιαφέρει ό καθορισμός τής καταστάσεως $|j_1 j_2 m_{j1} m_{j2}\rangle$, ή όποία γράφεται καί $|j_1 m_{j1} j_2 m_{j2}\rangle$. $|j_1 j_2 m_{j1} m_{j2}\rangle \equiv |j_1 m_{j1}\rangle |j_2 m_{j2}\rangle$. Γνωρίζουμε ότι πάντοτε $[\hat{J}^2, \hat{J}_z]=0$. Τώρα οί τελεσταί οί όποιοι ενεργούν σέ διαφορετικά συστήματα, σέ διαφορετικές "πηγές" στροφορμής πάντοτε μετατίθενται:

$$[\hat{J}_{1\rho}, \hat{J}_{2\rho'}]=0 \quad \text{γιά κάθε } \rho, \rho' = x,y,z.$$

Τά 1 καί 2 στά σύμβολα $\hat{J}_{1\rho}$ καί $\hat{J}_{2\rho'}$ συμβολίζουν τίς αντίστοιχες πηγές στροφορμής. Ομοίως $[\hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2]=0$. Άρα καί οί τέσσαρες τελεσταί στροφορμής $\hat{J}_1^2\, \hat{J}_{1z}, \hat{J}_2^2\, \hat{J}_{2z}$ μετατίθενται μεταξύ τους, άρα ό προσδιορισμός τής στροφορμής τού, έστω τού σωματιδίου 1 δέν εμποδίζει (δέν υπάρχουν σχέσεις απροσδιοριστίας) τόν σύγχρονο προσδιορισμό τού σωματιδίου 2 καί ή κανονική κατάστασις γράφεται όπως προηγουμένως δείξαμε ως

$$(|j_1 m_{j_1}, j_2 m_2\rangle =)\ |j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle = |j_1 m_{j_1}\rangle |j_2 m_{j_2}\rangle \qquad (65)$$

Ἡ ἐξίσωση (65) μᾶς λέει μέ σύμβολα ὅτι ἡ κατάσταση στροφορμῆς τοῦ ἑνός εἶναι $|j_1 m_{j_1}\rangle$ τοῦ ἄλλου $|j_2 m_{j_2}\rangle$ <u>συγχρόνως</u>. Ρωτᾶμε τώρα ἡ <u>ὀλική</u> στροφορμή τοῦ (συνθέτου) συστήματος εἶναι δυνατόν νά προσδιορισθῆ; Πρῶτα ὅμως πρίν ἀπαντήσουμε στήν ἐρώτηση αὐτή νά δοῦμε ἐάν ἡ λέξις <u>ὀλική</u> στροφορμή ἔχει ἔννοια στό κβαντικό ἐπίπεδο. Κλασσικῶς βέβαια θά γράφαμε γιά τήν ὀλική στροφορμή $\vec{J}$, $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ (ἡ ὁποία σημαίνει $J_x = J_{1x} + J_{2x}$, $J_y = J_{1y} + J_{2y}$, $J_z = J_{1z} + J_{2z}$). Ἡ σχέσις αὐτή μπορεῖ νά μεταφερθῆ νά μεταφερθῆ στό κβαντικό ἐπίπεδο, δηλ.

$$\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{J}}_1 + \hat{\vec{J}}_2 \qquad (66)$$

δηλ. τό $\hat{\vec{J}}$ εἶναι τελεστής στροφορμῆς; Ὁ μόνος τρόπος νά ἀπαντήσουμε εἶναι νά δοῦμε ἐάν τηρεῖ τίς σχέσεις μεταθέσεως (6), οἱ ὁποῖες ἀποτελοῦν καί τό κριτήριο ἐάν κάποια ποσότης εἶναι στροφορμή ἤ ὄχι. Ἔχουμε

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = [\hat{J}_{1x} + \hat{J}_{2x}, \hat{J}_{1y} + \hat{J}_{2y}] = [\hat{J}_{1x}, \hat{J}_{1y}] + \underbrace{[\cancel{\hat{J}_{1x}}, \hat{J}_{2y}]}_{0}$$

$$+ \underbrace{[\cancel{\hat{J}_{2x}}, \hat{J}_{1y}]}_{0} + [\hat{J}_{2x}, \hat{J}_{2y}] = i\hbar \hat{J}_{1z} + i\hbar \hat{J}_{2z} = i\hbar (\hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z})$$

ἤ

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar \hat{J}_z \qquad (67)$$

Οἱ δύο μεταθέσεις οἱ ὁποῖες μηδενίζονται ὀφείλονται στό ὅτι οἱ συνιστῶσες τῆς στροφορμῆς ὀφείλονται σέ ἀνεξάρτητες "πηγές" στροφορμῆς. Ἡ σχέσις (67) προφανῶς ἰσχύει καί γιά τίς ὑπόλοιπες συνιστῶσες, δηλ. θά ἔχουμε $[\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hbar \hat{J}_x$, $[\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i\hbar \hat{J}_y$. Ἄρα ἡ ποσότης $\hat{\vec{J}}$ μέ τόν τρόπο πού ὁρίσαμε στήν σχέση (66) μπορεῖ νά θεωρηθῆ ὡς τελεστής στροφορμῆς. Ἄς σημειωθῆ ὅτι ἐάν ἡ $\hat{\vec{J}}$ ὁρισθῆ μέ ὁποιονδήποτε ἄλλο τρόπο ἐκτός τῆς (66), π.χ.

$\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{J}}_1 - \hat{\vec{J}}_2$ τότε οἱ γενικές σχέσεις (6) δέν τηροῦνται καί τό $\hat{\vec{J}}$ δέν θά μπορῆ νά παίξη τόν ρόλο τελεστοῦ στροφορμῆς.
Συνοψίζουμε τί ἔχουμε ἕως τώρα

$$\hat{J}_1^2 |j_1 m_{j_1}\rangle = j_1(j_1+1)\hbar^2 |j_1 m_{j_1}\rangle$$

$$\hat{J}_{1z} |j_1 m_{j_1}\rangle = m_{j_1}\hbar\, |j_1 m_{j_1}\rangle$$

$$\hat{J}_2^2 |j_2 m_{j_2}\rangle = j_2(j_2+1)\hbar^2 |j_2 m_{j_2}\rangle \qquad (68)$$

$$\hat{J}_{2z} |j_2 m_{j_2}\rangle = m_{j_2}\hbar\, |j_2 m_{j_2}\rangle$$

μέ $j_1, j_2 = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2 \dots$
$m_{j_1} = -j_1, -j_1+1, \dots +j_1 \quad (2j_1+1)$ τιμές
$m_{j_2} = -j_2, -j_2+1, \dots +j_2 \quad (2j_2+1)$ τιμές

$$\hat{J}^2 |j m_j\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j m_j\rangle$$

$$\hat{J}_z |j m_j\rangle = m_j\hbar\, |j m_j\rangle \qquad (69)$$

μέ
$j = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, \dots$
$m_j = -j, -j+1, \dots +j$

Ρωτᾶμε τώρα ἐάν μποροῦμε νά καθορίσουμε ταυτοχρόνως τούς κβαντικούς ἀριθμούς j (τῆς ὁλικῆς στροφορμῆς $\hat{\vec{J}}$) γνωρίζοντας τούς j_1 καί j_2. Ἐπίσης τόν m_j (τήν προβολή τῆς ὁλικῆς στροφορμῆς) ἐάν γνωρίζουμε τίς m_{j_1} καί m_{j_2}. Μέ διαφορετικά λόγια, ν' ἀντικαταστήσουμε τό σύνολο $j_1, j_2, m_{j_1}, m_{j_2}$ μέ j_1, j_2, j, m_j. Αὐτό μᾶς ἐνδιαφέρει πολύ διότι ἔτσι κατασκευάζουμε τό σύστημα βάσεως τοῦ κβαντικοῦ ἀριθμοῦ j τῆς ὁλικῆς στροφορμῆς καί ἀπομακρυσμένα ἀπό τόν "ἐσωτερικό μηχανισμό", δηλ. τίς ἐπί μέρους στροφορμές τοῦ ὑπό ἐξέτασιν συστήματος. Ἡ πρώτη ἐρώτηση μᾶς ὁδηγεῖ στήν ἐξέταση τῶν μεταθετῶν $[\hat{J}^2, \hat{J}_1^2]$ καί $[\hat{J}^2, \hat{J}_2^2]$. Ἀναγνωρίζοντας ὅτι $\hat{J}^2 = (\hat{J}_{1x}+\hat{J}_{2x})^2 + (\hat{J}_{1y}+\hat{J}_{2y})^2 + (\hat{J}_{1z}+\hat{J}_{2z})^2$ εἶναι φανερό ὅτι οἱ προηγούμενοι μεταθέτες εἶναι μηδέν. Ἄρα οἱ ἰδιοτιμές τῶν $\hat{J}^2$, $\hat{J}_1^2$ καί $\hat{J}_2^2$ μποροῦν νά προσδιορισθοῦν ταυτοχρόνως.

<u>Παράδειγμα</u>: ἠλεκτρόνιο p ἔχει στροφορμή $l=1$ καί $s=1/2$ ἤ $j_1 = 1$ καί $j_2 = 1/2$. Ἄρα τά ἀντίστοιχα μεγέθη στροφορμῆς εἶναι $\{1(1+1)\hbar^2\}^{1/2} = \hbar\sqrt{2}$ καί $\{1/2(1/2+1)\hbar^2\}^{1/2} = \hbar\sqrt{3}/2$. Εἶναι δυνατόν ταυτοχρόνως νά προσδιορισθῇ καί τό μέγεθος τῆς ὁλικῆς στροφορμῆς $\{\langle \hat{J}^2 \rangle\}^{1/2} = \sqrt{j(j+1)}\,\hbar$, δηλ. ὁ "ὁλικός" κβαντικός ἀριθμός j. Τό πῶς θά τό δοῦμε λίγο ἀργότερα. Ἡ δεύτερη ἐρώτηση εἶναι, ἐάν συγχρόνως μέ τούς κβαντικούς ἀριθμούς j_1, j_2, j εἶναι δυνατόν νά καθορισθῇ καί ὁ κβαντικός ἀριθμός m_j, δηλ. ἡ προβολή τῆς ὁλικῆς στροφορμῆς. Οἱ μεταθέτες πρός ἐξέτασιν εἶναι $[\hat{J}_z, \hat{J}_1^2] = [\hat{J}_{1z}, \hat{J}_1^2] + \underbrace{[\hat{J}_{2z}, \hat{J}_1^2]}_{0} = [\hat{J}_{1z}, \hat{J}_1^2] = 0$. Ὁμοίως $[\hat{J}_z, \hat{J}_2^2] = 0$ καί ἐπειδή $[\hat{J}^2, \hat{J}_z] = 0$, τό γενικό συμπέρασμα εἶναι ὅτι εἶναι δυνατός ὁ <u>σύγχρονος</u> προσδιορισμός τῶν μεγεθῶν τῶν ἐπί μέρους στροφορμῶν, τοῦ μεγέθους τῆς ὁλικῆς στροφορμῆς καί τῆς προβολῆς της, ἤ ὁ σύγχρονος προσδιορισμός τῶν κβαντικῶν ἀριθμῶν j_1, j_2, j, m_j. Ὅλα τά προηγούμενα συμβολίζονται στό ket

$$|j_1\ j_2\ j\ m_j\rangle .$$

Μέ κίνδυνο νά γίνουμε βαρετοί ἐπαναλαμβάνουμε τήν σημασία τοῦ τετραγωνικοῦ συμβόλου μέ τίς ἐξισώσεις

$$\left.\begin{aligned}
\hat{J}_1^2 |j_1 j_2 j m_j\rangle &= j_1(j_1+1)\hbar^2 |j_1 j_2 j m_j\rangle \\
\hat{J}_2^2 |j_1 j_2 j m_j\rangle &= j_2(j_2+1)\hbar^2 |j_1 j_2 j m_j\rangle \\
\hat{J}^2 |j_1 j_2 j m_j\rangle &= j(j+1)\hbar^2 |j_1 j_2 j m_j\rangle \\
\hat{J}_z |j_1 j_2 j m_j\rangle &= m_j \hbar \, |j_1 j_2 j m_j\rangle
\end{aligned}\right\} \quad (70)$$

Ἤτοι οἱ τελεσταί $\hat{J}_1^2$, $\hat{J}_2^2$, $\hat{J}^2$ καί $\hat{J}_z$ εἶναι "διαγώνιοι" ὡς πρός $|j_1 j_2 j m_j\rangle$.

Ρωτᾶμε τώρα ἐάν εἶναι δυνατόν ὁ σύγχρονος προσδιορισμός τῶν προβολῶν τῶν ἐπί μέρους στροφορμῶν δηλ. ὁ καθορισμός τῶν κβαντικῶν ἀριθμῶν m_{j_1} καί m_{j_2}, ἤ ἐάν ἔχῃ ἔννοια τό κέτ

$$|j_1 m_{j_1} j_2 m_{j_2} j m_j\rangle \quad ; \qquad (71)$$

Ἐξετάζουμε τούς μεταθέτες $[\hat{J}_{1z}, \hat{J}^2]$ καί $[\hat{J}_{2z}, \hat{J}^2]$.

$$[\hat{J}_{1z}, \hat{J}^2] = [\hat{J}_{1z}, \hat{J}_x^2] + [\hat{J}_{1z}, \hat{J}_y^2] + [\hat{J}_{1z}, \hat{J}_z^2]$$

$$= [\hat{J}_{1z}, (\hat{J}_{1x}+\hat{J}_{2x})^2] + [\hat{J}_{1z}, (\hat{J}_{1y}+\hat{J}_{2y})^2] + \underbrace{[\hat{J}_{1z}, (\hat{J}_{1z}+\hat{J}_{2z})^2]}_{0}$$

$$= [\hat{J}_{1z}, \hat{J}_{1x}^2 + \hat{J}_{2x}^2 + 2\hat{J}_{1x}\hat{J}_{2x}] + [\hat{J}_{1z}, \hat{J}_{1y}^2 + \hat{J}_{2y}^2 + 2\hat{J}_{1y}\hat{J}_{2y}]$$

$$= [\hat{J}_{1z}, \hat{J}_{1x}^2 + 2\hat{J}_{1x}\hat{J}_{2x}] + [\hat{J}_{1z}, \hat{J}_{1y}^2 + 2\hat{J}_{1y}\hat{J}_{2y}]$$

$$= [\hat{J}_{1z}, \hat{J}_{1x}^2 + \hat{J}_{1y}^2] + 2[\hat{J}_{1z}, \hat{J}_{1x}]\hat{J}_{2x} + 2[\hat{J}_{1z}, \hat{J}_{1y}]\hat{J}_{2y}$$

$$= \underbrace{[\hat{J}_{1z}, \hat{J}_1^2 - \hat{J}_{1z}^2]}_{0} + 2i\hbar \hat{J}_{1y}\hat{J}_{2x} - 2i\hbar \hat{J}_{1x}\hat{J}_{2y}$$

$$= 2i\hbar(\hat{J}_{1y}\hat{J}_{2x} - \hat{J}_{1x}\hat{J}_{2y}) \neq 0,$$ διότι ἡ τελεστική ἔκφρασις δέν εἶναι τοῦ τύπου $[\hat{J}_{1\rho}, \hat{J}_{2\rho'}] = 0$ ὅπου $\rho, \rho' = x, y, z$.

Ὁμοίως $[\hat{J}_{2z}, \hat{J}^2] \neq 0$. Ἄρα ἡ μέτρηση τοῦ ket (71) εἶναι ἄνευ νοήματος καί ὁ σύγχρονος προσδιορισμός τῶν m_{j_1}, m_{j_2} ἐπί πλέον τῶν j_1, j_2, j, m_j δέν εἶναι δυνατός. Τό συμπέρασμα εἶναι ὅτι ἤ θά χρησιμοποιοῦμε (γιά τήν περιγραφή συστήματος συνθέτου) τήν μή συζευγμένη κατάσταση

$$|j_1 m_{j_1} j_2 m_{j_2}\rangle \equiv |j_1 m_{j_1}\rangle |j_2 m_{j_2}\rangle \qquad (72)$$

ἤ τήν συζευγμένη κατάσταση $|j_1 j_2 j m_j\rangle$. Ἡ συζευκτική ἀφήνει ἀπροσδιόριστες ("δέν ὑπάρχουν") τίς προβολές m_{j_1}, m_{j_2}, ἡ (72) τίς j, m_j. Τό κοινό μεταξύ τῆς ἀσύζευκτης καί συζευγμένης ἔκφρασης εἶναι τά μεγέθη j_1 καί j_2. Τό πρόβλημα εἶναι στήν περίπτωση ὅπου χρησιμοποιοῦμε τήν συζευγμένη ἔκφραση $|j_1 j_2 j m_j\rangle$ ποιά ἡ σχέσις τῶν "παλαιῶν" κβαντικῶν ἀριθμῶν $j_1, j_2, m_{j_1}, m_{j_2}$ μέ τούς "καινούργιους" j καί m_j. Ἔχουμε

$$|j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle = |j_1 m_{j_1}\rangle |j_2 m_{j_2}\rangle ,$$

ἐπ' αὐτοῦ δρῶμε μέ τόν $\hat{J}_1^2$

$$\hat{J}_1^2 |j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle = \hat{J}_1^2 |j_1 m_{j_1}\rangle |j_2 m_{j_2}\rangle = |j_2 m_{j_2}\rangle \hat{J}_1^2 |j_1 m_{j_1}\rangle$$

ἤ

$$\left.\begin{aligned} &\hat{J}_1^2 |j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle = j_1(j_1+1)\hbar^2 |j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle \\ \text{καί}\quad &\hat{J}_2^2 |j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle = j_2(j_2+1)\hbar^2 |j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle \end{aligned}\right\} (73)$$

Ὁμοίως

$$\left.\begin{aligned} &\hat{J}_{1z} |j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle = m_{j_1}\hbar |j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle \\ \text{καί}\quad &\hat{J}_{2z} |j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle = m_{j_2}\hbar |j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle \end{aligned}\right\} (74)$$

Άρα $\hat{J}_z|j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle = (\hat{J}_{1z}+\hat{J}_{2z})|j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle$ (και λόγω των (74))

$$= (m_{j_1}+m_{j_2})\hbar\,|j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle = m_j\hbar\,|j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle$$

ή
$$\boxed{m_j = m_{j_1}+m_{j_2}} \qquad (75)$$

Άρα τό κετ $|j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle$ είναι ιδιοκατάστασις τού $\hat{J}_z$. Θά επιθυμούσαμε τά $|j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle$ νά είναι καί ιδιοκαταστάσεις τού $\hat{J}^2$ καί έτσι θά είχαμε λύσει τό πρόβλημά μας, όμως δέν είναι. Μπορούμε όμως νά επιλέξουμε γραμμικούς συνδυασμούς των $|j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle$ ούτως ώστε οί $\hat{J}^2$ καί $\hat{J}_z$ νά έχουν κοινές ιδιοκαταστάσεις, δηλ. νά ισχύουν οί σχέσεις (70) (Οί αρχικές καταστάσεις $|j_1 m_{j_1}\rangle$, $|j_2 m_{j_2}\rangle$ είναι $(2j_1+1)(2j_2+1) = 4j_1 j_2 + 2(j_1+j_2)+1$. Κατόπιν συζεύξεως οί καινούργιες ιδιοκαταστάσεις οί οποίες θά προκύψουν, οί $|j_1 j_2 j m_j\rangle$ πρέπει καί αυτές νά είναι αριθμητικώς ίσες μέ τίς προηγούμενες) Γράφουμε λοιπόν

$$|j_1 j_2 j m_j\rangle = \sum_{m_{j_1}=-j_1}^{+j_1}\sum_{m_{j_2}=-j_2}^{+j_2} C_{m_{j_1} m_{j_2}}\,|j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle \qquad (76)$$

Τό πρόβλημά μας είναι ό προσδιορισμός των συντελεστών $\{C_{m_{j_1} m_{j_2}}\}$. Οί $|j_1 j_2 j m_j\rangle$ είναι ήδη ιδιοκαταστάσεις των $\hat{J}_1^2$ καί $\hat{J}_2^2$, πράγματι:

$$\hat{J}_1^2|j_1 j_2 j m_j\rangle = \hat{J}_1^2\sum_{m_{j_1}}\sum_{m_{j_2}} C_{m_{j_1} m_{j_2}}|j_1 m_{j_1}\rangle|j_2 m_{j_2}\rangle$$

$$= \sum_{m_{j_1}}\sum_{m_{j_2}} C_{m_{j_1} m_{j_2}}|j_2 m_{j_2}\rangle\hat{J}_1^2|j_1 m_{j_1}\rangle \quad \text{(διότι ό } \hat{J}_1^2 \text{ είναι γραμμικός)}$$

$$= \sum_{m_{j_1}}\sum_{m_{j_2}} C_{m_{j_1} m_{j_2}}\, j_1(j_1+1)\hbar^2|j_2 m_{j_2}\rangle|j_1 m_{j_1}\rangle$$

ἤ

$$\hat{J}_1^2 |j_1 j_2 j m_j\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1) \sum_{m_{j_1}} \sum_{m_{j_2}} C_{m_{j_1} m_{j_2}} |j_1 m_{j_1}\rangle |j_2 m_{j_2}\rangle$$

ἤ

$$\hat{J}_1^2 |j_1 j_2 j m_j\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1) |j_1 j_2 j m_j\rangle$$

Μέ τόν ἴδιο τρόπο ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ γραμμικός συνδυασμός (76) εἶναι ἰδιοκατάστασις μέ ἰδιοτιμή τήν $j_2(j_2+1)\hbar^2$. Σκοπός μας εἶναι τώρα ὁ προσδιορισμός τῶν συντελεστῶν $\{C_{m_{j_1} m_{j_2}}\}$ οὕτως ὥστε οἱ $|j_1 j_2 j m_j\rangle$ νά εἶναι ἰδιοκαταστάσεις τῶν $\hat{J}^2$ καί $\hat{J}_z$. Ἀπό τήν ἐξ. (76) παίρνουμε

$$\langle j_1 j_2 m'_{j_1} m'_{j_2} | j_1 j_2 j m_j\rangle = \sum_{m_{j_1}} \sum_{m_{j_2}} C_{m_{j_1} m_{j_2}} \langle j_1 m'_{j_1} | j_1 m_{j_1}\rangle \times \langle j_2 m'_{j_2} | j_2 m_{j_2}\rangle$$

ἀλλά ἐπειδή

$$\begin{aligned} \langle j_1 m'_{j_1} | j_1 m_{j_1}\rangle &= \delta_{m_{j_1} m'_{j_1}} \\ \langle j_2 m'_{j_2} | j_2 m_{j_2}\rangle &= \delta_{m_{j_2} m'_{j_2}} \end{aligned} \qquad (77)$$

ἡ προηγούμενη σχέσις γράφεται

$$\langle j_1 j_2 m'_{j_1} m'_{j_2} | j_1 j_2 j m_j\rangle = \sum_{m_{j_1}} \sum_{m_{j_2}} C_{m_{j_1} m_{j_2}} \delta_{m_{j_1} m'_{j_1}} \delta_{m_{j_2} m'_{j_2}} = C_{m'_{j_1} m'_{j_2}} . \qquad (78)$$

Βάσει τῆς (78) ἡ (76) γράφεται

$$|j_1 j_2 j m_j\rangle = \sum_{m_{j_1} m_{j_2}} |j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle \langle j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2} | j_1 j_2 j m_j\rangle \qquad (79)$$

Οἱ συντελεσταί $C_{m_{j_1} m_{j_2}} = \langle j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2} | j_1 j_2 j m_j\rangle$, αὐτοί δηλ. οἱ ὁποῖοι ἄν συζευγνύουν σωστά τά $|j_1 j_2 j m_j\rangle$ θά εἶναι ταυτοχρόνως ἰδιοκαταστάσεις τῶν $\hat{J}_z$ καί $\hat{J}^2$,

ὀνομάζονται συντελεσταί Clebsch-Gordan (CG)
ἤ διανυσματικοί συντελεσταί ἀθροίσεως
ἤ συντελεσταί Wigner
ἤ σύμβολα 3j (τά σύμβολα 3j εἶναι ἀνάλογα τῶν συντελεστῶν CG)

Ἐπί τῆς (79) δρῶμε μέ τόν τελεστή $\hat{J}_z$ καί ἔχουμε:

$$\hat{J}_z|j_1 j_2 j\, m_j\rangle = (\hat{J}_{1z}+\hat{J}_{2z})\sum_{m_{j_1},m_{j_2}} |j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle\langle j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}|j_1 j_2 j\, m_j\rangle$$

$$=\sum_{m_{j_1},m_{j_2}} (m_{j_1}+m_{j_2})\hbar\, |j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle\langle j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}|j_1 j_2 j\, m_j\rangle \tag{77}$$

Συγχρόνως ὅμως ἰσχύει

$$\hat{J}_z|j_1 j_2 j\, m_j\rangle = m_j\hbar\, |j_1 j_2 j\, m_j\rangle$$

$$= m_j\hbar \sum_{m_{j_1},m_{j_2}} |j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle\langle j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}|j_1 j_2 j\, m_j\rangle \tag{78}$$

Σύγκρισις τῶν (77) καί (78) μᾶς φέρει ὅτι

$$C_{m_{j_1} m_{j_2}} = \langle j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}|j_1 j_2 j\, m_j\rangle = 0 \quad \text{ἐάν } m_{j_1}+m_{j_2}\neq m_j$$

δηλ. $C_{m_{j_1} m_{j_2}}\neq 0$ μόνον ἐάν $m_{j_1}+m_{j_2}=m_j$, κάτι πού ἤδη γνωρίζαμε, ἐξ. (75). Ἄρα ἡ ἀθροιστική σχέσις γράφεται καί

$$|j_1 j_2 j\, m_j\rangle = \sum_{m_{j_1}} |j_1 j_2 m_{j_1}, m_j - m_{j_1}\rangle\langle j_1 j_2 m_{j_1}, m_j - m_{j_1}|j_1 j_2 j\, m_j\rangle$$

ἤ

$$|j_1 j_2 j\, m_j\rangle = \sum_{m_{j_2}} |j_1 j_2\, m_j - m_{j_2}, m_{j_2}\rangle\langle j_1 j_2\, m_j - m_{j_2}, m_{j_2}|j_1 j_2 j\, m_j\rangle$$

Ἔχουμε ἐπίσης (79)

$$-j_1 \leq m_{j_1} \leq +j_1 \quad \text{καί} \quad -j_2 \leq m_{j_2} \leq +j_2$$

καί ἐπειδή $m_j = m_{j_1} + m_{j_2}$, γράφουμε

$$-j_1 \leq m_j - m_{j_2} \leq j_1 \,, \quad -j_2 \leq m_j - m_{j_1} \leq j_2$$

Οἱ μέγιστες τιμές τῶν m_j, m_{j_1}, m_{j_2} εἶναι j, j_1 καί j_2 ἀντιστοίχως. Οἱ ἀνωτέρω ἀνισότητες ἰσχύουν γιά κάθε $\{m_j\}$ ἄρα καί γιά τίς μέγιστες τιμές. Ἄρα

$$-j_1 \leq j - j_2 \leq j_1 \Rightarrow j_2 - j_1 \leq j \leq j_1 + j_2$$

$$-j_2 \leq j - j_1 \leq j_2 \Rightarrow -(j_2 - j_1) \leq j \leq j_1 + j_2$$

Οἱ δύο τελευταῖες ἀνισότητες γράφονται συγχρόνως ὡς

$$\boxed{|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2} \qquad (80)$$

Ἄς δοῦμε ἕνα παράδειγμα, ἔστω $j_1 = 1/2$ καί $j_2 = 1$ (π.χ. $s = 1/2$, $l = 1$) Οἱ τιμές τοῦ κβαντικοῦ ἀριθμοῦ τῆς ὁλικῆς στροφορμῆς $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$ (κατ' ἀρχήν). Λόγω τῆς τριγωνικῆς ἀνισότητος (80) οἱ τιμές τοῦ j περιορίζονται στίς $|1/2 - 1| = 1/2$ ὡς ἐλάχιστη, $1/2 + 1 = 3/2$ ὡς μέγιστη, ἡ ἐνδιάμεση δέν μπορεῖ παρά νά εἶναι 1. Ἄρα

$$j = 1/2, 1, 3/2 \,.$$

Γιά $j = 1$, $m_j = +1, 0, -1$. Θά πρέπει ὅμως σύμφωνα μέ τήν σχέση (75) $m_j = m_{j_1} + m_{j_2}$ μέ $m_{j_1} = +1/2, -1/2$ καί $m_{j_2} = +1, 0, -1$. Οἱονδήποτε συνδυασμό κι ἄν πάρουμε μεταξύ τῶν m_{j_1} καί m_{j_2} βλέπουμε ὅτι δέν προκύπτουν ἀποδεκτές τιμές, πράγματι :

m_{j_1} \ m_{j_2}	1	0	-1
1/2	3/2	1/2	-1/2
-1/2	+1/2	-1/2	-3/2

Καμμία ἀπό τίς προκύπτουσες τιμές δέν εἶναι +1, 0, -1. Αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ τιμή τοῦ ὁλικοῦ κβαντικοῦ ἀριθμοῦ $j=1$ πρέπει ν' ἀπορριφθῆ, τό ὁποῖο μέ τήν σειρά του σημαίνει ὅτι οἱ περιοριστικές σχέσεις (80) δέν εἶναι ἀρκετές μέ ἀποτέλεσμα τήν δημιουργία μή συνεπῶν καταστάσεων. Γιά ν' ἀποφευχθοῦν τέτοιου εἴδους καταστάσεις ἀσυνεπείας, θέτουμε ἀκόμη ἕναν περιορισμό, τόν

$$j_1 + j_2 + j = n \qquad (81)$$

ὅπου n ἀκέραιος θετικός ἀριθμός. Οἱ ἀνισότητες (80) οἱ ὁποῖες μαζί μέ τόν περιορισμό (81) καλοῦνται καί τριγωνικές συνθῆκες, συμβολίζονται δέ $\Delta(j_1 j_2 j)$ γράφονται καί ὡς

$$\Delta(j_1 j_2 j) = \begin{cases} j_1 + j_2 - j \\ j_1 - j_2 + j \\ -j_1 + j_2 + j \end{cases} \geq 0 \qquad (82)$$
$$j_1 + j_2 + j = n$$

ἤ ἰσοδυνάμως γράφουμε γιά τίς ἐπιτρεπτές τιμές τοῦ j

$$\boxed{j = \underbrace{j_1 + j_2}_{max},\ j_1 + j_2 - 1,\ j_1 + j_2 - 2, \dots \quad \underbrace{|j_1 - j_2|}_{min}} \qquad (83)$$

μέ σύγχρονη δραστηριοποίηση τῆς

$$m_j = m_{j_1} + m_{j_2} = j,\ j-1,\ j-2, \dots\ -j \quad \underline{\text{γιά κάθε}}\ j$$

Οἱ περιοριστικὲς σχέσεις (83) λέγονται καὶ "σειρὰ CG". Στὸ σημεῖο αὐτὸ ὑπενθυμίζουμε ὅτι ἔχουμε παράγει τὶς περιοριστικὲς σχέσεις μεταξὺ τῶν $j_1, j_2, j, m_{j_1}, m_{j_2}$ καὶ m_j ἀλλὰ ἀκόμη δὲν ἔχουμε ὑπολογίσει τοὺς συντελεστὲς $C_{m_{j_1} m_{j_2}}$, δηλ. τοὺς συντελεστὲς CG. Ἂς δοῦμε πῶς ὑπολογίζουμε τοὺς ἐν λόγῳ συντελεστὲς στὴν ἁπλούστερη τῶν περιπτώσεων, δηλ. $j_1 = 1/2$ καὶ $j_2 = 1/2$, $m_{j_1} = \pm 1/2$, $m_{j_2} = \pm 1/2$. Σύμφωνα μὲ τὴν (83) ἔχουμε γιὰ τὸν ὁλικὸ κβαντικὸ ἀριθμὸ j

$$j = 1/2 + 1/2 = 1 \Rightarrow m_j = 1, 0, -1$$

καὶ

$$j = |1/2 + 1/2 - 1| = |1/2 - 1/2| = |j_1 - j_2| = 0 \Rightarrow m_j = 0.$$

Προκύπτουν δηλ. 4 καταστάσεις ὅσες βέβαια καὶ οἱ ἀρχικὲς $(2j_1+1)(2j_2+1) = (2\tfrac{1}{2}+1)(2\tfrac{1}{2}+1) = 4$. Ποιές εἶναι αὐτὲς οἱ ἀρχικὲς (μὴ συζευγμένες) καταστάσεις; Εἶναι τῆς μορφῆς $|j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle = |j_1 m_{j_1}\rangle |j_2 m_{j_2}\rangle$. Ἂς θυμηθοῦμε ὅτι ἔχουμε καλέσει τὴν $|1/2\,1/2\rangle = \alpha$ καὶ τὴν $|1/2\,-1/2\rangle = \beta$, ἄρα

$$\left.\begin{array}{l} \overset{j_1\ j_2\ m_{j_1} m_{j_2}}{|1/2\ 1/2\ 1/2\ 1/2\rangle} = \alpha(1)\,\alpha(2) \\[2ex] |1/2\ 1/2\ 1/2\ -1/2\rangle = \alpha(1)\,\beta(2) \\[2ex] |1/2\ 1/2\ -1/2\ 1/2\rangle = \beta(1)\,\alpha(2) \\[2ex] |1/2\ 1/2\ -1/2\ -1/2\rangle = \beta(1)\,\beta(2) \end{array}\right\} \qquad (84)$$

Ἀπὸ τὶς (4) ἀρχικὲς αὐτὲς καταστάσεις θὰ πάρουμε γραμμικοὺς συνδυασμοὺς τῶν ὁποίων οἱ συντελεστὲς θὰ εἶναι οἱ CG, ἔτσι ὥστε οἱ καινούργιες (προφανῶς πάλι 4) καταστάσεις θὰ εἶναι ἰδιοκαταστάσεις (ἐκτός τῶν $\hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2$) καί τῶν $\hat{J}^2, \hat{J}_z$. Ἄς ἀρχίσουμε μέ τήν μέγιστη τιμή τοῦ j τήν $j=1$ καί τήν μέγιστη τιμή τοῦ $m_j=1$. Αὐτή εἶναι ἡ

$$|j\, m_j\rangle = |j_1\, j_2\, m_{j_1}\, m_{j_2}\rangle = |j_1\, j_2\, j\, m_j\rangle = |\underbrace{1}_{j}\,\underbrace{1}_{m_j}\rangle$$

Προσέξτε τόν συμβολισμό! Οἱ κβαντικοί ἀριθμοί j_1, j_2 εἶναι σταθεροί καί δέν ἀλλάζουν, στήν προκειμένη περίπτωση δέ εἶναι πάντοτε $1/2, 1/2$. Ἐπειδή δέ μᾶς ἐνοχλοῦν συνεχῶς τούς παραλείπουμε καί γράφουμε ἁπλῶς $|j\, m_j\rangle$. Σκοπός μας εἶναι νά βροῦμε τίς τρεῖς καταστάσεις $|j\, m_j\rangle$, δηλ. τίς $|1\,1\rangle, |1\,-1\rangle$ καί $|1\,0\rangle$. Ἡ $|1\,1\rangle$ (μέγιστο j, μέγιστο m_j) ἀποδεικνύεται ἀμέσως ὅτι εἶναι γινόμενο τῶν δύο καταστάσεων μέ τά μέγιστα m_j, δηλ. $|1\,1\rangle = \alpha(1)\alpha(2) = |1/2\,1/2\rangle|1/2\,1/2\rangle = |1/2\,1/2\,1/2\,1/2\rangle$. Ἡ $\alpha(1)\alpha(2)$ εἶναι ἰδιοκατάστασις τῶν $\hat{J}^2, \hat{J}_z$ καί συγχρόνως ἱκανοποιεῖται ἡ $m_j = m_{j_1} + m_{j_2}$. Τώρα πρέπει νά βροῦμε τίς $|1\,-1\rangle$ καί $|1\,0\rangle$. Ἐπιδρᾶμε τώρα ἐπί τῆς $|1\,1\rangle$ μέ τόν βαθμωτό τελεστή $\hat{J}^-$. Ὑπενθυμίζουμε ὅτι (ἐξ. (31))

$$\hat{J}^-|j\, m_j\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m_j(m_j-1)}\,|j\; m_j-1\rangle$$

μέ

$$\hat{J}^- = \hat{J}_1^- + \hat{J}_2^-$$

χῶρος τοῦ "σωματιδίου" 1

χῶρος τοῦ "σωματιδίου" 2. Ἄρα

$$\hat{J}^-|1\,1\rangle = (\hat{J}_1^- + \hat{J}_2^-)|1/2\,1/2\rangle|1/2\,1/2\rangle$$

$$= \hbar\left\{\sqrt{1/2(1/2+1) - 1/2(1/2-1)}\;|1/2\;1/2-1\rangle|1/2\,1/2\rangle + \sqrt{1/2(1/2+1) - 1/2(1/2-1)}\;|1/2\,1/2\rangle|1/2\;1/2-1\rangle\right\}$$

$$= \hbar\left\{ |\underset{j_1}{1/2}\,\underset{j_2}{1/2}\,\underset{m_{j_1}}{-1/2}\,\underset{m_{j_2}}{1/2}\rangle + |1/2\;1/2\;1/2\;-1/2\rangle \right\}$$

ἢ $\hat{J}^{-}|11\rangle = \hbar\left\{|1/2\;1/2\;-1/2\;1/2\rangle + |1/2\;1/2\;1/2\;-1/2\rangle\right\}$ (85)

Ἀλλά καί εὐθέως μποροῦμε νά γράψουμε καί

$$\hat{J}^{-}|11\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1)-1(1-1)}\;|\underset{j}{1}\,\underset{m_j}{0}\rangle$$

ἢ $\hat{J}^{-}|11\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|10\rangle$ (86)

Σύγκρισις τῶν (85)-(86) μᾶς ὁδηγεῖ στήν

$|10\rangle = 1/\sqrt{2}\left\{|1/2\;1/2\;-1/2\;1/2\rangle + |1/2\;1/2\;1/2\;-1/2\rangle\right\}$ (87)

Ἀκριβῶς μέ τόν ἴδιο τρόπο, ἐνεργώντας δηλ. ἐπί τῆς $|10\rangle$ (ἐξ. (87)) μέ τόν $\hat{J}^{-}$ δυό φορές προκύπτει ἡ τρίτη συνιστῶσα τῆς $|j\,m_j\rangle$

$|1\;-1\rangle = |1/2\;1/2\;-1/2\;-1/2\rangle$ (88)

Συνοψίζουμε τά ἀποτελέσματά μας γιά τήν περίπτωση $j=1$.

$$|\overset{j}{1}\,\overset{m_j}{1}\rangle = |1/2\;1/2\;1/2\;1/2\rangle = |1/2\;1/2\rangle|1/2\;1/2\rangle = \alpha(1)\alpha(2)$$

$$|10\rangle = 1/\sqrt{2}\,|1/2\;1/2\;-1/2\;1/2\rangle + 1/\sqrt{2}\,|1/2\;1/2\;1/2\;-1/2\rangle$$

$$= 1/\sqrt{2}\,|1/2\;1/2\rangle|1/2\;-1/2\rangle + 1/\sqrt{2}\,|1/2\;-1/2\rangle|1/2\;1/2\rangle = 1/\sqrt{2}\left\{\alpha(1)\beta(2) + \beta(1)\alpha(2)\right\}$$

$$|1\;-1\rangle = |1/2\;1/2\;-1/2\;-1/2\rangle = |1/2\;-1/2\rangle|1/2\;-1/2\rangle = \beta(1)\beta(2)$$ (89)

Οἱ καταστάσεις (89), δηλ. οἱ $|11\rangle$, $|10\rangle$, $|1-1\rangle$ θεωροῦνται ὡς οἱ "τριπλή" καταστάσεις $|1\, m_j\rangle$. Μᾶς μένει νά ὑπολογίσουμε τόν γραμμικό συνδυασμό τῆς $|00\rangle \equiv |\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}00\rangle$, ὥστε νά συμπληρωθοῦν οἱ τέσσερις συζευγμένες καταστάσεις. Γιά τόν ὑπολογισμό τῆς $|00\rangle$ δέν μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε τούς βαθμωτούς τελεστές $\hat{J}^{\pm}$ διότι ὑπάρχει μία καί μόνη $|00\rangle$, $j=0$, $m_j=0$ καί προφανῶς $\hat{J}^{\pm}|00\rangle=0$. Ὅμως ἡ $|00\rangle$ θά πρέπει νά εἶναι ὀρθοκανονική ὡς πρός τίς $|11\rangle$, $|10\rangle$ καί $|1-1\rangle$, δηλ. τίς (89). Ὁ μόνος τρόπος γιά νά ἰσχύει αὐτή ἡ ὀρθοκανονικότης εἶναι ὁ γραμμικός συνδυασμός

$$
\begin{aligned}
|00\rangle &= 1/\sqrt{2}\,|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rangle - 1/\sqrt{2}\,|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle \\
&= 1/\sqrt{2}\,|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rangle - 1/\sqrt{2}\,|\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle \\
&= 1/\sqrt{2}\left\{\alpha(1)\beta(2) - \beta(1)\alpha(2)\right\} \qquad (90)
\end{aligned}
$$

Μέ τήν (90) συμπληρώνουμε τίς 4 καταστάσεις. Ἀρχίσαμε δηλ. μέ 4 καταστάσεις τῆς μορφῆς $|j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle = |j_1 m_{j_1}\rangle|j_2 m_{j_2}\rangle$ καί τελειώσαμε μέ 4 καταστάσεις τῆς μορφῆς $|j_1 j_2 j\, m_j\rangle \equiv |j\, m_j\rangle$ οἱ ὁποῖες εἶναι γραμμικοί συνδυασμοί τῶν $|j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle$. Οἱ καταστάσεις (89) ("τριπλή" καταστάσεις) ἔχουν ὅλες τό ἴδιο _μέγεθος_ στροφορμῆς $\sqrt{1(1+1)}\,\hbar$ ἀλλά διαφορετικές προβολές στόν ἄξονα z, $1\hbar$, $0\hbar$ καί $-1\hbar$:

$$
\hat{J}^2 \begin{Bmatrix} |11\rangle \\ |10\rangle \\ |1-1\rangle \end{Bmatrix} = 1(1+1)\hbar^2 \begin{Bmatrix} |11\rangle \\ |10\rangle \\ |1-1\rangle \end{Bmatrix}
$$

$$
\hat{J}_z|11\rangle = 1\hbar|11\rangle,\quad \hat{J}_z|10\rangle = 0\hbar|10\rangle,\quad \hat{J}_z|1-1\rangle = -1\hbar|1-1\rangle
$$

καί βέβαια

$$\hat{J}^2|00\rangle = 0(0+1)\hbar|00\rangle$$
$$\hat{J}_z|00\rangle = 0\,\hbar|00\rangle$$

Ποιοί εἶναι οἱ συντελεστές CG ; Τά προηγούμενα ἀποτελέσματα τά γράφουμε ὑπό μορφήν πίνακος.

Συντελεστές Clebsch-Gordan ὁρισμένων περιπτώσεων
$C_{m_{j_1} m_{j_2}} = \langle j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2} | j_1 j_2 j m_j \rangle$

$j_1=1/2$	$j_2=1/2$	$j=1$			$j=0$
m_{j_1}	m_{j_2}	$m_j=1$	$m_j=0$	$m_j=-1$	$m_j=0$
$1/2$	$1/2$	1			
$1/2$	$-1/2$		$1/\sqrt{2}$		$1/\sqrt{2}$
$-1/2$	$1/2$		$1/\sqrt{2}$		$-1/\sqrt{2}$
$-1/2$	$-1/2$			1	

ἀρχικές καταστάσεις τελικές καταστάσεις

Στό ἀριστερό μέρος τοῦ πίνακος δίνονται οἱ ἀρχικές καταστάσεις καί στό δεξιό οἱ καταστάσεις οἱ ὁποῖες προκύπτουν κατόπιν γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν καταστάσεων τοῦ ἀριστεροῦ μέρους. Π.χ. ἐάν θελήσουμε νά δοῦμε ἀπό τί εἴδους γραμμικούς συνδυασμούς ἀποτελεῖται ἡ κατάστασις $|\underbrace{1}_{j}\underbrace{0}_{m_j}\rangle$. Κάτω ἀπό τήν στήλη $m_j=0$ τῆς περιπτώσεως $j=1$ βρίσκουμε τούς συντελεστές $1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2}$. Τό πρῶτο $1/\sqrt{2}$ πολλαπλασιάζει τίς καταστάσεις $|1/2\;1/2\rangle|1/2\;-1/2\rangle$ $(=\alpha(1)\beta(2))$ τό δεύτερο $1/\sqrt{2}$ τίς καταστάσεις $|1/2\;-1/2\rangle|1/2\;1/2\rangle$ $(=\beta(1)\alpha(2))$ καί ἀθροίζονται μεταξύ τῶν πρώτων, δηλ. $1/\sqrt{2}\,\alpha(1)\beta(2)+1/\sqrt{2}\,\beta(1)\alpha(2)$. Ἡ τελευταία δέν εἶναι παρά ἡ δεύτερη τῶν ἐξ. (89). Ὁμοίως προκύπτουν καί οἱ ὑπόλοιπες καταστάσεις τῆς περιπτώσεως $j_1=1/2$, $j_2=1/2$. Δίνουμε ἀκόμη ἕνα παράδειγμα συντελεστῶν CG ἀπό ἀρχικές καταστάσεις $j_1=1$ καί $j_2=1/2$. Ὁ πίνακας ὁ ὁποῖος ἀκολουθεῖ περιέχει τούς CG συντελεστές οἱ ὁποῖοι ὑπολογίσθηκαν ἀκριβῶς ὅπως προηγουμένως χρησιμοποιώντας τούς τελεστές $J^{\pm}$. Γιά $j_1=1$ καί $j_2=1/2$ ἔχουμε $(2\cdot 1+1)(2\,1/2+1)=6$ ἀρχικές καταστάσεις (ἀσύζευκτες), ἄρα περιμένουμε 6 συζευγμένες καταστάσεις.

$j_1=1$	$j_2=1/2$	$j=3/2$				$j=1/2$	
m_{j_1}	m_{j_2}	$m_j=3/2$	$m_j=1/2$	$m_j=-1/2$	$m_j=-3/2$	$m_j=1/2$	$m_j=-1/2$
1	$1/2$	1					
1	$-1/2$		$\sqrt{1/3}$			$\sqrt{2/3}$	
0	$1/2$		$\sqrt{2/3}$			$-\sqrt{1/3}$	
0	$-1/2$			$\sqrt{2/3}$			$\sqrt{1/3}$
-1	$1/2$			$\sqrt{1/3}$			$-\sqrt{2/3}$
-1	$-1/2$				1		

Ἔχουμε

$$j=j_1+j_2=1+1/2=3/2 \Rightarrow m_j=3/2,\,1/2,\,-1/2,\,-3/2$$

καί

$$j=j_1+j_2-1=1+1/2-1=1/2=|j_1-j_2| \Rightarrow m_j=+1/2,\,-1/2.$$

Οἱ ἀρχικές καταστάσεις εἶναι οἱ $|j_1 m_{j_1}\rangle$ καί $|j_2 m_{j_2}\rangle$. Ἡ περίπτωση μέ τό ὑψηλότερο j εἶναι $j=3/2$ καί προφανῶς $m_j=3/2=m_{j_1}+m_{j_2}=1/2+1$, ἄρα

$$|j\,m_j\rangle=|j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle=|3/2\;3/2\rangle=|1\,1\rangle|1/2\;1/2\rangle$$

$$=|\underset{j_1}{1}\;\underset{j_2}{1/2}\;\underset{m_{j_1}}{1}\;\underset{m_{j_2}}{1/2}\rangle$$

Ἀρχίζοντας φυσικά ἀπό τίς μέγιστες τιμές γράφουμε ἀμέσως τήν κατάσταση $|3/2\ 3/2\rangle$ καί ἐν συνεχείᾳ ἐπιδρῶμε μέ τόν J^- ὅπως πάλι ἔπραξα κ.τ.λ. Τό ἀποτέλεσμα εἶναι ὁ προηγούμενος πίνακας. Χρησιμοποιῶντας τώρα τόν πίνακα γράφουμε τίς 6 κανονικές καταστάσεις

$$\left.\begin{aligned}
|\underset{j}{3/2}\ \underset{m_j}{3/2}\rangle &= |\underset{j_1}{1}\ \underset{m_{j_1}}{1}\rangle|\underset{j_2}{1/2}\ \underset{m_{j_2}}{1/2}\rangle \quad (= |\underset{j_1}{1}\ \underset{j_2}{1/2}\ \underset{m_{j_1}}{1}\ \underset{m_{j_2}}{1/2}\rangle)\\
|3/2\ 1/2\rangle &= 1/\sqrt{3}\,|1\ 1/2\ 1\ {-1/2}\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1\ 1/2\ 0\ 1/2\rangle\\
|3/2\ {-1/2}\rangle &= \sqrt{2/3}\,|1\ 1/2\ 0\ {-1/2}\rangle + \sqrt{1/3}\,|1\ 1/2\ {-1}\ 1/2\rangle\\
|3/2\ {-3/2}\rangle &= |1\ 1/2\ {-1}\ {-1/2}\rangle
\end{aligned}\right\}\ j=3/2 \quad (91)$$

καί

$$\left.\begin{aligned}
|1/2\ 1/2\rangle &= \sqrt{2/3}\,|1\ 1/2\ 1\ {-1/2}\rangle - \sqrt{1/3}\,|1\ 1/2\ 0\ 1/2\rangle\\
|1/2\ {-1/2}\rangle &= \sqrt{1/3}\,|1\ 1/2\ 0\ {-1/2}\rangle - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1\ 1/2\ {-1}\ 1/2\rangle
\end{aligned}\right\}\ j=1/2 \quad (92)$$

Φυσικά ὅλες οἱ καταστάσεις εἶναι ὀρθογώνιες μεταξύ τους, π.χ. $\langle 3/2\ 3/2 | 3/2\ 1/2\rangle = 0$ κ.τ.λ.

Ἡ διαδικασία ὑπολογισμοῦ τῶν συντελεστῶν CG καθώς αὐξάνονται οἱ ἀριθμοί $j_1\,j_2\,(m_{j_1}, m_{j_2})$ γίνεται ὅλο καί πιό περίπλοκη καί σχεδόν πάντοτε παίρνουμε τούς συντελεστές ἀπό πίνακες οἱ ὁποῖοι ἔχουν κατασκευασθεῖ ὅπως προηγουμένως μέσω τῶν βαθμωτῶν τελεστῶν ἤ μέ ἄλλες τεχνικές. Ὁ γενικός τύπος ὁ ὁποῖος παρέχει τούς συντελεστές CG εἶναι ἀρκετά περίπλοκος καί δίνεται στήν σχέση (93) δίχως σχόλια (!)

$$c_{m_{j_1} m_{j_2}} = \langle j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2} | j_1 j_2 j m_j \rangle$$

$$= \delta(m_j, m_{j_1}+m_{j_2}) \left\{ \frac{(j_1+j_2-j)!\,(j+j_1-j_2)!\,(j+j_2-j_1)!\,(2j+1)}{(j+j_1+j_2+1)!} \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \sum_k \frac{(-1)^k \{(j_1+m_{j_1})!\,(j_1-m_{j_1})!\,(j_2+m_{j_2})!\,(j_2-m_{j_2})!\,(j+m_j)!\,(j-m_j)!\}^{1/2}}{k!\,(j_1+j_2-j-k)!\,(j_1-m_{j_1}-k)!\,(j_2+m_{j_2}-k)!\,(j-j_2+m_{j_1}+k)!\,(j-j_1-m_{j_2}+k)!} \qquad (93)$$

μέ $j_1, j_2, j = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, \ldots$ καί

$$\Delta(j_1 j_2 j_3) = \begin{cases} j_1+j_2+j = n \text{ (ἀκέραιος)} \\ \left.\begin{array}{l} j_1+j_2-j \\ j_1-j_2+j \\ -j_1+j_2+j \end{array}\right\} \geq 0 \end{cases} \qquad (82)$$

Ἀνακεφαλαιώνουμε:

Οἱ καταστάσεις $|j_1 j_2 j m_j\rangle$ (συζευγμένη κατάσταση) συνδέονται μέ τίς καταστάσεις $|j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle$ (ἀσύζευκτες καταστάσεις) μέ

$$|j_1 j_2 j m_j\rangle = \sum_{m_{j_1} m_{j_2}} |j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle\langle j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2} | j_1 j_2 j m_j\rangle$$

ὅπου οἱ συντελεστές $\langle j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2} | j_1 j_2 j m_j\rangle$ ὀνομάζονται συντελεστές CG. Οἱ περιορισμοί εἶναι $m_j = m_{j_1}+m_{j_2}$ καί $j = j_1+j_2, j_1+j_2-1, \ldots |j_1-j_2|$. Ὁ κβαντικός ἀριθμός τῆς ὁλικῆς στροφορμῆς j περιορίζεται σέ ἀκέραιες ἤ ἡμι-ἀκέραιες τιμές καί ὁ $m_j = j, j-1, j-2, \ldots -j$ γιά κάθε j. Οἱ καταστάσεις $|j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle$ εἶναι ἰδιοκαταστάσεις τῶν τελεστῶν $\hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2, \hat{J}_{1z}, \hat{J}_{2z}$ καί $\hat{J}_z\ (=\hat{J}_{1z}+\hat{J}_{2z})$ μέ ἰδιοτιμές $j_1(j_1+1)\hbar^2, j_2(j_2+1)\hbar^2, m_{j_1}\hbar, m_{j_2}\hbar$ καί $(m_{j_1}+m_{j_2})\hbar$ ἀντιστοίχως. Οἱ $|j_1 j_2 m_{j_1} m_{j_2}\rangle$ <u>δέν</u> εἶναι ἰδιοσυναρτήσεις τοῦ $\hat{J}^2$. Οἱ καταστάσεις $|j_1 j_2 j m_j\rangle$ εἶναι ἰδιοκαταστάσεις τῶν τελεστῶν

$\hat J_1^2$, $\hat J_2^2$, $\hat J^2$ και $\hat J_z$ με ιδιοτιμές $j_1(j_1+1)\hbar^2$, $j_2(j_2+1)\hbar^2$ $j(j+1)\hbar^2$ και $m_j\hbar$ αντιστοίχως. Οι $|j_1 j_2 j m_j\rangle$ <u>δεν</u> είναι ιδιοκαταστάσεις των $\hat J_{1z}$ και $\hat J_{2z}$.

Παραθέτουμε ένα μικρό δείγμα πινάκων συντελεστών Clebsch-Gordan

$j_1 = \frac{3}{2}$	$j_2 = \frac{1}{2}$	$j = 2$					$j = 1$		
m_1	m_2	$m = 2$	$m = 1$	$m = 0$	$m = -1$	$m = -2$	$m = 1$	$m = 0$	$m = -1$
3/2	1/2	1							
3/2	−1/2		$\sqrt{1/4}$				$\sqrt{3/4}$		
1/2	1/2		$\sqrt{3/4}$				$-\sqrt{1/4}$		
1/2	−1/2			$\sqrt{1/2}$				$\sqrt{1/2}$	
−1/2	1/2			$\sqrt{1/2}$				$-\sqrt{1/2}$	
−1/2	−1/2				$\sqrt{3/4}$				$\sqrt{1/4}$
−3/2	1/2				$\sqrt{1/4}$				$-\sqrt{3/4}$
−3/2	−1/2					1			

$j_1 = \frac{3}{2}$	$j_2 = 1$	$j = \frac{5}{2}$						$j = \frac{3}{2}$				$j = \frac{1}{2}$	
m_1	m_2	$m = \frac{5}{2}$	$m = \frac{3}{2}$	$m = \frac{1}{2}$	$m = -\frac{1}{2}$	$m = -\frac{3}{2}$	$m = -\frac{5}{2}$	$m = \frac{3}{2}$	$m = \frac{1}{2}$	$m = -\frac{1}{2}$	$m = -\frac{3}{2}$	$m = \frac{1}{2}$	$m = -\frac{1}{2}$
3/2	1	1											
3/2	0		$\sqrt{2/5}$					$\sqrt{3/5}$					
3/2	−1			$\sqrt{1/10}$					$\sqrt{2/5}$			$\sqrt{1/2}$	
1/2	1		$\sqrt{3/5}$					$-\sqrt{2/5}$					
1/2	0			$\sqrt{3/5}$					$\sqrt{1/15}$			$-\sqrt{1/3}$	
1/2	−1				$\sqrt{3/10}$					$\sqrt{8/15}$			$\sqrt{1/6}$
−1/2	1			$\sqrt{3/10}$					$-\sqrt{8/15}$			$\sqrt{1/6}$	
−1/2	0				$\sqrt{3/5}$					$-\sqrt{1/15}$			$-\sqrt{1/3}$
−1/2	−1					$\sqrt{3/5}$					$\sqrt{2/5}$		
−3/2	1				$\sqrt{1/10}$					$-\sqrt{2/5}$			$\sqrt{1/2}$
−3/2	0					$\sqrt{2/5}$					$-\sqrt{3/5}$		
−3/2	−1						1						

$j_1 = 1$	$j_2 = 1$	$j = 2$					$j = 1$			$j = 0$
m_1	m_2	$m = 2$	$m = 1$	$m = 0$	$m = -1$	$m = -2$	$m = 1$	$m = 0$	$m = -1$	$m = 0$
1	1	1								
1	0		$\sqrt{1/2}$				$\sqrt{1/2}$			
1	−1			$\sqrt{1/6}$				$\sqrt{1/2}$		$\sqrt{1/3}$
0	1		$\sqrt{1/2}$				$-\sqrt{1/2}$			
0	0			$\sqrt{2/3}$				0		$-\sqrt{1/3}$
0	−1				$\sqrt{1/2}$				$\sqrt{1/2}$	
−1	1			$\sqrt{1/6}$				$-\sqrt{1/2}$		$\sqrt{1/3}$
−1	0				$\sqrt{1/2}$				$-\sqrt{1/2}$	
−1	−1					1				

$j_1 = 2$	$j_2 = \frac{1}{2}$	$j = \frac{5}{2}$						$j = \frac{3}{2}$			
m_1	m_2	$m = \frac{5}{2}$	$m = \frac{3}{2}$	$m = \frac{1}{2}$	$m = -\frac{1}{2}$	$m = -\frac{3}{2}$	$m = -\frac{5}{2}$	$m = \frac{3}{2}$	$m = \frac{1}{2}$	$m = -\frac{1}{2}$	$m = -\frac{3}{2}$
2	1/2	1									
2	−1/2		$\sqrt{1/5}$					$\sqrt{4/5}$			
1	1/2		$\sqrt{4/5}$					$-\sqrt{1/5}$			
1	−1/2			$\sqrt{2/5}$					$\sqrt{3/5}$		
0	1/2			$\sqrt{3/5}$					$-\sqrt{2/5}$		
0	−1/2				$\sqrt{3/5}$					$\sqrt{2/5}$	
1	1/2				$\sqrt{2/5}$					$-\sqrt{3/5}$	
−1	−1/2					$\sqrt{4/5}$					$\sqrt{1/5}$
−2	1/2					$\sqrt{1/5}$					$-\sqrt{4/5}$
−2	−1/2						1				