ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ – SPIN

Κλασσικώς ή στροφορμή $\vec{J}$ ορίζεται από τήν σχέση

$$\vec{J} = \vec{r}\times\vec{p} \qquad (1)$$

όπου $\vec{p}$ ή γραμμική ορμή. Από τήν (1) είναι φανερό ότι τό (ψευδο)διάνυσμα $\vec{J}$ είναι κάθετο στήν επιφάνεια ή οποία ορίζεται από τό διανυσματικό γινόμενο $\vec{r}\times\vec{p}$.
Παίρνουμε τήν παράγωγο της $\vec{J}$ ως πρός τόν χρόνο

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\times\vec{p} + \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = \cancelto{0}{\vec{v}\times(m\vec{v})} + \vec{r}\times\vec{F}$$

Ονομάζοντας τό γινόμενο $\vec{r}\times\vec{F} = \vec{N}$ ροπή (όπου $\vec{F}$ ή δύναμις) ή τελευταία σχέσις γράφεται

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{N} \qquad (2)$$

Η $\vec{J}$ (καθώς καί ή $\vec{N}$ λόγω της (2)) εξαρτώνται από τό σημείο αναφοράς λόγω της $\vec{r}$. Η εξ. (2) μας περιγράφει αμέσως γιά τό πότε ή στροφορμή $\vec{J}$ διατηρείται στήν περίπτωση ενός σωματιδίου:
"Εάν $\vec{N}=0$ ($N_x=N_y=N_z=0$), $\frac{d\vec{J}}{dt}=0 \Rightarrow \vec{J}=$σταθερά".
(Ας ληφθεί υπ' όψιν ότι τό $\vec{N}$ είναι διάνυσμα· είναι δηλ. δυνατόν μία από τίς συνιστώσες π.χ. ή N_y νά είναι μηδέν καί οί άλλες $\neq 0$, τότε ή αντίστοιχος συνιστώσα της στροφορμής, ή J_y διατηρείται ενώ δέν διατηρούνται οί J_x καί J_z).
Πότε είναι λοιπόν $\vec{N}=0$; Γνωρίζουμε ότι στά συντηρητικά συστήματα (καί αυτά μας απασχολούν εδώ) ή δύναμις ορίζεται ως $\vec{F} = -\nabla V$. Εάν τώρα τό δυναμικό είναι

κεντρικοῦ χαρακτῆρος, δηλ. $V=V(r)$ ὅπως τό δυναμικό Coulomb τότε

$$\vec F = -\hat r \frac{dV}{dr}$$

ὅπου $\hat r = \frac{\vec r}{|\vec r|}$ μοναδιαῖο διάνυσμα κατά μῆκος τοῦ $\vec r$. Ἄρα στήν περίπτωση σφαιρικοῦ δυναμικοῦ

$$\vec N = \vec r \times \vec F = -\vec r \times \hat r \frac{dV}{dr} = 0.$$

Σύμφωνα λοιπόν μέ τήν σχέση (2) $\frac{d\vec J}{dt}=0$ ἤ $\vec J$ = σταθερά κινήσεως, ἤ ἡ στροφορμή διατηρεῖται στήν περίπτωση ὅπου τό δυναμικό εἶναι σφαιρικό.
(Ἴσως εἶναι ἐνδιαφέρον στό σημεῖο αὐτό ν' ἀναφέρουμε ὅτι ὁ τόσο γνωστός 2ος νόμος τοῦ Kepler περί πλανητικῆς κινήσεως, ὅτι "τό διάνυσμα κινήσεως καλύπτει ἴσα ἐμβαδά σέ ἴσους χρόνους" εἶναι ἀποτέλεσμα διατηρήσεως τῆς στροφορμῆς, ἤ καλύτερα, γενική ἰδιότης των σφαιρικῶν δυναμικῶν)
Τί συμβαίνει, κλασσικῶς πάντα, μέ περισσότερα τοῦ ἑνός σωματιδίου; Κατ' ἀρχάς ἔχουμε γιά τήν χρονική μεταβολή τῆς ὁρμῆς $\vec P_i$ τοῦ σωματιδίου i

$$\dot{\vec P}_i = \sum_j \vec F_{ji} + \vec F_i^{(\epsilon\xi)} \qquad (3)$$

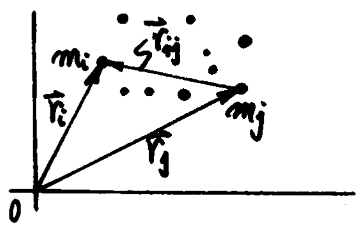
ὅπου $\dot{\vec P}_i = \frac{d\vec P_i}{dt}$. $\vec F_i^{(\epsilon\xi)}$ σημαίνει "ἐξωτερική" δύναμις καί $\vec F_{ji}$ εἶναι ἡ "ἐσωτερική" δύναμις ἡ ὁποία ἀσκεῖται στό σωματίδιο i λόγω ἀλληλεπιδράσεώς του μέ τό σωματίδιο j. Προφανῶς $F_{ii}=0$, δηλ. τό σωματίδιο δέν ἀσκεῖ καμμία δύναμη στόν ἑαυτό του. Ὑποθέτοντας ὅτι οἱ $\vec F_{ij}$ ὑπακούουν στόν τρίτο νόμο τοῦ Newton, ὅτι δηλ. οἱ δύο δυνάμεις οἱ ὁποῖες ἀσκοῦνται στά δύο σωματίδια εἶναι ἴσες καί ἀντίθετες (ἀσθενής νόμος δράσεως-ἀντιδράσεως), σχηματίζουμε τό ἐξωτερικό γινόμενο τῆς (3) μέ $\vec r_i$ κι ἔχουμε:

$$\sum_i \frac{d}{dt}(\vec r_i\times\vec p_i) = \sum_i (\vec r_i \times \dot{\vec p}_i) \equiv \dot{\vec J} = \sum_i \vec r_i\times\vec F_i^{(\varepsilon\xi)} + \sum_{\substack{i,j \\ (i\neq j)}} \vec r_i \times \vec F_{ji}$$

Ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ δευτέρου μέλους μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς ἄθροισμα ζευγῶν τῆς μορφῆς

$$\vec r_i\times\vec F_{ji} + \vec r_j\times\vec F_{ij} = (\vec r_i - \vec r_j)\times\vec F_{ji}$$

λόγω τοῦ τρίτου νόμου τοῦ Newton. Ἀλλά $\vec r_i - \vec r_j = \vec r_{ij}$, (βλ. καί Σχῆμα) ἄρα ἔχουμε ἀθροίσματα τῆς μορφῆς $\vec r_{ij}\times\vec F_{ji}$.



Ἐάν τώρα ἐπί πλέον τῆς ὑποθέσεως ὅτι οἱ δυνάμεις εἶναι ἴσες καί ἀντίθετες, ὑποθέσουμε ὅτι κεῖνται ἐπί τῆς εὐθείας ἡ ὁποία ἑνώνει τά δύο σωματίδια (ὁ ἰσχυρός νόμος δράσεως-ἀντιδράσεως τοῦ Newton) τότε προφανῶς $\vec r_{ij}\times\vec F_{ji}=0$. Ἄρα γιά τήν πρώτη τῶν σχέσεων γράφουμε

$$\frac{d\vec J}{dt} = \sum_i \vec r_i\times\vec F_i^{(\varepsilon\xi)} \left(= \vec N^{(\varepsilon\xi)}\right) \qquad (4)$$

Ἡ σχ. (4) μᾶς λέει ὅτι ἡ στροφορμή $\vec J$ παραμένει σταθερή, εἶναι σταθερά κινήσεως δηλαδή, ἐάν ἡ συνολική (ἐξωτερική) ροπή $\vec N^{(\varepsilon\xi)}$ εἶναι μηδέν.

Σύμφωνα μέ τήν σχέση (1) ἔχουμε γιά τίς συνιστῶσες τῆς στροφορμῆς

$$\left.\begin{aligned} J_x &= y p_z - z p_y \\ J_y &= z p_x - x p_z \\ J_z &= x p_y - y p_x \end{aligned}\right\} \qquad (1a)$$

Ἐάν τώρα ἀντικαταστήσουμε τό σχῆμα $\hat{J} \to \vec{r}\times\frac{\hbar}{i}\nabla \equiv \hat{J}$ γράφουμε

$$\left.\begin{aligned}
\hat{J}_x &= \hbar/i\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\\
\hat{J}_y &= \hbar/i\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\\
\hat{J}_z &= \hbar/i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Μποροῦμε νά δείξουμε ὅτι

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar\hat{J}_k \qquad (6)$$
$$(i,j,k) = (x,y,z)$$

Μποροῦμε ὅμως νά <u>ἀποδείξουμε</u> γενικώτερον ὅτι

$$[x, \hat{p}_x] = i\hbar, \quad [y, \hat{p}_y] = i\hbar, \quad [z, \hat{p}_z] = i\hbar \qquad (7)$$

καί βάσει αὐτῶν νά δείξουμε τίς θεμελιώδεις σχέσεις (6).
Πράγματι:

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = [(y\hat{p}_z - z\hat{p}_y), (z\hat{p}_x - x\hat{p}_z)]$$

$$= [y\hat{p}_z, z\hat{p}_x] - \underbrace{[y\hat{p}_z, x\hat{p}_z]}_{0} - \underbrace{[z\hat{p}_y, z\hat{p}_x]}_{0} + [z\hat{p}_y, x\hat{p}_z]$$

$$= y[\hat{p}_z, z]\hat{p}_x + x\hat{p}_y[z, \hat{p}_z] = -i\hbar y\hat{p}_x + i\hbar x\hat{p}_y$$

$$= i\hbar(x\hat{p}_y - y\hat{p}_x) = i\hbar\hat{J}_z$$ ἤ γενικῶς

$$\boxed{\begin{gathered}[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar\hat{J}_k\\ (i,j,k) = (x,y,z)\end{gathered}} \qquad (6)$$

Οἱ σχέσεις (6) ἀποτελοῦν τίς θεμελιώδεις σχέσεις τῆς στροφορμῆς. Θά "γνωρίσουμε" ὅτι παρακαταρτιστό μέθοδος

εἶναι στροφορμή ἐάν οἱ καρτεσιανές συνιστῶσες τῶν τελεστῶν ὑπακούουν τόν μεταθετικό νόμο (6). Δηλ. ἡ conditio sine qua non ἐάν κάτι εἶναι στροφορμή ἤ ὄχι εἶναι τουλάχιστον ἡ ὑπακοή στάς μεταθέσεις (6).
Κατ' ἀρχάς τό γεγονός ὅτι $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] \neq 0$ σύμφωνα μέ τά προηγούμενα θεωρήματα περί μεταθετῶν σημαίνει ὅτι οἱ τρεῖς συνιστῶσες τῆς στροφορμῆς δέν μποροῦν νά καθορισθοῦν σύγχρονα, ὑπάρχουν σχέσεις "ἀπροσδιοριστίας" μεταξύ τῶν συνιστωσῶν. Ἐάν π.χ. προσδιορίσουμε τήν $\langle J_z \rangle$ οἱ ἄλλες δύο συνιστῶσες τῆς στροφορμῆς $\langle J_y \rangle$ καί $\langle J_x \rangle$ δέν ἔχουν σαφῶς καθορισμένες τιμές. Γνωρίζουμε ἤδη ὅμως ὅτι $[\hat{J}^2, \hat{J}_i] = 0$, $i = x, y, z$ καί ἐάν ἐπιλέξουμε $i = z$, τότε οἱ τελεστές $\hat{J}^2$ καί $\hat{J}_z$ μποροῦν νά ἔχουν κοινό (καί πλῆρες) σύνολο ἰδιοσυναρτήσεων. Ἕνα τέτοιο πλῆρες σύνολο ἰδιοσυναρτήσεων στήν περίπτωση ὅπου $\vec{J}$ εἶναι ἡ τροχιακή στροφορμή εἶναι οἱ σφαιρικές ἁρμονικές Y_{jm_j}:

$$\hat{J}^2 Y_{jm_j} = j(j+1)\hbar^2 Y_{jm_j} \quad \left(\hat{J}^2 |j m_j\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j m_j\rangle \right.$$

καί

$$\hat{J}_z Y_{jm_j} = m_j \hbar Y_{jm_j} \quad \left. \hat{J}_z |j m_j\rangle = m_j \hbar |j m_j\rangle \right)$$

ὅπου $j = 0, 1, 2, 3, \ldots$ καί $m_j = -j, -j+1, \ldots j-1, j$

Θά δείξουμε μέ πολύ γενικό τρόπο ὅτι οἱ τιμές αὐτές τῶν κβαντικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἐλλιπεῖς, ἤ ὅτι γιά τελεστές τῶν ὁποίων οἱ μεταθέτες ἱκανοποιοῦν τίς σχέσεις (6) οἱ κβαντικοί ἀριθμοί j καί m_j παίρνουν ὄχι μόνον ἀκέραιες τιμές ἀλλά καί ἡμιπεριττές. Ὁρίζουμε τούς βαθμωτούς τελεστές $\hat{J}_+$ καί $\hat{J}_-$ μέ τίς σχέσεις:

$$\hat{J}^{+} \equiv \hat{J}_x + i\hat{J}_y \,, \quad \hat{J}^{-} \equiv \hat{J}_x - i\hat{J}_y \qquad (7)$$

Από τις (7) προκύπτει αμέσως ότι

$$\left.\begin{aligned} \hat{J}_x &= 1/2\,(\hat{J}^{+} + \hat{J}^{-}) \\ \hat{J}_y &= 1/2i\,(\hat{J}^{+} - \hat{J}_{-}) \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Επίσης $[\hat{J}^{+}, \hat{J}_z] = [\hat{J}_x, \hat{J}_z] + i[\hat{J}_y, \hat{J}_z] = -i\hbar\hat{J}_y - \hbar\hat{J}_x = -\hbar(\hat{J}_x + i\hat{J}_y)$

ή

$$\left.\begin{aligned} &[\hat{J}^{+}, \hat{J}_z] = -\hbar\hat{J}^{+} \,, \text{ όμοιως} \\ &[\hat{J}^{-}, \hat{J}_z] = \hbar\hat{J}^{-} \\ &[\hat{J}^{+}, \hat{J}^{-}] = 2\hbar J_z \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

και

$$[\hat{J}^2, \hat{J}^{+}] = [\hat{J}^2, \hat{J}^{-}] = 0 \qquad (10)$$

Άλλες χρήσιμες σχέσεις των βαθμωτών τελεστών είναι

$$\begin{aligned} \hat{J}^{-}\hat{J}^{+} &= (\hat{J}_x - i\hat{J}_y)(\hat{J}_x + i\hat{J}_y) = \hat{J}_x^2 + i\hat{J}_x\hat{J}_y - i\hat{J}_y\hat{J}_x + \hat{J}_y^2 \\ &= \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + i[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 + i(i\hbar\hat{J}_z) \,, \text{ ή} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{J}^{-}\hat{J}^{+} &= \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar\hat{J}_z \,, \text{ όμοιως} \\ \hat{J}^{+}\hat{J}^{-} &= \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 + \hbar\hat{J}_z \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Θα πρέπει ν' αναφερθεί επίσης ότι οι τελεστές $\hat{J}^{+}, \hat{J}^{-}$ <u>δεν</u> είναι Ερμιτιανοί.† Θα προχωρήσουμε τώρα στην γενική απόδειξη περί επιτρεπτών κβαντικών αριθμών τελεστών των οποίων οι μεταθέτες ικανοποιούν τις Εξ. (6) καθώς και στην δικαιολόγηση του ονόματος "βαθμωτός" τελεστής.

Κατ' ἀρχάς ἀποδείξαμε ὅτι οἱ σύγχρονες ἰδιοκαταστάσεις τῶν $\hat{J}^2$ καί $\hat{J}_z$ χαρακτηρίζονται ἀπό δύο κβαντικούς ἀριθμούς, τούς ὁποίους πρός τό παρόν ὀνομάζουμε N καί M. Ἄρα οἱ κοινές ἰδιοκαταστάσεις εἶναι $|N,M\rangle$. Ὁρίζουμε τό M μέσω τῆς ἐξ. (12)

$$\hat{J}_z|N,M\rangle = M\hbar\,|N,M\rangle \qquad (12)$$

Ἡ ἐξ. (12) μᾶς λέει ὅτι ἡ $M\hbar$ εἶναι ἰδιοτιμή τοῦ τελεστοῦ $\hat{J}_z$ καί εἶναι ἀναλυτικῶς ἐξίσωσις διαστάσεων. Ὁ μόνος περιορισμός τόν ὁποῖο ἡ (12) θέτει στό M εἶναι ὅτι πρέπει νά εἶναι πραγματικός ἀριθμός διότι ὁ $\hat{J}_z$ εἶναι Ἑρμιτιανός.
Ἐπειδή $[\hat{J}^2, \hat{J}_z]=0$ γράφουμε

$$\hat{J}^2|N,M\rangle = \hbar^2 f(N,M)\,|N,M\rangle \qquad (13)$$

ὅπου $f(N,M)$ ἀδιάστατη συνάρτησις τῶν N καί M, πραγματική ὅμως διότι ὁ $\hat{J}^2$ τελεστής Ἑρμιτιανός, καθώς ἐπίσης καί $f(N,M)\hbar^2 \geq 0$ ἤ $f(N,M) \geq 0$. Ἔχουμε τώρα

$$\langle N,M|\hat{J}^2-\hat{J}_z^2|N,M\rangle = \langle N,M|\,f(N,M)\hbar^2 - M^2\hbar^2|N,M\rangle =$$

$$=\{f(N,M)-M^2\}\hbar^2,$$ λόγω τῶν (12), (13) καί $\langle N,M|N,M\rangle=1$.

Ἐπίσης

$$\langle N,M|\hat{J}^2-\hat{J}_z^2|N,M\rangle = \langle N,M|\hat{J}_x^2+\hat{J}_y^2|N,M\rangle = \langle N,M|\hat{J}_x^2|N,M\rangle +$$

$$\langle N,M|\hat{J}_y^2|N,M\rangle \geq 0.$$ Σύγκρισις τῶν δύο τελευταίων σχέσεων μᾶς λέει ὅτι

$$\{f(N,M)-M^2\}\hbar^2 \geq 0 \Rightarrow f(N,M)\geq M^2 \qquad (14)$$

Ἄς θεωρήσουμε τώρα τούς βαθμωτούς τελεστές καί ἄς γράψουμε ἀπ' ἀρχήν ὅτι $[\hat{J}^2, \hat{J}_\pm]=0$.

Έχουμε $\hat{J}^+\hat{J}^2|N,M\rangle = \hbar^2 f(N,M)\hat{J}^+|N,M\rangle = \hat{J}^2\hat{J}^+|N,M\rangle$ ή

$$\hat{J}^2\left(\hat{J}^+|N,M\rangle\right) = \hbar^2 f(N,M)\left(\hat{J}^+|N,M\rangle\right) \qquad (15)$$

ή ότι η κατάσταση $\hat{J}^+|N,M\rangle$ είναι ιδιοκατάσταση του $\hat{J}^2$ με την αυτή ιδιοτιμή $\hbar^2 f(N,M)$ ως η $|N,M\rangle$. Αυτό φυσικά συμβαίνει διότι οι $\hat{J}^2$ και $\hat{J}^+$ (ή $\hat{J}^-$) μετατίθενται. Δηλ. η κατάσταση $\hat{J}^+|N,M\rangle$ έχει την αυτή στροφορμή $\hbar^2 f(N,M)$ μετά της $\hat{J}^2$. Δεν συμβαίνει το ίδιο με τον τελεστή $\hat{J}_z$ διότι $[\hat{J}^+, \hat{J}_z] \neq 0$, εξ. (9): οι καταστάσεις $\hat{J}^+|N,M\rangle$ και $|N,M\rangle$ αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές ως προς $\hat{J}_z$. Ρωτάμε λοιπόν "σε ποιά ιδιοτιμή του $\hat{J}_z$ αντιστοιχεί η κατάσταση $\hat{J}^+|N,M\rangle$"; Έχουμε

$$\hat{J}_z\hat{J}^+|N,M\rangle = \left\{\hat{J}^+\hat{J}_z + [\hat{J}_z,\hat{J}^+]\right\}|N,M\rangle = \left\{\hat{J}^+\hat{J}_z + \hbar\hat{J}^+\right\}|N,M\rangle$$

$$(\text{λόγω της } (9)) = \left(\hat{J}^+ M\hbar + \hbar\hat{J}^+\right)|N,M\rangle = (M+1)\hbar\left(\hat{J}^+|N,M\rangle\right) \qquad (16)$$

Λόγω της (12) $\hat{J}_z|N,M+1\rangle = (M+1)\hbar|N,M+1\rangle$. Σύγκρισις της τελευταίας με την (16) μας διαβεβαιώνει ότι

$$\hat{J}^+|N,M\rangle = \hbar C^+_{N,M}|N,M+1\rangle \qquad (17)$$

όπου ο συντελεστής (άγνωστος ακόμη) $C^+_{N,M}$ είναι αδιάστατη ποσότης. Η εξ. (17) δικαιολογεί το επίθετο "βαθμωτός", ο $\hat{J}^+$ αυξάνει το M κατά μονάδα. Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$\hat{J}^-|N,M\rangle = \hbar C^-_{N,M}|N,M-1\rangle \qquad (18)$$

Οἱ τελεσταὶ $\hat{J}^{\pm}$ καλοῦνται καὶ τελεσταὶ "μετατοπίσεως", εἰδικώτερα ὁ $\hat{J}^{+}$ τελεστὴς "ἀνυψώσεως" καὶ ὁ $\hat{J}^{-}$ τελεστὴς "μειώσεως".

Χρησιμοποιοῦντες τὸν $\hat{J}^{+}$ ($\hat{J}^{-}$) εἶναι δυνατὸν ν' αὐξάνουμε (ἐλαττώνουμε) <u>συνεχῶς</u> κατὰ μονάδα τὸν ἀριθμὸ M. Ἀλλὰ ἡ ἐξ. (14) μᾶς λέει ὅτι ὁ M^2 δὲν μπορεῖ ποτὲ νὰ ὑπερβῇ τὴν $f(N,M)$ (αὐτὸ βέβαια ἁπλῶς σημαίνει ὅτι μία συνιστῶσα τῆς στροφορμῆς, ἔστω ἡ $\langle J_z^2\rangle$ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπερβῇ τὴν ὁλικὴ στροφορμὴ $\langle J^2\rangle$). Ἄρα λόγω τοῦ περιορισμοῦ (14) θὰ ὑπάρχῃ κάποια κατάστασις μεγίστου $M=\bar{M}$. Δὲν ὑπάρχει δηλ. κατάστασις μὲ M μεγαλύτερο τοῦ $\bar{M}$, ἄρα

$$\hat{J}^{+}|N,\bar{M}\rangle = 0 \tag{19}$$

ἢ

$$\hat{J}^{-}\hat{J}^{+}|N,\bar{M}\rangle = 0$$ καὶ λόγω τῆς (11)

$$(\hat{J}^2-\hat{J}_z^2-\hbar\hat{J}_z)|N,\bar{M}\rangle = 0$$ ἢ

$$\hat{J}^2|N,\bar{M}\rangle = (\hat{J}_z^2+\hbar\hat{J}_z)|N,\bar{M}\rangle = (\bar{M}^2\hbar^2+\bar{M}\hbar^2)|N,\bar{M}\rangle$$

$$= \bar{M}(\bar{M}+1)\hbar^2|N,\bar{M}\rangle$$

ὅμως $\hat{J}^2|N,\bar{M}\rangle = f(N,\bar{M})\hbar^2|N,\bar{M}\rangle$, ἐξ. (13). Σύγκρισις τῶν δύο τελευταίων μᾶς παρέχει

$$f(N,\bar{M})\cancel{\hbar^2} = \bar{M}(\bar{M}+1)\cancel{\hbar^2} \tag{20}$$

Ἡ ἐξ. (20) μᾶς λέει ὅτι ἡ συνάρτησις $f(N,\bar{M})$ εἶναι συνάρτησις μόνον τοῦ $\bar{M}$, δηλ. μόνον τῆς μεγίστης ἀξίας τοῦ M. Τώρα ἐπειδὴ $[\hat{J}^{-},\hat{J}^2]=0$ ὅταν ὁ τελεστὴς $\hat{J}^{-}$ ἐπιδρᾷ δὲν ἐπηρεάζει τὴν ἰδιοτιμὴ τοῦ $\hat{J}^2$. Σύμφωνα ὅμως μὲ τὴν ἐξ. (18) ἐπίδραση τοῦ $\hat{J}^-$ ἐπί τοῦ $|N,\bar{M}\rangle$ παράγει ἰδιοκαταστάσεις τοῦ τύπου $|N,\bar{M}-1\rangle$, $|N,\bar{M}-2\rangle$ κ.τ.λ. Ὅλες αὐτές οἱ καταστάσεις ἀντιστοιχοῦν στήν αὐτή τιμή τῆς $f(N,M)$ καί συγκεκριμένα τῆς $\bar{M}(\bar{M}+1)$. Ἄρα γιά δεδομένη μέγιστη τιμή τοῦ $M=\bar{M}$ ἔχουμε

$$\hat{J}^2|N,M\rangle = \hbar^2\bar{M}(\bar{M}+1)|N,M\rangle, \quad N=\bar{M},\bar{M}-1,\dots \qquad (21)$$

καί τό μέγεθος τῆς στροφορμῆς προσδιορίζεται ἀπό τήν τιμή $\bar{M}$ καί μόνον. Χρησιμοποιοῦμε τώρα τόν κβαντικό ἀριθμό N. Θέτουμε $N=\bar{M}$, ἄρα

$$\hat{J}^2|\bar{M},M\rangle = \hbar^2\bar{M}(\bar{M}+1)|\bar{M},M\rangle, \quad M=\bar{M},\bar{M}-1,\dots$$

Ἀλλάζοντας ἁπλῶς σύμβολο καί θέτοντας $\bar{M}=j$ καί $M=m_j$, ἀπό τήν τελευταία σχέση παίρνουμε:

$$\hat{J}^2|j,m_j\rangle = j(j+1)\hbar^2|j,m_j\rangle \qquad (22)$$
$$m_j = j,\ j-1,\ j-2\dots$$

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ ἀριθμός j εἶναι ὁ μέγιστος m_j. Ἀκόμη ὅμως δέν γνωρίζουμε τούς περιορισμούς ἐπί τῶν j καί m_j· τό μόνο τό ὁποῖο γνωρίζουμε εἶναι ὅτι $m_j^2 \leq f$, ἐξ. (14). Ἐπίσης δέν ξέρουμε τίποτε ὡς πρός τίς ποσότητες C^+ καί C^- τῶν ἐξ. (17) καί (18) ἀντιστοίχως.

Λόγω τῆς ἐξ. (11) ἔχουμε

$$\hat{J}^-\hat{J}^+|j,m_j\rangle = (\hat{J}^2-\hat{J}_z^2-\hbar\hat{J}_z)|j,m_j\rangle = \{\hbar^2 j(j+1)-m_j^2\hbar^2$$

$$-m_j\hbar^2\}|j,m_j\rangle = \hbar^2\{j(j+1)-m_j(m_j+1)\}|j,m_j\rangle \quad \text{ἤ}$$

$$\langle j,m_j|\hat{J}^-\hat{J}^+|j,m_j\rangle = \hbar^2\{j(j+1)-m_j(m_j+1)\} \qquad (23)$$

Ἀπό τίς ἐξ. (17) καί (18) καί (23) ἔπεται

$$\langle j,m_j|\hat{J}^-\underbrace{\hat{J}^+|j,m_j\rangle}_{\text{ἐξ. (17)}} = \langle j,m_j|\hat{J}^-\hbar C^+_{j,m_j}|j,m_j+1\rangle$$

$$= \hbar C^+_{j,m_j}\langle j,m_j|\underbrace{\hat{J}^-|j,m_j+1\rangle}_{\text{ἐξ. (18)}} = \hbar C^+_{j,m_j}\langle j,m_j|\hbar C^-_{j,m_j+1}|j,m_j+1-1\rangle$$

$$= \hbar^2 C^+_{j,m_j} C^-_{j,m_j+1}\langle j,m_j|j,m_j\rangle = \hbar^2 C^+_{j,m_j}C^-_{j,m_j}$$

Διά συγκρίσεως τῆς ἐξισώσεως μέ τήν (23) παίρνουμε

$$C^+_{j,m_j}C^-_{j,m_j+1}\cancel{\hbar^2} = \{j(j+1)-m_j(m_j+1)\}\cancel{\hbar^2} \qquad (24)$$

Ρωτᾶμε τώρα ἐάν ὑπάρχει ἄλλη σχέση πού συνδέει τούς συντελεστές C^+_{j,m_j} καί C^-_{j,m_j}. Ἀπό τήν (18) ἔχουμε

$$\langle j,m_j|\hat{J}^-|j,m_j+1\rangle = \hbar C^-_{j,m_j+1}\langle j,m_j|j,m_j\rangle = \hbar C^-_{j,m_j+1} \qquad (25)$$

Ἐπίσης

$$\langle j,m_j|\hat{J}^-|j,m_j+1\rangle = \langle j,m_j|\hat{J}_x - i\hat{J}_y|j,m_j+1\rangle$$

$$= \langle j,m_j|\hat{J}_x|j,m_j+1\rangle - i\langle j,m_j|\hat{J}_y|j,m_j+1\rangle$$

$$= \langle j,m_j+1|\hat{J}_x|j,m_j\rangle^* - i\langle j,m_j+1|\hat{J}_y|j,m_j\rangle^*.$$

Ἡ τελευταία σχέση ἰσχύει διότι οἱ τελεστές $\hat{J}_x, \hat{J}_y$ εἶναι Ἑρμιτιανοί. Ἄρα

$$\langle j,m_j|\hat{J}^-|j,m_j+1\rangle = \{\langle j,m_j+1|\hat{J}_x|j,m_j\rangle + i\langle j,m_j+1|\hat{J}_y|j,m_j\rangle\}^*$$

$$=\langle j,m_j+1|(\hat{J}_x+i\hat{J}_y)|j,m_j\rangle^* = \langle j,m_j+1|\hat{J}^+|j,m_j\rangle^* \qquad (26)$$

Από την εξ. (17) παίρνουμε

$$\langle j,m_j+1|\hat{J}^+|j,m_j\rangle = \hbar C^+_{j,m_j}\langle j,m_j+1|j,m_j+1\rangle = \hbar C^+_{j,m_j} \qquad (27)$$

Συνδυασμός των (27), (26) και (25) μας δίνει

$$\hbar C^{+\,*}_{j,m_j} = \langle j,m_j|\hat{J}^-|j,m_j+1\rangle = \hbar C^-_{j,m_j+1}$$ ή

$$C^-_{j,m_j+1} = C^{+\,*}_{j,m_j} \qquad (28)$$

Από τις (24), (28) παίρνουμε

$$C^+_{j,m_j}\,C^{+\,*}_{j,m_j} = |C^+_{j,m_j}|^2 = j(j+1)-m_j(m_j+1)$$

ή (εκτός από κάποια "αδιάφορη" φάση)

$$\left.\begin{aligned} C^+_{j,m_j} &= \left[\,j(j+1)-m_j(m_j+1)\right]^{1/2} \\ C^-_{j,m_j} &= C^{+\,*}_{j,m_j-1} = \left[\,j(j+1)-m_j(m_j-1)\right]^{1/2} \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Απομένει να προσδιορίσουμε τι είδους τιμές επιτρέπονται για τους κβαντικούς αριθμούς j και m_j. Έστω ότι η ελαχίστη τιμή του $m_j = \underline{M}$. Όταν ο τελεστής $\hat{J}^-$ δρα επί της καταστάσεως $|j,\underline{M}\rangle$ πρέπει να την μηδενίζει διότι δεν υπάρχει χαμηλότερη τιμή, άρα

$$\hat{J}^-|j,\underline{M}\rangle = 0$$

και $\langle j,\underline{M}-1|\hat{J}^-|j,\underline{M}\rangle = 0$, αλλά λόγω της (18)

$$\langle j, \underline{M}-1 | \hat{J}^- | j, \underline{M} \rangle = 0 = \hbar C^-_{j,\underline{M}} \Rightarrow C^-_{j,\underline{M}} = 0 \, ,$$

καὶ λόγω τῆς (29)

$$\left[j(j+1) - \underline{M}(\underline{M}-1) \right]^{1/2} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\underline{M} = -j}}$$

Δείξαμε ὅτι ἡ κλίμακα ὡς πρὸς m_j κινεῖται κατὰ μονάδα (±1, ἐξ. (17), (18)) καὶ ὅτι ἡ μεγίστη τιμή εἶναι $m_j = \overline{M} = j$, ἐνῶ ἡ ἐλαχίστη $m_j = \underline{M} = -j$. Ὁ μόνος τρόπος σχηματισμοῦ αὐτοῦ τοῦ εἴδους συμμετρικῆς (γύρω ἀπὸ τὸ μηδέν) κλίμακος εἶναι ὁ περιορισμὸς τοῦ j (καὶ αὐτομάτως βεβαίως τοῦ m_j) σὲ δύο μόνον εἴδη ἀριθμῶν: <u>ἀκεραίων</u> ($j = 0, 1, 2, 3 \dots$) ἢ <u>ἡμι-ἀκεραίων</u> ($j = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$). Ἐὰν π.χ. $j = 3$ τότε $m_j = 3, 2, 1, 0, 1, \underline{0}, -1, -2, -3$, $2j+1 = 2 \times 3 + 1 = 7$ τιμές· ἐὰν $j = 5/2$, $m_j = 5/2, 3/2, 1/2, -1/2, -3/2, -5/2$, $2j+1 = 2 \times 5/2 + 1 = 6$ τιμές. Δὲν ὑπάρχει ἄλλη περίπτωσις.

Μὲ τὶς ἐξισώσεις οἱ ὁποῖες ἀκολουθοῦν ὁλοκληρώνουμε τὴ γενική μας συμπέρασματα ὅταν ἔχουμε τελεστές οἱ ὁποῖοι ὑπακούουν στὶς σχέσεις (6)

$$\left.\begin{aligned} &\hat{J}^2 |j, m_j\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j, m_j\rangle \\ &\hat{J}_z |j, m_j\rangle = m_j \hbar |j, m_j\rangle \\ &\text{μέ } j = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots \text{ καὶ } m_j = -j, -j+1, \dots j-1, j \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

$$\left.\begin{aligned} &\hat{J}^+ |j, m_j\rangle = +\hbar \sqrt{j(j+1) - m_j(m_j+1)} \, |j, m_j+1\rangle \\ &\hat{J}^- |j, m_j\rangle \underset{\text{σύμβασις}}{=} +\hbar \sqrt{j(j+1) - m_j(m_j-1)} \, |j, m_j-1\rangle \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Ἀπό τίς (31) τά ἀντίστοιχα μητροστοιχεῖα τῶν $\hat{J}^+$ καί $\hat{J}^-$ εἶναι

$$\left.\begin{aligned} \langle j, m_j+1|\hat{J}^+|j,m_j\rangle &= \hbar\sqrt{j(j+1)-m_j(m_j+1)} \\ \langle j, m_j-1|\hat{J}^-|j,m_j\rangle &= \hbar\sqrt{j(j+1)-m_j(m_j-1)} \end{aligned}\right\} \quad (31a)$$

Ὁρισμένες παρατηρήσεις στό σημεῖο αὐτό εἶναι ἀπαραίτητες. Οἱ σχέσεις (30) καί (31) εἶναι τελείως γενικές καί βασίζονται μόνον στούς μεταθέτες (6) καί ὅτι ἡ στροφορμή $\hat{J}$ εἶναι τελεστής Ἑρμιτιανός. Ἐξισώσεις τοῦ τύπου (30) ἀλλά μέ τό j νά παίρνη μόνο ἀκέραιες καί θετικές τιμές συναντήσαμε στά προηγούμενα κεφάλαια στήν περίπτωση τῆς τροχιακῆς στροφορμῆς. Ἐκεῖ οἱ ἀκέραιες τιμές προέκυπταν λόγω τῶν κυκλικῶν ὁριακῶν συνθηκῶν ἐπί τῶν κυματοσυναρτήσεων. Θά δοῦμε ὅτι στήν περίπτωση ὅπου δέν εἶναι δυνατή ἡ ἐπιβολή ἐπί πλέον περιορισμῶν (ἐκτός τῶν μεταθετῶν (6)) στό φυσικό πρόβλημα θά πρέπει ἀναγκασμένα νά θεωρήσουμε καί τίς ἡμι-ἀκέραιες τιμές. Αὐτό ἀκριβῶς θά γίνη στήν περίπτωση τῆς στροφορμῆς spin. Μιά τελευταία παρατήρηση ἐπί τῶν συμβολισμῶν. Γενικῶς τήν στροφορμή τήν παριστάνουμε μέ $\hat{J}$ ($\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z$) καί τούς ἀντίστοιχους κβαντικούς ἀριθμούς μέ j καί m_j. Στήν περίπτωση τῆς τροχιακῆς στροφορμῆς χρησιμοποιοῦμε τό γράμμα $\hat{L}$ ($\hat{L}_x$, $\hat{L}_x$, $\hat{L}_z$) μέ τούς κβαντικούς ἀριθμούς l καί m_l. Τέλος στήν περίπτωση τῆς "ἰδιοστροφορμῆς", δηλ. τοῦ spin τό σύμβολό μας θά εἶναι $\hat{S}$ ($\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$) καί οἱ κβαντικοί ἀριθμοί s καί m_s. Στήν περίπτωση τοῦ spin s δέν θά πρέπει νά γίνη σύγχυση μέ τήν κατάσταση $s=l=0$ τῆς τροχιακῆς στροφορμῆς.

Spin

Τό 1925 οἱ Uhlenbeck καί Goudsmidt, κατόπιν ὡρισμένων πειραμάτων ἱστορικῆς πλέον σημασίας στήν ὁριοθέτηση τῶν ἰδεῶν τῆς φυσικῆς, προτείνανε τήν ὕπαρξη "ἐσωτερικῆς στροφορμῆς" ἤ "αὐτοστροφορμῆς" ἤ καλλίτερα spin γιά τό ἠλεκτρόνιο. Ἡ στροφορμή spin τοῦ ἠλεκτρονίου χαρακτηρίζεται ἀπό κβαντικό ἀριθμό spin 1/2. Τό spin ἀποτελεῖ ἐγγενῆ ἰδιότητα κάθε σωματιδίου ὅπως π.χ. τό φορτίο γιά τό ἠλεκτρόνιο ἤ τό πρωτόνιο. Τό spin εἶναι ἀριθμός ἀκέραιος ἤ ἡμι-ἀκέραιος· π.χ. τό φωτόνιο γ (τό "σωματίδιο" τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου) ἔχει spin 1 τό βαρυτόνιο (τό "σωματίδιο" τοῦ βαρυτικοῦ πεδίου) 2, τά π μεσόνια ($\pi^\pm$, π^0) 0. Τό ἠλεκτρόνιο, πρωτόνιο, νετρόνιο ἔχουν spin 1/2. Σωματίδια μέ spin ἀκέραιο ἀριθμό καλοῦνται Μποζόνια (ἀκολουθοῦν στατιστική Bose-Einstein) ἐνῶ σωματίδια μέ ἡμι-ἀκέραιο ἀριθμό spin καλοῦνται Φερμιόνια (ἀκολουθοῦν στατιστική Fermi-Dirac). Ἡ διχοτόμησις αὐτή τῆς φύσεως σέ δύο εἴδη σωματιδίων εἶναι ἀπόλυτη καί μέχρι τώρα δέν ὑπάρχει καμμία ἐξαίρεσις. Τά δύο εἴδη τῶν σωματιδίων ἀκολουθοῦν θεμελιωδῶς διαφορετική συμπεριφορά· ἐμᾶς οὐσιαστικῶς μᾶς ἐνδιαφέρουν τά ἠλεκτρόνια τά ὁποῖα εἶναι φερμιόνια, γι' αὐτό θά μᾶς ἀπασχολήσουν οἱ μαθηματικές ἰδιότητες σωματιδίων μέ spin 1/2.

Τώρα στήν κλασσική φυσική σῶμα τό ὁποῖο φέρει ἠλεκτρικό φορτίο καί συγχρόνως περιστρέφεται (ἔχει δηλ. στροφορμή) ἀποδεικνύεται ὅτι ἔχει καί μαγνητική ῥοπή μ. Αὐτό εἶναι κατανοητό διότι ἡ κίνησις φορτίου δημιουργεῖ μαγνητικό πεδίο καί ἡ μαγνητική διπολική ῥοπή μ ἐκφράζει τήν ὕπαρξη τοῦ πεδίου. Κλασσικῶς (καί ὑπό ὡρισμένες προϋποθέσεις) ὅτι $$\vec{\mu} = \sum_i \frac{q_i}{2M_i c}\vec{J}_i \qquad (32)$$

ὅπου τό ἄθροισμα ἐπεκτείνεται σέ ὅλα τά σωματίδια τοῦ μακροσκοπικοῦ σώματος, q_i, M_i τό φορτίο καί ἡ μᾶζα τοῦ σωματιδίου i, c ἡ ταχύτης τοῦ φωτός (θέμα μονάδων) καί $\vec{J}_i$ τό διάνυσμα τῆς στροφορμῆς τοῦ σωματιδίου i. Ἐάν ὅλα τά κινούμενα σωματίδια ἔχουν τόν αὐτό λόγο φορτίου πρός μᾶζα, δηλ. $q_i/M_i = q/M$ ἡ μαγνητική ροπή γράφεται

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2Mc}\sum_i \vec{J}_i = \frac{q}{2Mc}\vec{J} \qquad (33)$$

ὅπου $\vec{J}$ εἶναι ἡ ὁλική στροφορμή. Σημειώνουμε δύο πράγματα: πρῶτον γιά τήν ἀπόδειξη τῆς ἐξ. (33) ὑποθέσαμε ὅτι τό μακροσκοπικό σῶμα ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα ὁρισμένο πλῆθος σωματιδίων, ἔχει δηλ. <u>δομή</u>, δεύτερον ἡ (33) μᾶς λέει ὅτι μαγνητική διπολική ροπή $\vec{\mu}$ εἶναι <u>ἀνάλογη</u> τῆς στροφορμῆς. Τί συμβαίνει στόν κβαντικό χῶρο; μποροῦμε νά μεταφέρουμε τήν ἐξ. (33) αὐτούσια; Ἡ ἀπάντηση εἶναι καί ναί καί ὄχι. Ἄν π.χ. $\vec{J} = \vec{L}$ ὅπου $\vec{L}$ ἡ τροχιακή στροφορμή τοῦ ἠλεκτρονίου τότε ἡ μαγνητική διπολική ροπή $\vec{\mu}_L$ ἡ ὁποία συνδέεται μέ τήν τροχιακή στροφορμή ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$$\hat{\mu}_L = -\frac{e}{2mc}\hat{L} \left(= \frac{-e\hbar}{2mc}\hat{L} \right) \qquad (34)$$

ἀδιάστατη ποσότης.

Παρατηροῦμε πλήρη συμφωνία τῆς (34) μέ τήν (33). Τό ἀρνητικό σημεῖο ὀφείλεται <u>στό</u> ἀρνητικό φορτίο τοῦ ἠλεκτρονίου καί βεβαίως ἡ στροφορμή $\vec{J}$ εἶναι τροχιακῆς στροφορμῆς στήν σχέση (34). Εἶναι φυσικό τώρα νά ρωτήσουμε ἐάν μποροῦμε νά προεκτείνουμε τήν (33) στόν χῶρο στροφορμῆς spin.

Γιά νά συνδέσουμε τήν στροφορμή spin μέ τήν διπολική ροπή χρειαζόμαστε τήν "ἐσωτερική δομή" τοῦ ἠλεκτρονίου. Τά πειραματικά μας δεδομένα μᾶς διαβεβαιώνουν ὅτι τό ἠλεκτρόνιο εἶναι "φερμιόνιο" δηλ. σωματίδιο ἄνευ δομῆς. Δέν εἶναι δυνατόν νά χρησιμοποιήσουμε τόν ἴδιο τρόπο σκέψεως πού ἀκολουθήσαμε στήν παραγωγή τῆς ἐξ. (33). Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ διπολική ροπή τοῦ ἠλεκτρονίου λόγω spin ἀποδίδεται ἀπό τήν σχέση

$$\hat{\vec{\mu}}_s = -g_e \frac{e\hbar}{2mc}\hat{\vec{S}} \qquad (35)$$

Ἀπό τήν (35) βλέπουμε τίς διαφορές καί τίς ὁμοιότητες μέ τήν κλασσική φυσική (ἡ σταθερά $\hbar$ στήν ἐξ. (35) θά μποροῦσε νά ἔχει μπεῖ καί στήν ἐξ. (34) ἀφοῦ κάνει τόν τελεστή $\hat{S}$ τοῦ spin ἀδιάστατο). g_e, ὁ καινούργιος παράγων ὁ ὁποῖος ἐμφανίζεται καλεῖται παράγων "g" τοῦ ἠλεκτρονίου. Ἡ θεωρία (κβαντική ἠλεκτροδυναμική) ἀποδεικνύει καί τό πείραμα ἐπιβεβαιώνει ὅτι ἡ τιμή τοῦ g_e εἶναι σχεδόν 2.0 ($g_e = 2\times 1.0011596567(35) \simeq 2.0023$). Ἡ διαφορά μεταξύ τῆς (33) καί (35) εἶναι ὁ παράγων g καί ὁ ὁποῖος "διορθώνει" τό λάθος τό ὁποῖο προκύπτει ἀπό τήν ἐπέκταση τῶν κλασσικῶν ἐννοιῶν πέραν ἀπό τόν χῶρο γιά τόν ὁποῖο κατασκευάσθηκαν. Ὁ παράγων g ὑπολογίζεται θεωρητικῶς μόνο γιά τό ἠλεκτρόνιο, γιά ὅλα τά ὑπόλοιπα σωματίδια μετρᾶται, διότι κάθε σωματίδιο ἔχει τόν δικό του παράγοντα g. Ἐάν θέσουμε $g=2.0$ ἡ (35) γίνεται

$$\hat{\vec{\mu}}_s = -\frac{e\hbar}{mc}\hat{\vec{S}} \qquad (35α)$$

Σύγκρισις μέ τήν ἐξ. (33) μᾶς δείχνει ὅτι στήν περίπτωση τοῦ spin τοῦ ἠλεκτρονίου ἡ κλασσική φυσική "χάνει" τόν παράγοντα 2.0.

Ἡ προηγούμενη συζήτησις μᾶς διαβεβαιώνει ὅτι τό spin <u>δέν</u> εἶναι κλασσική ἔννοια, δηλ. δέν ὑπάρχει κάποιο ἀνάλογό της στήν κλασσική φυσική.

Ἄς δοῦμε τώρα λεπτομερέστερα τί σημαίνει spin. Δεχθήκαμε κατ' ἀρχάς ὅτι εἶναι "στροφορμή", ἄρα οἱ ἀντίστοιχοι τελεστές ὑπακούουν τίς μεταθετικές σχέσεις (6) καί τίς γενικές σχέσεις (30)' καί (31). Θά θεωρήσουμε τήν περίπτωση $j \equiv s = 1/2$ διότι ὄχι μόνον εἶναι ἡ πλέον κοινή, ἀλλά ὅπως ἤδη τονίσαμε spin 1/2 ἔχει τό ἠλεκτρόνιο, ἴσως τό πιό ἐνδιαφέρον σωματίδιο ὅλων τῶν σωματιδίων.† Ἄρα ἀφοῦ $s = 1/2$, $m_s = +1/2, -1/2$ σύμφωνα μέ τίς ἐξ. (30)
Γράφουμε γενικότερα

$$\left.\begin{aligned} \hat{S}^2|s,m_s\rangle &= s(s+1)\hbar^2|s,m_s\rangle \\ \text{καί} \quad \hat{S}_z|s,m_s\rangle &= m_s\hbar|s,m_s\rangle \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

ὅπου $m_s = -s, -s+1, \ldots +s$, $2s+1$ τιμές. Ἐπειδή ἡ περίπτωσις ἡ ὁποία μᾶς ἐνδιαφέρει περισσότερο εἶναι ἡ $s=1/2$, δύο εἶναι οἱ δυνατές καταστάσεις: $|1/2,1/2\rangle$ καί $|1/2,-1/2\rangle$. Στό σημεῖο αὐτό θά πρέπει νά γίνη κατανοητό ὅτι ἡ κατάστασις $|s,m_s\rangle$ περιγράφει πλήρως τήν κατάσταση "κινήσεως" τοῦ spin. Πρέπει ἡ $|s,m_s\rangle$ νά διαφοροποιηθῆ (ἀλλά καί νά γίνουν κατανοητές οἱ ὁμοιότητες) μέ τήν κατάσταση $|n\ell m_\ell\rangle$ στήν περίπτωση τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου, ὅπου ἐκεῖ βρήκαμε καί ἡ ἀναλυτική ἔκφραση κινήσεως στόν <u>χῶρο</u>, δηλ. ἡ $\Psi_{n\ell m_\ell}(r,\theta,\varphi)$. Στήν προκειμένη περίπτωση τό φαινόμενο εἶναι <u>ἐσωτερικό</u>, δέν μπορεῖ ν' ἀναλυθῆ περαιτέρω. Λόγω συντομίας τίς καταστάσεις $|1/2,1/2\rangle$ καί $|1/2,-1/2\rangle$ τίς συμβοδίνουμε για α και β ἀντιστοίχως:

$$|1/2, 1/2\rangle \equiv \alpha, \quad |1/2, -1/2\rangle \equiv \beta \qquad (37)$$

Οἱ ἐξ. (36) γράφονται

$$\boxed{\begin{array}{l|l} \hat{S}^2\alpha = \tfrac{3}{4}\hbar^2\alpha & \hat{S}^2\beta = \tfrac{3}{4}\hbar^2\beta \\ \hat{S}_z\alpha = \tfrac{1}{2}\hbar\alpha & \hat{S}_z\beta = -\tfrac{1}{2}\hbar\beta \end{array}} \qquad (38)$$

(Χρησιμοποιώντας τὶς (38) μποροῦμε νὰ βροῦμε τὸ μέγεθος τῆς διπολικῆς ροπῆς λόγω spin μ_S. Ἀπὸ τὴν ἐξ. (35) ἔχουμε

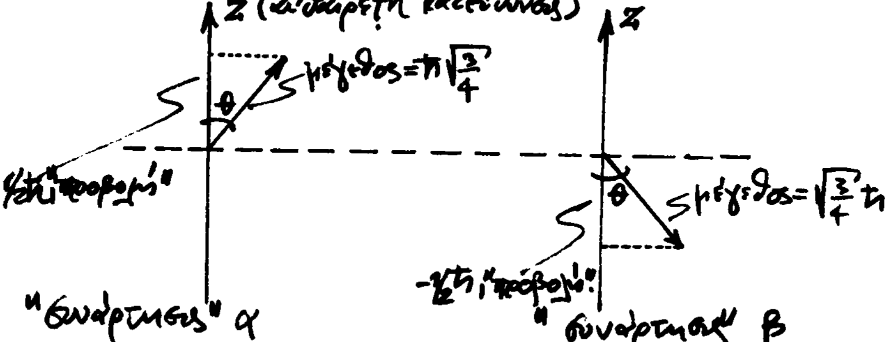
$$\hat{\mu}_S^2 = g_e^2\left(\frac{e\hbar}{2mc}\right)^2 \hat{S}^2$$

ή

$$\langle \mu_S^2 \rangle = g_e^2\left(\frac{e\hbar}{2mc}\right)^2 \langle \alpha | \hat{S}^2 | \alpha \rangle = g_e^2\left(\frac{e\hbar}{2mc}\right)^2 \tfrac{3}{4}, \text{ ή}$$

$$\mu_S \equiv \left\{\langle \mu_S^2 \rangle\right\}^{1/2} = g_e \frac{e\hbar}{2mc}\sqrt{\frac{3}{4}} \quad)^{\dagger}$$

Ἡ εἰκόνα τὴν ὁποία δίνουν οἱ ἐξ. (38) εἶναι ἡ γνωστή εἰκόνα τῆς θεωρίας:



Σχ. 1. Σχηματική παράσταση spin ½.

Ὑποθέτουμε ὅτι τό διάνυσμα μεγέθους $\hbar\sqrt{3/4}$ εἶναι δυνατόν νά βρίσκη στήν ἐπιφάνεια κώνου τοῦ ὁποίου ἡ γενέτειρα σχηματίζει γωνία θ (μία τιμή καί μόνον στήν περίπτωση ὅπου $S=1/2$) μέ αὐθαίρετο ἄξονα τόν ὁποῖο ὀνομάζουμε z. Ἡ τιμή τῆς γωνίας θ εἶναι

$$\cos\theta = \frac{\frac{1}{2}\hbar}{\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\sqrt{3}/3 = 54.74^\circ$$

Θά πρέπει νά διευκρινισθῇ τό ἑξῆς: Πολλές φορές ἀναφερόμεθα στό spin λέγοντας ὅτι τό spin s εἶναι 1/2 ἤ −1/2. Τό τί ἐννοοῦμε βέβαια εἶναι ὁ κβαντικός ἀριθμός m_s ὁ ὁποῖος ἔχει τήν δυνατότητα μεταβολῆς, ὁ κβαντικός ἀριθμός τοῦ spin s εἶναι ἕνας καί μόνον, θετικός (οὐ μηδέν). Χρησιμοποιοῦντας τό σύμβολο σ καί ὡς "μεταβλητή" τοῦ χώρου τοῦ spin (δηλ. στήν πραγματικότητα τό m_s) μποροῦμε νά γράψουμε ὅτι

$$\int d\sigma\, \alpha^*(\sigma)\, \alpha(\sigma) = \int d\sigma\, \beta^*(\sigma)\, \beta(\sigma) = 1 \qquad (39)$$

καί

$$\int d\sigma\, \alpha^*(\sigma)\, \beta(\sigma) = \int d\sigma\, \beta^*(\sigma)\, \alpha(\sigma) = 0 \qquad (40)$$

ἤ

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = \langle \beta | \beta \rangle = 1 \qquad (39\alpha)$$

καί

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle = 0 \qquad (40\alpha)$$

δηλ. οἱ συναρτήσεις α καί β εἶναι ὀρθοκανονικές. Τί σημαίνουν τά ὁλοκληρώματα στήν ἔκφραση (39) καί στήν (40); (Οἱ ἐκφράσεις (39α), (40α) δέν χρειάζονται ἑρμηνείας εἶναι πολύ γενικότερη γραφή) Τί σημαίνει κατ' ἀρχάς "συνάρτησις" α(σ) ἤ β(σ). Τό σ ὅπως εἴπαμε ὅτι εἶναι ἡ "μεταβλητή" στόν χῶρο τοῦ spin (δέν πρέπει νά συγχέεται μέ τόν κβαντικό ἀριθμό s) Οἱ δυνατότητες τῆς μεταβλητῆς αὐτῆς εἶναι περιορισμένες, εἶναι δυνατόν νά πάρει μόνον δύο τιμές τήν $s_1 = 1/2$ καί τήν $s_2 = -1/2$ δηλ. τίς δύο m_s τιμές. Ἄν ἡ α σημαίνει $|1/2, 1/2\rangle$ δηλ. $m_s = +1/2$, μποροῦμε ἑπομένως νά γράψουμε

$$\alpha(s) = 1 \text{ ἐάν } s = 1/2, \quad \alpha(s) = 0 \text{ ἐάν } s = -1/2 \text{ ἤ ὁποιοδήποτε ἄλλο!}$$

ὁμοίως

$$\beta(s) = 1 \text{ ἐάν } s = -1/2, \quad \beta(s) = 0 \text{ ἐάν } s = +1/2 \text{ ἤ ὁποιοδήποτε ἄλλο}$$

Θεωρῶντας δηλ. τίς συναρτήσεις $\alpha(s)$, $\beta(s)$ ὡς συναρτήσεις τῆς "συνεχοῦς" μεταβλητῆς s, εἶναι μηδέν παντοῦ ἐκτός ἀπό τά σημεῖα $s = 1/2$ γιά τήν α καί $s = -1/2$ γιά τήν β. Μέ τήν διευκρίνιση αὐτή τά ὁλοκληρώματα στίς σχέσεις (39), (40) ἔχουν τυπικό χαρακτήρα καί σημαίνουν ἀθροίσματα ὡς πρός s:

$$\int ds\, \alpha^*(s)\alpha(s) \to \sum_{s=-1/2}^{+1/2} \alpha^*(s)\alpha(s) = \alpha^*(1/2)\alpha(1/2) + \alpha^*(-1/2)\alpha(-1/2)$$

$$= |\alpha(1/2)|^2 = 1 \quad \text{διότι} \quad \alpha^*(-1/2)\alpha(-1/2) = 0. \text{ Ἐπίσης}$$

(ὀρθοκανονικοποίηση)

$$\int ds\, \alpha^*(s)\beta(s) \to \sum_{s=-1/2}^{+1/2} \alpha^*(s)\beta(s) = \alpha^*(-1/2)\beta(-1/2) + \alpha^*(1/2)\beta(1/2)$$

$$\equiv 0, \text{ διότι } \alpha^*(-1/2) = \beta(1/2) = 0$$

Ἡ ὀρθοκανονικότης τῶν $\alpha(s)$, $\beta(s)$ ἀναμενόταν ἐξ ἄλλου διότι ὁ τελεστής $\hat{S}$ τοῦ spin εἶναι Ἑρμιτιανός. Μετά ἀπ' ὅλες αὐτές τίς μᾶλλον ἐπίπονες διευκρινήσεις ὡς πρός τήν σημασία τῶν α καί β συναρτήσεων (καταστάσεων) εἶναι ἐνδιαφέρον νά γραφοῦν οἱ τελεστές $\hat{S}_z$ καί $\hat{S}^2$ ὑπό μορφήν πινάκων (μητρῶν). Εἶναι πολύ ἐνδιαφέρον διότι οἱ συναρτήσεις α καὶ β ἀποτελοῦν <u>πλῆρες σύνολο</u> συναρτήσεων στόν χῶρο τοῦ spin μέ $S=1/2$. Γιά νά καταλάβουμε καλύτερα τό περιεχόμενο τῆς τελευταίας προτάσεως θεωροῦμε ὅτι ἔχουμε σωμάτιο μέ $S=1/2$ ἀλλά δέν γνωρίζουμε ἀκριβῶς σέ ποιά κατάσταση βρίσκεται. Λόγω τῆς πληρότητος τῶν συναρτήσεων ἡ καταστάσεις spin $|\chi\rangle$ γράφεται

$$|\chi\rangle = c_1|\alpha\rangle + c_2|\beta\rangle \qquad (41)$$

ὅπου c_1, c_2 συντελεστές "μίξεως". Ἀπό τήν (41) καί λόγω τῶν (39), (40) παίρνουμε

$$\left.\begin{aligned} \langle\alpha|\chi\rangle &= c_1\langle\alpha|\alpha\rangle + c_2\langle\alpha|\beta\rangle = c_1 \\ \langle\beta|\chi\rangle &= c_1\langle\beta|\alpha\rangle + c_2\langle\beta|\beta\rangle = c_2 \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

Ἄρα $$|\chi\rangle = \langle\alpha|\chi\rangle|\alpha\rangle + \langle\beta|\chi\rangle|\beta\rangle \qquad (43)$$

ἤ $$|\chi\rangle = \left\{|\alpha\rangle\langle\alpha| + |\beta\rangle\langle\beta|\right\}|\chi\rangle^{\dagger} \qquad (43\alpha)$$

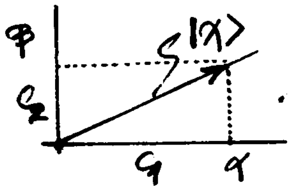
Ἐπειδή θέλουμε (λέμε) ἡ καταστάσεις $|\chi\rangle$ νά εἶναι κανονικοποιημένη

$$\langle\chi|\chi\rangle = 1 \quad \text{ἤ}$$

$$\langle\chi|\chi\rangle = \langle c_1\alpha + c_2\beta | c_1\alpha + c_2\beta\rangle = |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1.$$

Ἄρα (καί σύμφωνα μέ τά προηγούμενα) οἱ συντελεστές c_1 καί c_2 μέ τήν μορφή τῶν τετραγώνων τῶν ἀπολύτων τιμῶν ἀποτελοῦν πιθανοτικές ἑρμηνεῖες: $|c_1|^2 = |\langle\alpha|\chi\rangle|^2$ ἑρμηνεύεται τήν πιθανότητα τήν ὁποία ἔχει τό σωμάτιο τό ὁποῖο περιγράφεται ἀπό τήν κατάσταση $|\chi\rangle$ νά ἔχει spin α,

δηλ. σπίν "πρός τά επάνω" (↑) ως πρός αυθαίρετο άξονα,
δηλ. $m_s = +1/2$ τό αντίστοιχο γιά $|C_2|^2$. Γενικώς



χώρος σπίν.

Θά επανέλθουμε σ' αυτό τό σύστημα "δύο επιπέδων" τό οποίο στήν προκειμένη περίπτωση αφορά τό σπίν αλλά έχει πολύ ευρύτερο χαρακτήρα, ό ίδιος "φορμαλισμός" εφαρμόζεται π.χ. στό πολωμένο φως.
Τώρα από τις σχέσεις (38) υπολογίζουμε τά μητροστοιχεία

$$\left.\begin{aligned}
\langle\alpha|\hat{S}_z|\alpha\rangle &= \langle 1/2, 1/2|\hat{S}_z|1/2, 1/2\rangle = 1/2\hbar\langle\alpha|\alpha\rangle = 1/2\hbar\\
\langle\alpha|\hat{S}_z|\beta\rangle &= \langle 1/2, 1/2|\hat{S}_z|1/2, -1/2\rangle = -1/2\hbar\langle\alpha|\beta\rangle = 0\\
\langle\beta|\hat{S}_z|\alpha\rangle &= \{\langle\alpha|\hat{S}_z|\beta\rangle\}^* = 0\\
\langle\beta|\hat{S}_z|\beta\rangle &= \langle 1/2, -1/2|\hat{S}_z|1/2, -1/2\rangle = -1/2\hbar\langle\beta|\beta\rangle = -1/2\hbar
\end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Υπό μορφήν μήτρας οι σχέσεις (44) διατάσσονται ως

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \langle\alpha|\hat{S}_z|\alpha\rangle & \langle\alpha|\hat{S}_z|\beta\rangle \\ \langle\beta|\hat{S}_z|\alpha\rangle & \langle\beta|\hat{S}_z|\beta\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2\hbar & 0 \\ 0 & -1/2\hbar \end{pmatrix}$$

Η ή "απεικόνισις" τού τελεστού $\hat{S}_z$ υπό μορφήν μήτρας ως πρός τις συναρτήσεις α καί β θά είναι

$$\hat{S}_z \rightarrow S_z = \hbar/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (45)$$

ή $$2S_z = \hbar\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}. \qquad (45a)$$

Τὸν πίνακα $\hbar\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ σὲ μονάδες $\hbar$ (γιὰ νὰ ἀπαλλαγοῦμε πρὸς στιγμὴν ἀπὸ τὸ $\hbar$) τὸν ὀνομάζουμε σ_z (μία ἀπὸ τὶς πίνακες Pauli), ἄρα

$$S_z = \frac{\sigma_z}{2} \qquad \sigma_z = 2S_z \qquad (46)$$

Μὲ τὸν ἴδιο ἀκριβῶς τρόπο, χρησιμοποιώντας καὶ πάλι τὶς σχέσεις (38)–(40) βρίσκουμε τὴν ἀπεικόνιση τοῦ τελεστοῦ S^2 ὡς πρὸς τὶς συναρτήσεις α καὶ β

$$\hat{S}^2 \to S^2 = \hbar^2\begin{pmatrix}3/4 & 0\\ 0 & 3/4\end{pmatrix} = \tfrac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$ ή σὲ μονάδες $\hbar$

$$S^2 = \tfrac{3}{4}\,\mathbb{1} \quad \text{ὅπου} \quad \mathbb{1} \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad (47)$$

Πῶς παριστάνουμε τώρα τὶς α καὶ β ὑπὸ μορφὴν μητρῶν ὀρθοκανονικῶν καὶ προφανῶς ἰδιοσυναρτήσεων τῶν (46) καὶ (47) δηλ. τῶν S_z καὶ S^2; Θέτουμε

$$\alpha = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \quad \text{καὶ} \quad \beta = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} \qquad (48)$$

Τὰ διανύσματα $\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ καὶ $\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ εἶναι κατ' ἀρχὰς ὀρθοκανονικά, πράγματι

$$(1 \quad 0)\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = 1, \quad (0 \quad 1)\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = 1$$

καὶ

$$(1 \quad 0)\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = 0$$

Ἐπὶ πλέον, εἶναι καὶ προφανὲς ὅτι ἀποτελοῦν ἰδιοδιανύσματα τῶν S_z καὶ S^2.

Τώρα σύμφωνα μέ τίς γενικές σχέσεις (7) ὁρίζουμε τούς βαθμωτούς τελεστές spin μέ τίς σχέσεις

$$\left.\begin{array}{l}\hat{S}^+ \equiv \hat{S}_x + i\hat{S}_y \\ \hat{S}^- \equiv \hat{S}_x - i\hat{S}_y\end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\hat{S}_x = 1/2\,(\hat{S}^+ + \hat{S}^-) \\ \hat{S}_y = 1/2i\,(\hat{S}^+ - \hat{S}^-)\end{array}\right\} \quad (49)$$

Ἐφαρμόζουμε τώρα τίς σχέσεις (31) ὅπου ἀντί $\hat{J}$ ἔχουμε $\hat{S}$. Ἔχουμε

$$\hat{S}^+|1/2\ 1/2\rangle = \hat{S}^+\alpha = \hbar\sqrt{1/2(1/2+1) - 1/2(1/2+1)}\,|\ \ \rangle = 0$$

καί

$$\hat{S}^+|1/2, -1/2\rangle = \hat{S}^+\beta = \hbar\sqrt{1/2(1/2+1) - 1/2(1/2-1)}\,|1/2, -1/2+1\rangle =$$

$$= 1\hbar\,|1/2, 1/2\rangle = \hbar\alpha \quad (50)$$

Τό ἀποτέλεσμα βέβαια τῶν ἐξισώσεων (50) ἀναμενόταν ἀπό τήν φύση τῶν βαθμωτῶν τελεστῶν. Μέ τόν ἴδιο τρόπο ἐπιτυγχάνουμε

$$\hat{S}^-\alpha = \hbar\beta \quad \text{καί} \quad \hat{S}^-\beta = 0.$$ Συνεπῶς

$$\left.\begin{array}{ll}\hat{S}^+\alpha = 0, & \hat{S}^+\beta = \hbar\alpha \\ \hat{S}^-\alpha = \hbar\beta, & \hat{S}^-\beta = 0\end{array}\right\} \quad (51)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τίς (51) στίς (49) παίρνουμε

$$\left.\begin{array}{l}\hat{S}_x\alpha = 1/2(\hat{S}^+ + \hat{S}^-)\alpha = 1/2\underbrace{\hat{S}^+\alpha}_{0} + 1/2\,\hat{S}^-\alpha = 1/2\,\hbar\beta \\ \text{καί}\quad \hat{S}_x\beta = 1/2(\hat{S}^+ + \hat{S}^-)\beta = 1/2\,\hat{S}^+\beta + 1/2\underbrace{\hat{S}^-\beta}_{0} = 1/2\,\hbar\alpha \\ \hat{S}_y\alpha = 1/2i\,(\hat{S}^+ - \hat{S}^-)\alpha = 1/2i\underbrace{\hat{S}^+\alpha}_{0} - 1/2i\,\hat{S}^-\alpha = -1/2i\,\hbar\beta = 1/2\,i\hbar\beta \\ \hat{S}_y\beta = 1/2i\,(\hat{S}^+ - \hat{S}^-)\beta = 1/2i\,\hat{S}^+\beta - 1/2i\underbrace{\hat{S}^-\beta}_{0} = 1/2i\,\hbar\alpha = -1/2\,i\hbar\alpha\end{array}\right\} \quad (52)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (52) καί τίς σχέσεις ὀρθοκανονικότητος μεταξύ τῶν $\alpha(s)$ καί $\beta(s)$ ἔχουμε γιά τά μητροστοιχεῖα τῶν τελεστῶν $\hat{S}_x$ καί $\hat{S}_y$.

$$\langle\alpha|\hat{S}_x|\alpha\rangle = \tfrac{1}{2}\hbar\langle\alpha|\beta\rangle = 0 \quad , \quad \langle\beta|\hat{S}_x|\alpha\rangle = \tfrac{1}{2}\hbar\langle\beta|\beta\rangle = \tfrac{1}{2}\hbar$$
$$\langle\alpha|\hat{S}_x|\beta\rangle = \tfrac{1}{2}\hbar\langle\alpha|\alpha\rangle = \tfrac{1}{2}\hbar \; , \quad \langle\beta|\hat{S}_x|\beta\rangle = \tfrac{1}{2}\hbar\langle\beta|\alpha\rangle = 0 \tag{53}$$

Ἄρα ἡ ἀπεικόνισις διά μορφῆς μήτρας τοῦ τελεστοῦ spin $\hat{S}_x$ ὡς πρός τίς συναρτήσεις α καί β εἶναι

$$\hat{S}_x \rightarrow S_x = \begin{pmatrix} 0 & \tfrac{1}{2}\hbar \\ \tfrac{1}{2}\hbar & 0 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{53α}$$

Ὁμοίως ἀπό τίς σχέσεις (52) πού ἀφοροῦν τόν τελεστή $\hat{S}_y$ καί τίς σχέσεις ὀρθοκανονικότητος μεταξύ τῶν συναρτήσεων α καί β ὑπολογίζουμε τά μητροστοιχεῖα

$$\langle\alpha|\hat{S}_y|\alpha\rangle = \tfrac{1}{2}i\hbar\langle\alpha|\beta\rangle = 0 \quad , \quad \langle\beta|\hat{S}_y|\alpha\rangle = \tfrac{1}{2}i\hbar\langle\beta|\beta\rangle = \tfrac{1}{2}i\hbar$$
$$\langle\alpha|\hat{S}_y|\beta\rangle = -\tfrac{1}{2}i\hbar\langle\alpha|\alpha\rangle = -\tfrac{1}{2}i\hbar \; , \quad \langle\beta|\hat{S}_y|\beta\rangle = -\tfrac{1}{2}i\hbar\langle\beta|\alpha\rangle = 0 \tag{54}$$

Ἄρα
$$\hat{S}_y \rightarrow S_y = \begin{pmatrix} 0 & -\tfrac{1}{2}i\hbar \\ +\tfrac{1}{2}i\hbar & 0 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix} \tag{54α}$$

Ὁρίζοντας τίς μήτρες σ_x καί σ_y ὡς διπλάσιες τῶν S_x καί S_y, ἀκριβῶς ὅπως στήν σχέση (46) καί ἐκφράζοντας τό ἀποτέλεσμα σέ μονάδες $\hbar$ ἔχουμε

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{55}$$

μέ $S_x = \tfrac{1}{2}\sigma_x$, $S_y = \tfrac{1}{2}\sigma_y$, $S_z = \tfrac{1}{2}\sigma_z$.
Οἱ μήτρες σ λέγονται μήτρες Pauli.

Ἄς δοῦμε μερικές ἀπό τίς ἰδιότητες τῶν μητρῶν αὐτῶν.

$$\sigma_x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$, ὁμοίως

$$\sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \mathbb{1} \qquad (56)$$ Ἄρα

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = \tfrac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{3}{4}\,\mathbb{1}$$ ὅπως πρέπει

σύμφωνα μέ τήν (47). Ἄς δοῦμε τώρα τίς μεταθετικές σχέσεις μεταξύ τῶν π.χ. S_x καί S_y (ἤ σ_x, σ_y)

$$\left[\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right] = \tfrac{1}{4}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{4}\left\{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right\} = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$= i\,S_z$ σέ μονάδες $\hbar$, δηλ.

$[S_x, S_y] = i\,S_z$ ὅπως πρέπει σύμφωνα μέ τίς σχέσεις (6)

Τήν προηγούμενη ἀνάλυση ὡς πρός τά μητρώα τήν κάναμε γιά νά δείξουμε πώς εἶναι δυνατή ἡ μεταφορά τελεστοῦ $\hat{A}$, ἐδῶ τῶν τελεστῶν $\hat{S}_j$ σέ μήτρα, ὡς πρός δεδομένο σύνολο συναρτήσεων, ἐδῶ τῶν α καί β.

Τέλος ἄς δοῦμε τήν ἐπίδραση τοῦ spin στήν ἐνέργεια μονοηλεκτρονικοῦ (καί ὅπως θά δοῦμε καί διηλεκτρονικοῦ) συστήματος. Κατ' ἀρχάς ἐπειδή ὁ τελεστής $\mathcal{H}$ εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπό συντεταγμένες spin (μέχρι τώρα), εἶναι προφανές ὅτι ὁ τελεστής $\hat{S}_z$ ἀλλά καί ὁ $\hat{S}^2$ ἀντιμετατίθενται μετά τοῦ $\mathcal{H}$. δηλ. $[\hat{\mathcal{H}}, \hat{S}_z] = 0$

ἀλλά μέ τόν μεταθέτη $[\mathcal{H}, \hat{S}_z]$ βλέπε Bethe-Jackiw

$[\hat{\mathcal{H}},\hat{S}^2]=0$, σύμφωνα μέ τά θεωρήματα τῶν μεταθετῶν ἰδιοσυναρτήσεις τῆς Χαμιλτωνιανῆς. Ἡ ἐνεργείας E, π.χ. $\Psi_E=|E\rangle$, εἶναι δυνατόν νά εἶναι συγχρόνως ἰδιοσυνάρτησις τῶν $\hat{S}^2$ καί $\hat{S}_z$ μέ ἀντίστοιχους κβαντικούς ἀριθμούς τούς S καί M_S. Δηλ. θά ἔχουμε γενικῶς (ἀνεξαρτήτως ἀριθμοῦ ἠλεκτρονίων) τίς διανύσματα

$$\left.\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}}|ESM_S\rangle &= E|ESM_S\rangle \\
\hat{S}^2|ESM_S\rangle &= S(S+1)\hbar^2|ESM_S\rangle \\
\hat{S}_z|ESM_S\rangle &= M_S\hbar|ESM_S\rangle
\end{aligned}\right\} \quad (57)$$

ὅπου S ὁ συνολικός κβαντικός ἀριθμός spin. Τώρα στήν περίπτωση μονοηλεκτρονιακοῦ συστήματος, π.χ. ὑδρογονοειδοῦς ἀτόμου, ἡ συνάρτησις ἡ ὁποία περιγράφει τήν "κίνηση" τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι ἡ $\Psi_{nlm_l}=|nlm_l\rangle$. Τό ἠλεκτρόνιο εἶναι δυνατόν νά ἔχῃ spin πρός τά "ἐπάνω", ↑, δηλ. $m_s=+1/2$, δηλ. $|1/2,1/2\rangle=\alpha$ ἤ πρός τά "κάτω", ↓, δηλ. $m_s=-1/2$, δηλ. $|1/2,-1/2\rangle=\beta$. Ἡ πληροφορία α ἤ β πρέπει νά "φέρεται" ἀπό τήν ἰδιοσυνάρτηση περιγραφῆς τοῦ ἠλεκτρονίου. Τέτοια πληροφορία βέβαια δέν ὑπάρχει στήν $|nlm_l\rangle$. Ἐπειδή ἡ $\mathcal{H}$ δέν περιέχει συντεταγμένες spin μποροῦμε νά θεωρήσουμε ὡς πλήρη συνάρτηση, αὐτή δηλ. ἡ ὁποία περιγράφει καί τήν κατάσταση spin τοῦ ἠλεκτρονίου τήν $\Psi\alpha$ ἤ $\Psi\beta$. Καλύτερα

$$\left.\begin{aligned}
\Psi\alpha &= |nlm_l\rangle|1/2\ 1/2\rangle = |nlm_l\ \overset{m_s}{1/2}\rangle \\
\Psi\beta &= |nlm_l\rangle|1/2\ {-1/2}\rangle = |nlm_l\ {-1/2}\rangle
\end{aligned}\right\} \Psi_{nlm_l}\chi(m_s)$$

όπου $\chi(m_s)=\alpha$ εάν $m_s=1/2$ ή $\chi(m_s)=\beta$ εάν $m_s=-1/2$.
Η ενέργεια του μονοηλεκτρονικού συστήματος δέν επηρεάζεται καθόλου από τις συναρτήσεις spin α καί β, διότι ή $\mathcal{H}$ δέν περιέχει συντεταγμένες spin:

$$\hat{\mathcal{H}}[\psi_{nlm_l}\chi(m_s)]=\chi(m_s)\hat{\mathcal{H}}\psi_{nlm_l}=\chi(m_s)E_n\psi_{nlm_l}$$

$$=E_n[\psi_{nlm_l}\chi(m_s)]$$

Άρα αυτομάτως στήν περίπτωση αυτή ό εκφυλισμός διπλασιάζεται διότι κάθε χωρική ιδιοσυνάρτηση έχει δύο συνιστώσες, τις ψ_+ καί ψ_- (+ μέ $m_s=+1/2$, − μέ $m_s=-1/2$)

$$\hat{\mathcal{H}}\begin{pmatrix}\psi_+\\ \psi_-\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}\psi_+\\ \psi_-\end{pmatrix} \qquad (59)$$

Ας θυμηθούμε ότι στήν περίπτωση του υδρογονοειδούς ατόμου ό εκφυλισμός καταστάσεως $|nlm_l\rangle$ είναι n^2. Συμπεριλαμβανομένου του spin του ηλεκτρονίου ό εκφυλισμός είναι προφανώς $2n^2$. Ο εκφυλισμός ως πρός spin αίρεται μέ τήν παρουσία μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$, δηλ. μέ τήν άρση της συμμετρίας του χώρου ως πρός κάποια κατεύθυνση μέ τέτοιο πεδίο (τό $\vec{B}$) τό όποιο αλληλεπιδρά μέ τό spin σύμφωνα μέ τήν σχέση $-\hat{\vec{\mu}}_s\cdot\vec{B}$, όπου ή $\hat{\vec{\mu}}_s$ δίνεται από τήν σχέση (35α). Η αλληλεπίδρασις του τύπου $-\hat{\vec{\mu}}\cdot\vec{B}$ όπου μ ή διπολική ροπή του ηλεκτρονίου ή του πυρήνος οδηγεί στήν μαγνητική φασματοσκοπία ESR ή NMR αντιστοίχως.