3. ΠΙΕΣΙΣ ΑΕΡΙΩΝ

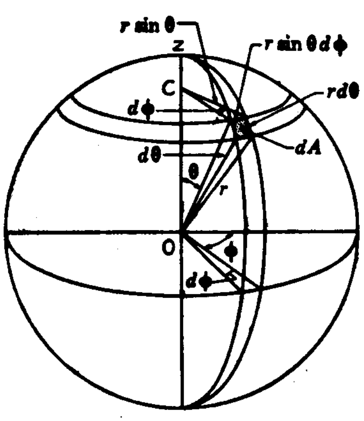
3. 1. Κινητικός ὑπολογισμός τῆς πιέσεως ἀερίου

Θά ὑπολογίσωμεν, κινητικῶς, τήν πίεσιν ἑνός ἀερίου.

Ἄς θεωρήσωμεν ὅτι τά μόρια κινοῦνται πρός ὅλας τάς διευθύνσεις χωρίς καμμίαν προτίμησιν πρός τινα διεύθυνσιν. Ἑπομένως, ἐάν μέ κέντρον σημεῖον τι Ο φέρωμεν τά ἀνύσματα τῶν ταχυτήτων τῶν μορίων πρός ὅλας τάς διευθύνσεις, αἱ διευθύνσεις αὐτῶν θά τμήσουν τήν ἐπιφάνειαν σφαίρας, ἐχούσης κέντρον τό σημεῖον Ο καί ἀκτῖνα ἴσην πρός τήν μονάδα, εἰς διάφορα σημεῖα, ἅτινα καλοῦμεν ἀντιπροσωπευτικά σημεῖα.

Ἐφ'ὅσον δέν ὑπάρχει προτίμησις ὡς πρός τήν διεύθυνσιν, τά ἀντιπροσωπευτικά σημεῖα θά εἶναι ἐξ ἴσου κατανεμημένα ἐφ' ὅλης τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας (ἰσότροπος κατανομή). Ἡ συνθήκη τῆς ἰσοτρόπου κατανομῆς πληροῦται ἐφ'ὅσον ὁ ἀριθμός τῶν μορίων N εἶναι μέγας.

Ἔστω ἤδη στοιχειώδης ἐπιφάνεια dA ἐπί τῆς σφαίρας μεταξύ τεσσάρων ἀκτίνων ὡς εἰς τό σχῆμα(3.1).



Σχ.3.1.

Ἐπί τῆς στοιχειώδους αὐτῆς ἐπιφανείας dA θά ὑπάρχουν $dN_{\theta,\varphi}$ ἀντιπροσωπευτικά σημεῖα, ἀντιστοιχοῦντα εἰς $dN_{\theta,\varphi}$ μόρια. Ὁ ὁλικός ἀριθμός τῶν μορίων ἐντός τῆς σφαίρας, ὄγκου V, εἶναι N. Τό ἐμβαδόν τῆς στοιχειώδους ἐπιφανείας dA εἶναι:

$$dA = r d\theta \cdot r\sin\theta d\varphi = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \qquad (3.1)$$

Ἡ στερεά γωνία $d\Omega$ ἡ σχηματιζομένη ὑπό τῶν τεσσάρων ἀκτίνων εἰς τά ἄκρα τῆς ἐπιφανείας dA εἶναι κατά ταῦτα:

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi \qquad (3.2)$$

Ἐφ'ὅσον ἔχομεν ἰσότροπον κατανομήν, ἕπεται ὅτι ἡ πυκνότης ρ τῶν ἀντιπροσωπευτικῶν σημείων ἐπί τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, καθοριζομένη ὑπό τῆς σχέσεως:

$$\int \rho dA = N$$

εἶναι σταθερά.

Τό ποσοστόν τῶν μορίων, τῶν ὁποίων τά ἀντιπροσωπευτικά σημεῖα κεῖνται ἐπί δεδομένης στοιχειώδους ἐπιφανείας dA, εἶναι:

$$\frac{dN_{\theta,\varphi}}{N} = \frac{\rho dA}{\int \rho dA} = \frac{dA}{4\pi r^2} \qquad (3.3)$$

Ἑπομένως προκύπτει ὅτι:

$$dN_{\theta,\varphi} = \frac{N}{4\pi r^2} dA = \frac{N}{4\pi} \sin\theta d\theta d\varphi \qquad (3.4)$$

Δηλαδή ἡ σχέσις αὕτη δίδει τόν ἀριθμόν τῶν μορίων, τῶν ὁποίων αἱ διευθύνσεις τῶν ταχυτήτων κεῖνται ἐντός τῆς στερεᾶς γωνίας $d\Omega$. Ἄρα δίδει τόν ἀριθμόν τῶν μορίων, τά ὁποῖα ἔχουν διευθύνσεις ταχύτητος μεταξύ θ καί $\theta+d\theta$ καί μεταξύ φ καί $\varphi+d\varphi$. Ἐάν ὁλοκληρώσωμεν ὡς πρός φ ἀπό 0 ἕως 2π, δηλαδή δι'ὅλας τάς τιμάς φ, θά ἔχωμεν τόν ἀριθμόν τῶν μορίων, τῶν ὁποίων αἱ διευθύνσεις ταχυτήτων σχηματίζουν γωνίαν ἀπό θ ἕως $\theta+d\theta$ μέ δοθεῖσαν σταθεράν κατεύθυνσιν, τήν OZ, ἀνεξαρτήτως τῆς γωνίας φ.

Ἤτοι:

$$dN_\theta = \frac{N}{4\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{N}{2} \sin\theta d\theta \qquad (3.4\alpha)$$

Ἐκ τῶν N μορίων ἀριθμός τις μορίων dN_c θά ἔχῃ ταχύτητα μεταξύ c καί c+dc χωρίς περιορισμόν ὡς πρός τήν διεύθυνσιν. Ἐκ τῶν dN_c μορίων τούτων ἀριθμός τις μορίων $dN_{c,\theta,\varphi}$ θά ἔχῃ διεύθυνσιν ἐντός τῆς στερεᾶς γωνίας dΩ. Ἄρα ὁ ἀριθμός $dN_{c,\theta,\varphi}$ παριστᾷ τόν ἀριθμόν τῶν μορίων τῶν ἐχόντων ταχύτητα μεταξύ c καί c+dc καί διεύθυνσιν μεταξύ θ καί θ+dθ ἀφ'ἑνός καί φ καί φ+dφ ἀφ'ἑτέρου. Λόγῳ τῆς ἰσοτρόπου κατανομῆς θά ἔχωμεν:

$$\frac{dN_c}{N} = \frac{dN_{c,\theta,\varphi}}{dN_{\theta,\varphi}} \tag{3.5}$$

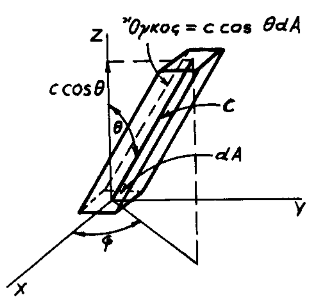
Ἤτοι, τό ἐπί τοῦ συνόλου ποσοστόν τῶν μορίων τά ὁποῖα ἔχουν ταχύτητα μεταξύ c καί c+dc ἰσοῦται, λόγῳ τῆς ἰσοτρόπου κατανομῆς, μέ τό ἀντίστοιχον ποσοστόν ἐπί τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μορίων τά ὁποῖα ἔχουν διεύθυνσιν κειμένην ἐντός τῆς στερεᾶς γωνίας dΩ.

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (3.5) καί (3.3) ἔχομεν:

$$\frac{dN_{c,\theta,\varphi}}{dN_c} = \frac{dN_{\theta,\varphi}}{N} = \frac{dA}{4\pi r^2} = \frac{\sin\theta d\theta d\varphi}{4\pi} \tag{3.6}$$

Καταλήγομεν ὅθεν εἰς τήν σχέσιν:

$$dN_{c,\theta,\varphi} = \frac{dN_c}{4\pi}\sin\theta d\theta d\varphi \tag{3.7}$$



Σχ. 3.2.

Ἡ σχέσις αὕτη δίδει τόν ἀριθμόν τῶν μορίων τά ὁποῖα ἔχουν ταχύτητα εἰς τήν περιοχήν c καί c+dc καί διεύθυνσιν μεταξύ θ καί θ+dθ καί μεταξύ φ καί φ+dφ. Θεωρήσωμεν ἤδη τήν ἐπιφάνειαν dA τοῦ σχήματος (3.2).

Τό ἐρώτημα εἶναι πόσα ἐκ τῶν $dN_{c,\theta,\varphi}$ μορίων θά συναντήσουν

τήν ἐπιφάνειαν dA εἰς τήν μονάδα τοῦ χρόνου; Ἐντός τῆς μονάδος τοῦ χρόνου θά συναντήσουν τήν ἐπιφάνειαν dA τόσα μόρια, ἐκ τῶν $dN_{c,\theta,\varphi}$, ὅσα εὑρίσκονται, εἰς χρόνον $t=0$ ἐντός πλαγίου κυλίνδρου βάσεως dA καί μήκους c. Βεβαίως ὑπάρχουν καί ἄλλα μόρια ἐντός τοῦ κυλίνδρου ἀλλά δέν θά συγκρουσθοῦν μετά τῆς ἐπιφανείας dA εἴτε διότι δέν κινοῦνται πρός τήν στοιχειώδη ἐπιφάνειαν dA, ἤτοι δέν εἶναι θ,φ-μόρια (δηλαδή μόρια μέ διεύθυνσιν μεταξύ θ καί $\theta+d\theta$ καί μεταξύ φ καί $\varphi+d\varphi$) εἴτε διότι δέν κινοῦνται μέ ταχύτητα c. Ἑπομένως ἐξ ὅλων τῶν μορίων τοῦ κυλίνδρου θά συγκρουσθοῦν μόνον τά c,θ,φ-μόρια. Ὑπό τήν δεδομένην προϋπόθεσιν τοῦ μεγάλου ἀριθμοῦ τῶν μορίων καί τῆς ὁμοιομόρφου κατανομῆς αὐτῶν ἐντός τοῦ ὄγκου τοῦ δοχείου, θά ἔχωμεν καί ὁμοιόμορφον κατανομήν καί τῶν c,θ,φ-μορίων. Μ'ἄλλους λόγους, ἐάν ἕν δεδομένον ποσοστόν μορίων ἐντός τοῦ ὁλικοῦ ὄγκου εἶναι c,θ,φ-μόρια, τό αὐτό ποσοστόν μορίων εἰς τόν κύλινδρον θά εἶναι c,θ,φ-μόρια.
Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου τούτου εἶναι $dV = c\cos\theta dA$

Ὁ ἀριθμός τῶν μορίων, ἐντός τοῦ ὄγκου dV, περιοχῆς ταχυτήτων c και $c+dc$ καί διευθύνσεων μεταξύ θ καί $\theta+d\theta$ καί φ καί $\varphi+d\varphi$, ὅστις θά συγκρουσθῇ ἐντός τῆς μονάδος τοῦ χρόνου μέ τήν ἐπιφάνειαν dA, θά εἶναι:

$$\frac{dN_c}{4\pi}\sin\theta d\theta d\varphi \ \frac{dV}{V} =$$

$$= \frac{dN_c}{4\pi V} c\sin\theta\cos\theta dA d\theta d\varphi \tag{3.8}$$

Ἡ ἀσκουμένη ὑπό τοῦ τοιχώματος ἐπί τοῦ μορίου δύναμις ἰσοῦται μέ τήν ταχύτητα μεταβολῆς τῆς ὁρμῆς ἤτοι:

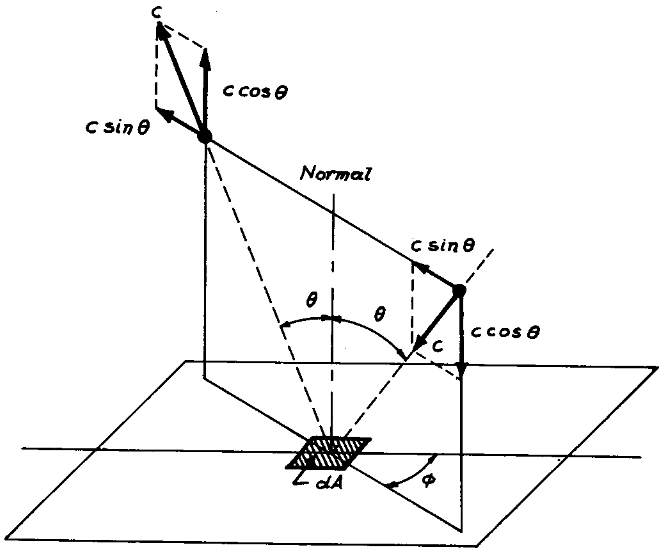
$$F = \frac{dJ}{dt} \tag{3.9}$$

Ἡ ἐπί τοῦ τοιχώματος ὑπό τοῦ μορίου ἀσκουμένη δύναμις εἶναι ἴση κατά μέτρον καί μέ ἀντίθετον σημεῖον πρός τήν ἀνωτέρω.

Ἡ δύναμις ἐπί τῆς μονάδος τῆς ἐπιφανείας, ἤτοι ἡ πίεσις P δίδεται ὑπό τῆς ἐξισώσεως:

$$P = \frac{F}{S} \qquad (3.10)$$

Κατά τά προλεχθέντα αἱ συγκρούσεις θεωροῦνται ἐλαστικαί. Εἰς τήν περίπτωσίν μας ἡ διεύθυνσις τῆς ταχύτητος σχηματίζει γωνίαν θ μετά τῆς καθέτου ἐπί τοῦ τοιχώματος(σχ.3.3).



Σχ.3.3.

Κατά τούς νόμους τῆς ἐλαστικῆς κρούσεως μόνον ἡ κάθετος συνιστῶσα τῆς ταχύτητος c εἶναι ὑπεύθυνος διά τήν ἐμφάνισιν τῆς πιέσεως, διότι τό μόριον ἀνακλᾶται ὑπό γωνίαν ἴσην, κατ' ἀπόλυτον τιμήν, πρός τήν γωνίαν προσπτώσεως καί μέ ταχύτητα ἴσην, κατά μέτρον, πρός τήν ἀρχικήν. Ἑπομένως μετά τήν ανάκλασιν ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα csinθ παραμένει ἀμετάβλητος, μεταβάλλεται δέ μόνον ἡ κάθετος συνιστῶσα ἀπό (+ccosθ) εἰς (-ccosθ). Ἄρα ἡ μεταβολή τῆς ὁρμῆς ἑνός μορίου κατά μίαν σύγκρουσιν εἶναι -2mccosθ. Ἡ ὁλική μεταβολή τῆς ὁρμῆς εὑρίσκεται ἐάν πολλαπλασιάσωμεν τήν μεταβολήν τῆς ὁρμῆς ἑνός μορίου κατά μίαν σύγκρουσιν(-2mccosθ) ἐπί τόν ἀριθμόν τῶν μορίων, ἅτινα προσπίπτουν ἐπί τῆς μονάδος ἐπιφανείας εἰς τήν μονάδα τοῦ χρόνου, $\frac{dN_c}{4\pi V} c\sin\theta\cos\theta d\theta d\varphi$ (ἐξίσωσις 3.8).

Ἑπομένως ἔχομεν:

ὁλική μεταβολή τῆς ὁρμῆς: $\left(\frac{dN_c}{4\pi V} c\sin\theta\cos\theta d\theta d\varphi\right).(-2mc\cos\theta)=$

$$=-\frac{dN_c}{4\pi V} 2mc^2\sin\theta\cos^2\theta d\theta d\varphi \tag{3.11}$$

Διά νά εὕρωμεν τήν πίεσιν, dP_c, τήν ὁποίαν ἀσκοῦν τά μόρια ταῦτα, ἀλλάσσομεν τό σημεῖον τῆς μεταβολῆς τῆς ὁρμῆς καί ὁλοκληρώνομεν τήν ἐξίσωσιν (3.11) ὡς πρός τάς δυνατάς τιμάς θ καί φ, ἤτοι μεταξύ 0 καί π/2 καί μεταξύ 0 καί 2π ἀντιστοίχως. Θά ἔχωμεν:

$$dP_c=\frac{dN_c}{4\pi}\frac{2mc^2}{V}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin\theta d\theta \tag{3.12}$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν:

$$dP_c=\frac{dN_c mc^2}{V}\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin\theta d\theta \tag{3.13}$$

Θέτομεν $\cos\theta=x$ ἄρα $\cos^2\theta = x^2$, $d(\cos\theta)=-\sin\theta d\theta = dx$ καί ἡ ἐξίσωσις (3.13) καθίσταται:

$$dP_c=\frac{dN_c mc^2}{V}\int_1^0 -x^2 dx = \frac{dN_c mc^2}{V}\int_0^1 x^2 dx=\frac{dN_c mc^2}{3V} \tag{3.14}$$

Ἄρα ἡ πίεσις ὅλων τῶν μορίων, ὅλων τῶν ταχυτήτων, ἤτοι ἡ ὁλική πίεσις, εἶναι:

$$P=\int_0^\infty\frac{dN_c mc^2}{3V}=\frac{m}{3V}\int_0^\infty c^2 dN_c \tag{3.15}$$

Ἐπειδή:

$$\overline{c^2}=\frac{1}{N}\int_0^\infty c^2 dN_c \tag{3.16}$$

ἕπεται ὅτι:

$$N\overline{c^2}=\int_0^\infty c^2 dN_c \tag{3.17}$$

καί κατά συνέπειαν:

$$P = \frac{m}{3V} N\overline{c^2} = \frac{1}{3} \frac{Nm\overline{c^2}}{V} \qquad (3.18)$$

'Εκ τῆς σχέσεως ταύτης ἕπεται ὅτι:

$$PV = \frac{1}{3} Nm\overline{c^2} \qquad (3.19)$$

καί

$$\overline{c^2} = \frac{3PV}{mN}$$

'Αλλά mN = μᾶζα τῶν N μορίων εἰς ὄγκον V. 'Εάν $V=v$ τότε $mN_L = M$ = γραμμομοριακή μᾶζα, καί N_L σταθερά Loschmidt. Ἄρα δυνάμεθα νά γράφωμεν:

$$\sqrt{\overline{c^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \qquad (3.20)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐπιτρέπει τόν ὑπολογισμόν τῆς ταχύτητος τῶν μορίων ἑνός ἀερίου ἐκ τῆς θερμοκρασίας.

Οὕτως ἡ ταχύτης τῶν μορίων τοῦ ὀξυγόνου εἰς $0^{\circ}C$ ($M=32$) ἀνέρχεται εἰς:

$$\sqrt{\overline{c^2_{O_2}}} = \sqrt{\frac{3(8.31\times10^7)273}{32}} = 462 \frac{m}{sec}$$

Διά δύο ἀέρια π.χ. O_2 καί H_2, ἔχομεν:

$$\sqrt{\frac{\overline{c^2_{H_2}}}{\overline{c^2_{O_2}}}} = \sqrt{\frac{M_{O_2}}{M_{H_2}}} \quad \text{καί} \quad \sqrt{\overline{c^2_{H_2}}} = \sqrt{\frac{32}{2}\overline{c^2_{O_2}}} = 4\sqrt{\overline{c^2_{O_2}}}$$

ἤτοι ἡ ταχύτης τῶν μορίων τοῦ H_2 εἶναι τετραπλασία τῆς ἀντιστοίχου τοῦ ὀξυγόνου.

3. 2. Ἀριθμός συγκρούσεων ἐπί τῆς μονάδος ἐπιφανείας

Ὁ ἀριθμός τῶν μορίων ἐντός ὄγκου $dV = dAc\cos\theta$, περιοχῆς ταχυτήτων c καί $c+dc$ καί διευθύνσεων θ καί $\theta+d\theta$ καί φ καί $\varphi+d\varphi$, ὁ ὁποῖος θά συγκρουσθῇ εἰς 1sec μέ τήν ἐπιφάνειαν dA, παρέχεται ὑπό τῆς ἐξισώσεως (3.8), καί εἶναι:

$$\frac{cdN_c}{4\pi V}\sin\theta\cos\theta d\theta d\varphi dA$$

Ἄρα διά τήν μονάδα ἐπιφανείας θά ἔχωμεν:

$$\frac{cdN_c}{4\pi V}\sin\theta\cos\theta d\theta d\varphi$$

Ὁλοκληρώνοντες ἀπό $\theta=0$ ἕως $\theta=\pi/2$ καί ἀπό $\varphi=0$ ἕως $\varphi=2\pi$ λαμβάνομεν:

$$\frac{cdN_c}{4\pi V}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$=\frac{cdN_c}{2V}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta$$

Θέτομεν $\sin\theta = x$ ὅτε $d(\sin\theta) = \cos\theta d\theta = dx$.

Ἄρα ἡ παράστασις μετασχηματίζεται εἰς:

$$\frac{cdN_c}{2V}\int_0^1 xdx = \frac{cdN_c}{2V}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{cdN_c}{4V} \qquad (3.21)$$

Ἡ σχέσις αὕτη παρέχει τόν ἀριθμόν τῶν μορίων, ταχύτητος περιοχῆς c καί c+dc, τά ὁποῖα προσπίπτουν ἐπί τῆς μονάδος ἐπιφανείας . Ἐπομένως ὁ ζητούμενος ὁλικός ἀριθμός τῶν μορίων ὅλων τῶν ταχυτήτων εἶναι:

$$N_x=\int_0^\infty\frac{cdN_c}{4V} \qquad (3.22)$$

Ἐπειδή ἰσχύει:

$$\bar{c} = \frac{1}{N}\int_0^\infty cdN_c \qquad (3.23)$$

καί ἄρα:

$$N\bar{c} = \int_0^\infty cdN_c \qquad (3.24)$$

εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ἀριθμός τῶν μορίων ὁ ὁποῖος συγκρούεται, κατά μονάδα χρόνου, μετά τῆς μονάδος τῆς ἐπιφανείας εἶναι:

$$N_x=\frac{N\bar{c}}{4V}=\frac{n\bar{c}}{4} \qquad (3.25)$$

ὅπου n ἡ πυκνότης τῶν μορίων.

* * *