ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ GAUSS

Εἶναι γνωστόν ὅτι κατά τήν ἄμεσον μέτρησιν ἤ τόν ὑπολογισμόν, βάσει πειραματικῶν δεδομένων, ἑνός φυσικοῦ μεγέθους ἡ τιμή τοῦ μεγέθους τούτου δέν συμπίπτει κατά τάς διαδοχικάς, υπό τάς αὐτάς συνθήκας, μετρήσεις τοῦ θεωρουμένου μεγέθους. Βεβαίως ἡ ἐπανάληψις τῶν μετρήσεων ἐνέχει σημασίαν, κατά τά ἀλλαχοῦ ἐκτεθέντα, εἰς τήν ἀκριβεστέραν ἐκτίμησιν πχ. τῆς μέσης ἀριθμητικῆς τιμῆς τούτου καί ἑπομένως καί τῶν ἀποκλίσεων τῶν ἐπί μέρους μετρήσεων ἀπό τήν μέσην τιμήν. Αἱ ἀποκλίσεις αὗται ὀφείλονται βεβαίως εἰς τά τυχαῖα σφάλματα, εἶναι δέ ἐνδιαφέρον νά διερευνηθῇ ἡ τυχόν ὕπαρξις κανονικοτήτων εἰς τήν ἐμφάνισιν τῶν σφαλμάτων τούτων. Ἀπό πλευρᾶς πείρας εἶναι γνωστόν ὅτι ὑφίστανται τοιαῦται κανονικότητες, εἶναι δέ τόσον περισσότερον ἐκπεφρασμέναι ὅσον μεγαλύτερος εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν μετρήσεων, υπό τάς αὐτάς συνθήκας, ἑνός φυσικοῦ μεγέθους, συνοψίζονται δέ αὗται εἰς τά ἀκόλουθα:

α) Ἡ συχνότης ἤ ἡ πιθανότης ἑνός σφάλματος ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ σφάλματος καί δή μικρά σφάλματα εἶναι περισσότερον συχνά καί ἑπομένως πιθανά ἐνῶ τά μεγάλα σφάλματα εἶναι ὀλιγώτερον συχνά καθιστάμενα τελικῶς μᾶλλον ἀπίθανα.

β) Ἐάν θεωρήσωμεν ὅτι αἱ μικρότεραι τῆς μέσης τιμῆς ἑνός μεγέθους τιμαί περιέχουν ἀρνητικά σφάλματα, αἱ δέ μεγαλύτεραι τιμαί ταύτης θετικά σφάλματα, διαπιστοῦται ἐκ πείρας (ἐφ'ὅσον πρόκειται περί μεγάλου ἀριθμοῦ μετρήσεων) ὅτι τά θετικά σφάλματα εἶναι ἐξ ἴσου συχνά μέ τά ἀρνητικά τοιαῦτα.

Εἶναι προφανές ὅτι δέον νά ὑφίσταται μία ἐξάρτησις μεταξύ τοῦ μεγέθους τοῦ σφάλματος καί τῆς σχετικῆς συχνότητος ἐμφανίσεως τούτου δικαιολογοῦσα τάς ὡς ἄνω πειραματικάς διαπιστώσεις.

Ἡ πειραματική διαπίστωσις α) προϋποθέτει τήν ὕπαρξιν μεγίστου εἰς τήν συνάρτησιν ταύτην, ἡ δέ β) προϋποθέτει συνάρτησιν συμμετρικήν.

Τάς προϋποθέσεις ταύτας ἐκπληροῖ ἡ ἀκόλουθος συνάρτησις κατανομῆς τοῦ GAUSS διατυπωθεῖσα δι'ἐφαρμογῆς τῆς θεωρίας τῶν πιθανοτήτων:

$$\psi = ke^{-h^2x^2} \qquad (1)$$

ὅπου ψ= ἡ σχετική συχνότης ἐμφανίσεως σφάλματος χ.

Ὁ ἀριθμός dn μετρήσεων, ἐπί συνόλου n μετρήσεων, μέ σφάλματα κείμενα μεταξύ χ καί χ+ dχ, εἶναι ἀνάλογος τοῦ ἀριθμοῦ n, τοῦ εὔρους τοῦ σφάλματος dχ καί τέλος τῆς σχετικῆς συχνότητος ἐμφανίσεως τούτου δηλαδή τῆς συναρτήσεως κατανομῆς (1).

Ἐπομένως:

$$dn = n\psi d\chi = nke^{-h^2\chi^2} d\chi \qquad (2)$$

Προϋποτίθεται πάντοτε ὅτι ὁ ἀριθμός τῶν μετρήσεων εἶναι ἀρκούντως μεγάλος.

Ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται:

$$\psi = \frac{1}{n}\frac{dn}{d\chi} = ke^{-h^2\chi^2} \qquad (3)$$

Ἡ ἐξίσωσις (3) ἀποδίδεται γραφικῶς διά κωδωνοειδοῦς καμπύλης.

Ἡ πιθανότης σφάλματος κειμένου μεταξύ χ καί χ+dχ εἶναι:

$$dp = \frac{dn}{n} = ke^{-h^2\chi^2} d\chi \qquad (4)$$

Δεδομένου ὅτι τό χ δύναται νά λάβῃ ἁπάσας τάς τιμάς μεταξύ − ∞ καί + ∞, δι᾽ ὁλοκληρώσεως τῆς προηγουμένης σχέσεως, ἔχοντες ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι ὑπό τάς προϋποθέσεις ταύτας ἡ πιθανότης καθίσταται βεβαιότης δηλαδή μονάς, λαμβάνομεν:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-h^2\chi^2} d\chi = \frac{k\sqrt{\pi}}{h}$$

Ἐπομένως $k = \dfrac{h}{\sqrt{\pi}}$ (5)

Δι᾽ εἰσαγωγῆς τῆς (5) εἰς τήν (1) προκύπτει:

$$\psi = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\chi^2} \qquad (6)$$

Ἡ συνάρτησις αὕτη ἔχει ἕν μέγιστον καί δύο σημεῖα καμπῆς, συμμετρικά ὡς πρός τόν ἄξονα ψ. Ταῦτα προκύπτουν διά παραγωγίσεως τῆς (6) καί ἐφαρμογῆς τῶν γνωστῶν κριτηρίων. Οὕτω διά τήν ὕπαρξιν καί θέσιν τοῦ μεγίστου ἐκ τῆς (6) ἔχομεν:

$$\frac{d\psi}{d\chi} = \psi' = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}\,\chi e^{-h^2\chi^2} = 0 \qquad (7)$$

καί

$$\frac{d^2\psi}{d\chi^2} = \psi'' = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}\left[e^{-h^2\chi^2} - 2h^2\chi^2 e^{-h^2\chi^2}\right]$$

$$= -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2\chi^2}\left[1 - 2h^2\chi^2\right] \qquad (8)$$

'Εκ τῆς (7) προκύπτει ὅτι $\chi_m = 0$ καί δι' εἰσαγωγῆς τῆς τιμῆς ταύτης εἰς τήν (6)

$$\psi_m = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \qquad (9)$$

Αἱ τελευταῖαι αὗται σχέσεις καθορίζουν τήν θέσιν τοῦ μεγίστου. Ὅτι πράγματι πρόκειται περί μεγίστου προκύπτει ἐκ τῆς (8) ἡ ὁποία λαμβάνει ἀρνητικήν τιμήν διά $\chi=0$.

Τά σημεῖα καμπῆς προκύπτουν ἐκ τῆς (8) δι' ἐξισώσεως ταύτης πρός μηδέν.

Οὕτω διά $\psi''=0$, $\chi = \pm\dfrac{1}{h\sqrt{2}}$

'Η τεταγμένη συνεπῶς τῶν σημείων καμπῆς καθορίζεται ἐκ τῆς τιμῆς τῆς παραμέτρου h .

Τόσον ἐκ τῆς ἀναλυτικῆς ὅσον καί τῆς γραφικῆς διερευνήσεως τῆς συναρτήσεως κατανομῆς (6) προκύπτει ἡ φυσική σημασία τῆς παραμέτρου h . Οὕτω ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ τιμή τοῦ h τόσον ἀκριβέστερα εἶναι τά ἀποτελέσματα τῶν μετρήσεων καί τόσον μικρότεραι αἱ ἀποκλίσεις τῶν ἐπί μέρους μετρήσεων ἀπό τό ἀριθμητικόν μέσον μιᾶς σειρᾶς μετρήσεων. 'Η παράμετρος h καλεῖται καί μέτρον ἀκριβείας.

Διά συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων (4) καί (5) προκύπτει:

$$\frac{dn}{n} = dp = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2\chi^2}\, d\chi \qquad (11)$$

'Εκ ταύτης προκύπτει ὅτι ἡ πιθανότης σφάλματος κειμένου μεταξύ $\pm\chi$ εἶναι:

$$P_{-\chi,\chi} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\chi}^{+\chi} e^{-h^2\chi^2} d\chi = \frac{2h}{\pi} \int_{0}^{+\chi} e^{-h^2\chi^2} d\chi$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{h\chi} e^{-h^2\chi^2} d(h\chi) \qquad (12)$$

Ὡρισμέναι μετρήσεις ἀποκλίνουν ὀλίγον ἐκ τῆς μέσης τιμῆς, γεγονός δικαιολογοῦν ὅτι ἡ μέση τιμή εὑρίσκεται λίαν ἔγγυς τῆς ἀληθοῦς τοιαύτης. Εἰς ἄλλας περιπτώσεις αἱ ἀποκλίσεις εἶναι τόσον μεγάλαι ὥστε νά δικαιολογοῦν ἐπιφυλάξεις ὡς πρός τήν ἐμπιστοσύνην εἰς τήν μέσην ἀριθμητικήν τιμήν ὡς ἀντιπροσωπευτικῆς τιμῆς μιᾶς σειρᾶς μετρήσεων. Πόσον ἀντιπροσωπευτική τῆς ὅλης σειρᾶς τῶν μετρήσεων εἶναι η μέση ἀριθμητική τιμή ταύτης δύναται νά δειχθῇ ὡς ἀκολούθως.

Ὑποθέσωμεν ὅτι ὅλα τά σφάλματα διατάσσονται κατά τάξιν μεγέθους, ἀνεξαρτήτως σημείου. Ἐκλέγομεν τιμήν κειμένην μεταξύ τῶν ἀκροτάτων σφαλμάτων τοιαύτην ὥστε ὁ ἀριθμός σφαλμάτων μέ τιμάς μικροτέρας ταύτης νά εἶναι ὁ αὐτός μέ τόν ἀριθμόν τῶν σφαλμάτων μέ τιμάς μεγαλυτέρας τῆς ἐπιλεγείσης. Ἡ οὕτω ἐπιλεγεῖσα τιμή σφάλματος καλεῖται πιθανόν σφάλμα. Οὕτω ἄν θεωρήσωμεν ὅτι τό ἀτομικόν βάρος τοῦ ὀξυγόνου (H=1) εἶναι 15,879, μέ πιθανόν σφάλμα ± 0,0003, ἡ πιθανότης, οτι ἡ ἀληθής τιμή τοῦ ἀτομικοῦ βάρους τοῦ ὀξυγόνου θά κεῖται μεταξύ 15,8793 καί 15,8787, εἶναι $\frac{1}{2}$. Ὁ ὑπολογισμός τοῦ πιθανοῦ σφάλματος γίνεται βάσει τῆς ἐξισώσεως (12) ἐν συνδιασμῷ πρός τόν ὁρισμόν του: ἤτοι:

$$P_{0,2} = \frac{1}{2} = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{r} e^{-h^2\chi^2} d\chi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{rh} e^{-h^2\chi^2} d(h\chi)$$

Ἐκ ταύτης προκύπτει ὅτι διά $P = \frac{1}{2}$, $hr = 0,4769$ (13)

Ἡ ἐξίσωσις (11) δύναται νά χρησιμεύσῃ διά τόν ὑπολογισμόν μέσων τιμῶν μιᾶς ἰδιότητος (π.χ. μέσης ἀριθμητικῆς τιμῆς σφάλματος, μέσου τετραγωνικοῦ κλπ.).

Ἡ μέση τιμή μιᾶς ἰδιότητος $\overline{Z}$ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\bar{Z} = \frac{z_1n_1 + z_2n_2 + \ldots z_in_i}{n_1 + n_2 + \ldots + n_i} = \frac{\Sigma z_in_i}{\Sigma n_i} = \frac{\Sigma z_i n_i}{n}$$

Εἰς περίπτωσιν καθ'ἥν ἡ ἐξάρτησις μεταξύ Z καί n εἶναι συνεχής ἡ προηγουμένη σχέσις γράφεται:

$$\bar{z} = \frac{\int z dn}{n} \qquad (14)$$

'Εάν ἡ θεωρουμένη ἰδιότης εἶναι τό τετράγωνον σφάλματος τότε $z = \chi^2$.

Συνδιασμός τῆς (14) μέ τήν (11) δίδει

$$\frac{\Sigma\chi^2}{n} = \bar{\chi}^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \chi^2 e^{-h^2\chi^2} d\chi = \frac{1}{2h^2} \qquad (15)$$

$$\text{καί} \quad h = \pm\sqrt{\frac{n}{2\Sigma\chi^2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{2\bar{\chi}^2}} \qquad (16)$$

'Ως ἐλέχθη τό $\Sigma\chi^2$ εἶναι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πραγματικῶν σφαλμάτων. Κατά τήν ἀρχήν τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων ἡ πιθανωτέρα τιμή διά τήν μετρουμένην ποσότητα εἶναι ἐκείνη διά τήν ὁποίαν τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐπί μέρους σφαλμάτων εἶναι ἐλάχιστον.
Εἰς μίανσειρ άν μετρήσεων δυνάμεθα νά εὕρωμεν τήν μέσην τιμήν καί ἐκ ταύτης νά ὑπολογίσωμεν τάς ἀποκλίσεις τῶν ἐπί μέρους μετρήσεων.

"Εστω Σd^2 τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων ἐκ τῆς μέσης τιμῆς. Δεδομένου ὅτι τό $\Sigma\chi^2$ παριστᾷ τάς ἀποκλίσεις ἐκ τῆς ἀληθοῦς τιμῆς ἔχομεν, συμφώνως πρός τήν ἀρχήν τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων.

$$\Sigma\chi^2 < \Sigma d^2 \qquad (17)$$

Τό Σd^2 τείνει πρός $\Sigma\chi^2$ δι. $n \longrightarrow \infty$
Διά πεπερασμένον ἀριθμόν n μετρήσεων ἡ (17) δύναται νά γραφῇ :

$$\Sigma\chi^2 = \Sigma d^2 + u^2 \qquad (18)$$

'Η τιμή u^2 ἐλαττοῦται αὐξανομένου τοῦ n. Μέ ἱκανοποιητικήν προσέγγισιν δύναται νά γραφῇ $u^2 = \frac{\Sigma\chi^2}{n}$

καί ἐκ ταύτης ἐν συνδιασμῷ μέ τήν (18) ἔχομεν:

$$\frac{\Sigma\chi^2}{r} = \frac{\Sigma d^2}{n-1} \qquad (19).$$

Συνδιασμός τῶν ἐξισώσεων (13), (16) καί (19) δίδει διά τό πιθανόν σφάλμα r μιᾶς μετρήσεως τήν τιμήν :

$$r = \pm\, 0{,}6745 \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n-1}} \qquad (20)$$

τό δέ πιθανόν σφάλμα τῆς ἀριθμητικῆς μέσης τιμῆς σειρᾶς μετρήσεωβ ὑπολογίζεται ἐκ τῆς

$$R = \pm\, 0{,}6745 \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n\,(n-1)}} \qquad (21)$$

Ἐξυπακούονται ὅτι αἱ σχέσεις αὗται εἶναι ἄνευ ἀξίας διά μικρόν ἀριθμόν μετρήσεων.

Αἱ ἀκόλουθοι προτάσεις εἶναι χρήσιμοι διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ πιθανοῦ σφάλματος μεγεθῶν προκυπτόντων δι' ὑπολογισμοῦ ἐξ ἑτέρων μεγεθῶν.

1) Τό πιθανόν σφάλμα τοῦ ἀθροίσματος ἤ τῆς διαφορᾶς δύο μεγεθῶν A καί B μέ πιθανά σφάλματα $\pm\,\alpha$ καί $\pm\,\beta$ ἀντιστοίχως, εἶναι :

$$R = \pm \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

π.χ. τό μοριακόν βάρος τοῦ $TiCl_4$ εἶναι 188,545 μέ πιθανόν σφάλμα $\pm$ 0,0092 καί τό ἀτομικόν βάρος τοῦ χλωρίου 35,179$\pm$ 0,0048.

Ἄρα α:β Ti = 188,545-4X35,179=47,829

$$\text{καί} \quad R = \pm \sqrt{(0{,}0092)^2 + (4 \times 0{,}0048)^2} = \pm\, 0{,}0213$$

ἤ α.β. Ti = 47,829 $\pm$ 0,0213

2) Τό πιθανόν σφάλμα τοῦ γινομένου δύο μεγεθῶν A καί B μέ πιθανά σφάλματα $\pm\,\alpha$ καί $\pm\,\beta$ εἶναι

$$R = \pm \sqrt{(A\beta)^2 + (B\alpha)^2}$$

π.χ. Ἔχομεν τήν σχέσιν $\frac{4Ag}{TiCl_4} = \frac{100}{44,017} \pm 0,0031$

τό α.β τοῦ Ag = 107,08 ± 0,0031

ἄρα $R = \pm \frac{1}{100}\sqrt{(4X107,108 \ X \ 0,0031)^2+(44,017X4X0,0031)^2} =$

± 0,0144

ἤτοι τά μ.β τοῦ $TiCl_4$ = 188,583 ± 0,0144

3) Τό πιθανόν σφάλμα τοῦ λόγου $\frac{B}{A}$ δύο μεγεθῶν Α καί Β μέ πιθανά σφάλματα ± α καί ± β ἀντιστοίχως εἶναι:

$$R = \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{B\alpha}{A}\right)^2 + \beta^2}}{A}$$

π.χ. Ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{Cu}{2Ag} = \frac{100}{339,411} \pm 0,0039$ καί τοῦ α,β, τοῦ Ag = 107,108 ± 0,0031 ἔχομεν

Cu = 63,114 καί

$$R = \pm 100 \ X \frac{\sqrt{\left(\frac{214,216 \ X0,0039}{339,411}\right)^2 + (0,0062)^2}}{339,411} =$$

= ± 0,0020

ἤτοι α.β Cu = 63,114 ± 0,0020

4) Τό πιθανόν σφάλμα τῆς ἀναλογίας $\frac{A}{B} = \frac{C}{X}$ ἔνθα Α, Β, C = μεγέθη μέ πιθανά σφάλματα ἀντιστοίχως ±α, ±β, ±C εἶναι

$$R = \frac{\sqrt{\left(\frac{BC\alpha}{A}\right)^2 + (C\beta)^2 + (B\varepsilon)^2}}{A}$$

5) Τό πιθανόν σφάλμα τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου σειρᾶς μετρήσεων εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ ἀριθμοῦ αὐτῆς ἤτοι

$$R = \pm \frac{r}{\sqrt{n}}$$

'Εάν π.χ. R παριστᾶ τό πιθανόν σφάλμα τοῦ μέσου 8 μετρήσεων, θά πρέπει νά γίνουν 32 (4 X 8) μετρήσεις διά νά δώσουν πιθανόν σφάλμα $\frac{1}{2}$ R καί 72 (9 X 8) μετρήσεις διά νά ἔχωμεν πιθανόν σφάλμα $\frac{1}{3}$ R.

'Εάν δύο σειραί μετρήσεων τοῦ α.β. τοῦ ὀξυγόνου ἔδωσαν τά ἑξῆς ἀποτελέσματα:

α) 15,8726 ± 0,00058 ~~καί~~ β) 15,8769 ± 0,00058 τότε συμφώνως πρός τά ἀνωτέρω

$$R = \pm \frac{0,00058}{\sqrt{2}} = 0,00041$$

Συνεπῶς τό α.β. τοῦ ὀξυγόνου θά γραφῆ 15,87475 ± 0,00041

"Εστω π.χ. ὅτι ἐμετρήθη ἡ ἀκτίς τριχοειδοῦς καί εὑρέθησαν αἱ κάτωθι τιμαί(εἰς cm). 0,02025, 0,02028, 0,02013, 0,02019, 0,02032 καί 0,02021. Μέση τιμή 0,02023 εκ.

1) Μέσον σφάλμα μιᾶς παρατηρήσεως.

$$\alpha = \pm \frac{\Sigma(d)}{n} = \pm \frac{2+5+10+4+9+2}{6} 10^{-5} = \pm 0,000053$$

2) Μέσον σφάλμα τῆς μέσης τιμῆς τῶν μετρήσεων.

$$A = \pm \frac{\Sigma d}{n\sqrt{n}} = \pm \left(\frac{32}{6X2,45}\right) 10^{-5} = \pm 0,000022$$

3) Μέσον τετραγωνικόν σφάλμα ἁπλῆς μετρήσεως

$$m = \pm \sqrt{\frac{\Sigma(d^2)}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{4+25+100+16+81+4}{5}} .10^{-5} =$$

$$= \pm \sqrt{\frac{230}{5}} .10^{-5} = \pm 0,000068$$

4) Μέσον τετραγωνικόν σφάλμα τῶν 6 μετρήσεων

$$M = \pm \sqrt{\frac{\Sigma(d^2)}{n(n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{230}{6X5}} .10^{-5} = \pm 0,000027$$

5) πιθανόν σφᾶλμα μιᾶς μετρήσεως

$r = \pm\ 0,675\ \ = \pm\ 0,000045$

6) πιθανόν σφάλμα 6 μετρήσεων

$R = \pm\ 0,675\ M = \pm\ 0,000018$

Διά νά ἀπαντήσωμεν εἰς τό ἐρώτημα πόσον πλησίον πρός τήν πραγματικήν τιμήν κεῖται τό ἀριθμητικόν μέσον, θεωρήσωμεν ὅτι ἐμετρήθη τό ἀτομικόν βάρος τοῦ θαλλίου καί ὅτι εὑρέθησαν αἱ ἑξῆς τιμαί: 203, 628-203,632, 203,636 -203,638-203, 639-203, 642-203,644-203, 649-203, 650-203, 666-Μέση τιμή 203, 642. Ἡ μέση τιμή εἶναι μία ἀπό τάς ἀπείρους δυνατάς τιμάς τοῦ ἀτομικοῦ βάρους τοῦ θαλλίου, τάς κειμένας μεταξύ τῶν ἄκρων τιμῶν 203, 628 καί 203,666. Εἶναι πολύ πιθανόν ὅτι ἡ τιμή 203, 642 δέν εἶναι ἡ ἀληθής τιμή, ἀλλά εἶναι πολύ πιθανόν ὅτι εἶναι λίαν πλησίον αὐτῆς. Εἰς τό ἐρώτημα "πόσον πλησίον" δέν δυνάμεθα νά ἀπαντήσωμεν. Ἄν τροποποιήσωμεν τήν ἐρώτησιν " ποῖα ἡ πιθανότης ὅτι ἡ ἀληθής τιμή θά κεῖται μεταξύ τῶν ὁρίων 203, 642 ± Χ " δυνάμεθα νά δώσωμεν ἀπάντησιν. Θεωρήσω,εν ὅτι τό μέτρον ἀκριβείας (h) τοῦ ἀριθμητοῦ μέσου εἶναι γνωστόν. Θά ἔχωμεν

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\chi} e^{-h^2\chi^2} \cdot d(h\,\chi)$$

ἔνθα P = ἡ πιθανότης ὅτι ἕν σφᾶλμα θά ἔχη ἀπόλυτον τιμήν ἴσην ἤ μικροτέραν τοῦ χ.

Ἐάν π.χ. h =1 ἐκ πινάκων εὑρίσκομεν ὅτι διά $\chi = \pm\ 0,1$, $P=0,112$ διά $\chi = \pm\ 0,2$, $P= 0,223$ κ.ο.κ. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἄν πραγματοποιήσωμεν 1000 μετρήσεις τότε 112 σφάλματα θά κεῖνται μεταξύ ± 0,1 καί -0,1, 223 μεταξύ + 0,2 καί -0,2 κ.ο.κ. ἤ 888 τῶν σφαλμάτων θά ὑπερβαίνουν τά ὅρια ± 0,1,777 θά ὑπερβαίνουν τά ὅρια ± 0,2 κ.ο.κ.

Μετρήσεις μέ διάφορον βαθμόν ἀκριβείας.

Μέχρι τοῦδε ὑπετέθη ὅτι αἱ ἐπί μέρους μετρήσεις εἶναι ἴσης ἀξίας δηλαδή δέν ὑπάρχει λόγος νά προτιμηθῆ μία μέτρησις ἔναντι τῆς ἄλλης. Γενικῶς ὅμως μετρήσεις, μέ διαφορετικάς μεθόδους, ἀπό διαφορετικούς παρατηρητάς ἤ ἀκόμη ἀπό τόν ἴδιον παρατηρητήν ἀλλά εἰς διαφόρους χρόνους, δέν ἐνέχουν τό αὐτό σφάλμα. Εἰς μερικάς μετρήσεις ἔχομεν μεγαλυτέραν ἐμπιστοσύνην ἀπό τάς ἄλλας. Ἔστω π. χ. ὅτι διά τόν προσδιορισμόν τῆς χωρητικότητος μιᾶς φιάλης ἐγένοντο 12 μετρήσεις. 6 μετρήσεις ἔδωσαν 1,5 λίτρα, 4 μετρήσεις 1,4 καί 2 μετρήσεις 1,2 λίτρα. Οἱ ἀριθμοί 6,4,2 παριστοῦν τήν σχετικήν ἀξίαν τῶν τριῶν ἀποτελεσμάτων 1,6, 1,4, 1,2 διότι ἡ τιμή 1,6 εὑρέθη τρεῖς φοράς περισσότερον ἀπό τήν τιμήν 1,2. Συνεπῶς εἰς τό ἀποτέλεσμα 1,6 ἔχομεν τρεῖς φοράς μεγαλυτέραν ἐμπιστοσύνην παρά εἰς τό ἀποτέλεσμα 1,2. Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς λέγομεν ὅτι ἡ σχετική πρακτική ἀξία ἤτοι τό βάρος τῆς μετρήσεως εἶναι ὡς οἱ ἀριθμοί 6 : 4 : 2 ἤ 3: 2: 1. Ὑπό τήν ἔννοιαν αὐτήν τό βάρος τῆς παρατηρήσεως παριστᾷ τόν σχετικόν βαθμόν ἀκριβείας τῆς μετρήσεως ἐν σχέσει πρός ἄλλας μετρήσεις τοῦ αὐτοῦ μεγέθους. Δέν μᾶς λέγει ὅμως τίποτε διά τήν ἀπόλυτον ἀκρίβειαν τῶν μετρήσεων.

" Ἡ καλλιτέρα τιμή μετρήσεων διαφόρου βάρους ἐπιτυγχάνεται διά πολλαπλασιασμοῦ ἑκάστης μετρήσεως ἐπί τό βάρος αὐτοῦ καί διά διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων τούτων διά τοῦ ἀθροίσματος τῶν βαρῶν".

$$\text{ἤτοι} \quad p = \frac{p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \cdots p_n\alpha_n}{p_1 + p_2 + \cdots p_n} = \frac{\Sigma\alpha p}{\Sigma p}$$

ἔνθα $p_1, p_2 \cdots p_n$ = τά βάρη τῶν μετρήσεων καί $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \cdots \alpha_n$ = αἱ μετρήσεις

Ἔστω ὡς παράδειγμα ὅτι ἐκ μετρήσεων τοῦ σημείου τήξεως μιᾶς ὀργανικῆς οὐσίας ὁ ἀκόλουθος πίναξ προέκυψε.

α	p	αp
240,0	1	240,0
235,0	0	0
236,6	1/4	59,2
240,5	1	240,5
237,8	1/4	59,4
239,8	1	239,8
	Σp= 3,5	Σαp =838,9

$$\text{ἄρα ἔχομεν} \quad \frac{\Sigma\alpha p}{\Sigma p} = \frac{838,9}{3,5} = 239,7$$

Τό βάρος τῆς μετρήσεως εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον τοῦ τετραγώνου τοῦ πιθανοῦ σφάλματος

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{1}{r_1^2} : \frac{1}{r_2^2} : \frac{1}{r_3^2}$$

Τό μέσον σφάλμα μιᾶς μετρήσεως βάρους p εἶναι

$$m = \pm \sqrt{\frac{\Sigma(pd^2)}{(n-1)p}}$$

Τό μέσον σφάλμα τῆς σειρᾶς μετρήσεων βαρῶν $p_1, p_2, .. p_n$

εἶναι $M = \pm \sqrt{\frac{\Sigma(pd^2)}{(n-1)\,\Sigma(p)}}$

Καταγραφή ἀποτελεσμάτων

Ἕν σύνηθες πρόβλημα κατά τούς ὑπολογισμούς εἶναι μέ πόσα δεκαδικά ψηφία δέον ν'ἀναγραφῆ τό ἀποτέλεσμα. Εἶναι περισσότερον φυσικόν νά κάνη κανείς τό λάθος νά χρησιμοποιῆ περισσότερα δεκαδικά ψηφία εἰς τό τελικόν ἀποτέλεσμα παρά ὀλιγώτερα. Ἐφ'ὅσον ὅμως κάθε μέτρησις ἐμπεριέχει ἕν ὡρισμένον σφάλμα, ἡ ἀναγραφή περισσοτέρων δεκαδικῶν ψηφίων δέν αὐξάνει τήν ἀκρίβειαν τῆς τιμῆς τοῦ μετρουμένου μεγέθους. Ἀφ'ἑτέρου ἀναγραφή ὀλιγωτέρων ψηφίων ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα μικροτέραν ἀκρίβειαν ἐκείνης τήν ὁποίαν ἡ μέτρησις ἐπιτρέπει.

Συνεπῶς εἶναι ἀναγκαῖον ὅπως ἀναγράφονται τόσα δεκαδικά ψηφία ὅσα καθορίζει ἡ ἀκρίβεια τῆς μετρήσεως. Κατά τήν ἀνάγνωσιν π.χ. συνήθους προχοΐδος τό σφάλμα ἀναγνώσεως εἶναι περίπου 0,01 ml. Ἐάν συνεπῶς ἀναγράψωμεν 22,4 ml (ἀντί 22,40) θά διαπράξωμεν τό σφάλμα νά ἀναγράψωμεν ὀλιγώτερα δεκαδικά ψηφία, διότι τό 22,4 σημαίνει ὅτι ἡ ἀληθής τιμή δύναται νά κεῖται μεταξύ 22,35 καί 22,45 ἤτοι τό σφάλμα εἶναι 5 φοράς μεγαλύτερον ἀπό τό σφάλμα μετρήσεως. Ἀφ'ετέρου ὅταν λαμβάνομεν τό ἀριθμητικόν μέσον τῶν μετρήσεων 22,38-22,40-22,42-22,39, τό ἀποτέλεσμα δέν εἶναι 22,397 διότι τοῦτο δηλοῖ ὅτι τό σφάλμα μετρήσεως εἶναι ± 0,001 ml.

Συνεπῶς τό ἀποτέλεσμα θά πρέπει νά στρογγυλευθῆ εἰς 22,40- Διά περαιτέρω ὑπολογισμούς δύναται νά χρησιμοποιηθῆ ἕν ἐπί πλέον δεκαδικόν ψηφίον. Π.χ. εἰς τό ἄνω παράδειγμα δύναται νά γραφῆ 22,397.

Γενικῶς τό ἀποτέλεσμα δέον ν'ἀναγράφεται μέ τόσα δεκαδικά ψηφία ὥστε ὅλα (ἐκτός τοῦ τελευταίου) νά εἶναι γνωστά μέ ἀκρίβειαν ἐνῶ τό τελευταῖον εἶναι ἀβέβαιον, μέ σφάλμα ± 5 εἰς τήν επομένην θέσιν.

Κατά τήν πρόσθεσιν ἤ ἀφαίρεσιν ἐάν οἱ διάφοροι ἀριθμοί ἔχουν τό αὐτό σφάλμα τότε καί τό ἀποτέλεσμα πρέπει νά ἔχῃ τό αὐτό σφάλμα π.χ. κατά τήν πρόσθεσιν

$$\begin{array}{r} 22,4 \\ \underline{120,1} \\ 142,5 \end{array}$$

Τό σφάλμα εἰς κάθε προσθετέον εἶναι ± 0,05 καί συνεπῶς τό ἀποτέλεσμα θά πρέπει νά ἔχῃ τό αὐτό σφάλμα ἤτοι ὀρθῶς τό ἀποτέλεσμα ἀναγράφεται 142,5. Εἰς τήν περίπτωσιν ὅμως προσθέσεως

$$\begin{array}{r} 22,4 \\ 120,106 \\ \underline{12,2245} \\ 154,7305 \end{array}$$

Τό μέγιστον σφάλμα εἶναι ± 0,05 (εἰς τό 22,4). Ἄρα ὑπάρχει ἕν σφάλμα 5 μονάδων εἰς τό δεύτερον δεκαδικόν τοῦ ἀθροίσματος καί συνεπῶς τό ἀποτέλεσμα πρέπει ν'ἀναγραφῇ 154,7. Διά περαιτέρω ὑπολογισμούς χρησιμοποιοῦμεν τό 154,73 Γενικῶς κατά τήν στρογγύλευσιν ἑνός ἀριθμοῦ ἰσχύει ὁ ἑξῆς κανών. Ἐάν τό τελευταῖον δεκαδικόν εἶναι 5 ἤ μεγαλύτερον τοῦ 5, τότε στρογγυλεύεται ὁ ἀριθμός διά προσθήκης μιᾶς μονάδος εἰς τό προτελευταῖον δεκαδικόν π.χ. τό 12.225 στρογγυλεύεται εἰς 12,23. Ἐάν τό τελευταῖον δεκαδικόν εἶναι μικρότερον τοῦ 5, τότε ἀφαιρεῖται τό τελευταῖον δεκαδικόν π.χ. τό 12,224 γίνεται 12,22.

Εἰς τήν περίπτωσιν πολλαπλασιασμοῦ καί διαιρέσεως χρησιμοποιεῖται τό σχετικόν σφάλμα: Π.χ. κατά τόν προσδιορισμόν τῆς ἐπιφανείας ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου εὑρέθη ὅτι αἱ πλευραί ἦσαν 100,0 καί 10,0 cm. Ἐάν ἀμφότεραι αἱ πλευραί ἐμετρήθησαν μέ τό αὐτό ἀπόλυτον σφάλμα π.χ. 0.1 cm, τότε τά σχετικά σφάλματα εἶναι ἀντιστοίχως 0,1 καί 1,0%. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τό σχετικόν σφάλμα, εἰς τόν ὑπολογισμόν τῆς ἐπιφανείας εἶναι περίπου 1%. Ἄρα τό σφάλμα τοῦ γινομένου καθορίζεται ἀπό τόν παράγοντα μέ τό μεγαλύτερον σχετικόν σφάλμα.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχωμεν νά πολλαπλασιάσωμεν τόν ἀριθμόν 2,3416 ἐπί 2,55. Τό σχετικόν σφάλμα εἰς τόν πρῶτον ἀριθμόν εἶναι περίπου 5 πρός 230.000 ἐνῶ τό σχετικόν σφάλμα εἰς τόν δεύτερον εἶναι περίπου 5 πρός 2600 ἤτοι 0,2%. Συνεπῶς τό ἀποτέλεσμα θά πρέπει νά ἔχῃ σχετικόν σφάλμα 0,2%. Ἄρα δέν πρέπει τό ἀποτέλεσμα νά γραφῇ 5,971 080, 'Εφ'ὅσον ἔχει σφάλμα 0,2% ἤ περίπου 1 μονάδα εἰς τό δεύτερον δεκαδικόν ψηφῖον πρέπει ὅλα τά δεκαδικά ψηφία τά περαν τοῦ δευτέρου νά διαγραφοῦν. Ἄρα τό ἀποτέλεσμα θά γραφῆ $5{,}97 \pm 0{,}2\%$.

Τό αὐτό ἰσχύει καί διά τήν διαίρεσιν.

Ἔστω πχ. $$\frac{1{,}45 \times 5{,}680}{10{,}234} = 0{,}80477\ldots$$

'Εφ'ὅσον τό 1,45 ἔχει τό μεγαλύτερον σχετικόν σφάλμα (περίπου 0,3%) τό ἀποτέλεσμα θά πρέπει νά ἔχη τό αὐτό σχετικόν σφάλμα, ἤτοι τό ἀποτέλεσμα θά γραφῆ $0{,}805 \pm 0{,}3\%$.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Εἰς ἕν τυχαῖον φαινόμενον, ὡς π.χ. ἡ ραδιενεργός διάσπασις, ἐμφανίζονται κατά τάς μετρήσεις ἀποκλίσεις λόγῳ ἀκριβῶς τοῦ στατιστικοῦ χαρακτῆρος τοῦ φαινομένου. Ἀκόμη καί ἄν μετρεῖται μία σταθερά ραδιενεργός πηγή ὑπό συνθήκας αἱ ὁποῖαι νά ἀποκλείουν ὅλα τά σφάλματα μετρήσεων, ὁ ἀριθμός τῶν κρούσεων, ὁ ὁποῖος μετρεῖται εἰς διαδοχικάς περιόδους δεδομένης χρονικῆς διαρκείας, δέν εἶναι σταθερός. Συνεπῶς θά πρέπει νά κατανοηθῆ ὅτι αἱ στατιστικαί διακυμάνσεις κατά τάς ραδιενεργούς μετρήσεις δέν δύνανται νά ἀποφευχθοῦν, μολονότι εἰς πολλάς περιπτώσεις εἶναι δυνατόν νά καταστοῦν μηδαμιναί, ἐν σχέσει πρός τά ἄλλα πειραματικά σφάλματα. Ἡ πιθανότης μιᾶς μετρήσεως νά κεῖται ἐντός ὡρισμένων ὁρίων δίδεται ἀπό τήν τυπικήν ἀπόκλισιν (standard deviation).

'Εάν μετρῶμεν τόν ἀριθμόν κρούσεων m διά δεδομένον χρονικόν διάστημα T θά ἔχωμεν:

$$\bar{m} = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{N}$$

ἔνθα N= ὁ ἀριθμός τῶν μετρήσεων.

Ὁ ἀριθμός τῶν κρούσεων κατά μονάδα εἶναι $n = \frac{\bar{m}}{T}$

Ἡ τυπική ἀπόκλισις ὁρίζεται ἀπό τήν σχέσιν

$$6 = \sqrt{\frac{(\bar{m} - m_1)^2 + (\bar{m} - m_2)^2 + \ldots (\bar{m} - m_n)^2}{N-1}}$$

$$\text{ἤ} \quad 6^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{1}^{N} \Delta_i^2 \quad \text{ἔνθα} \quad \Delta_1 = \text{ἡ ἀπόκλισις } (\bar{m} - m_i)$$

Διά πρακτικούς σκοπούς ἡ προηγουμένη σχέσις γράφεται

(ἐφ'ὅσον N ἀρκετά μεγάλο)

$$6^2 = \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} \Delta_i^2$$

Τό μέσον σφάλμα τῆς μέσης τιμῆς εἶναι

$$\overline{6} = \frac{6}{N}$$

ἤτοι μέ αὐξανόμενον ἀριθμόν μετρήσεων ἐλαττοῦται.

Διά μεγάλης τιμάς m ἰσχύει ἡ κατανομή GAUSS ἐνῶ διά μικροτέρας ἡ κατανομή δέν εἶναι συμμετρική ὡς πρός m καί ἰσχύει ἡ κατανομή POISSON

$$W_n = \frac{(\overline{m})^m}{m!} e^{-\overline{m}}$$

Τόσον ἀπό τήν κατανομήν GAUSS ὅσον καί ἀπό τήν κατανομήν POISSON, προκύπτει ὅτι τό σχετικόν σφάλμα τῆς μέσης τιμῆς εἶναι

$$\frac{\overline{6}}{\overline{m}} = \frac{1}{\sqrt{N\overline{m}}}$$

ἤτοι ἀντιστρόφως ἀνάλογον τῆς ρίζης τοῦ συνολικοῦ ἀριθμοῦ τῶν μετρηθεισῶν κρούσεων. Ὅσον συνεπῶς μεγαλύτερος εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν μετρουμένων κρούσεων τόσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ στατιστική ἀκρίβεια. Διά νά ἔχωμεν π.χ. σχετικόν σφᾶλμα τῆς μέσης τιμῆς 1% πρέπει ὁ ἀριθμός κρούσεων $N\overline{m}$ νά εἶναι 10.000.

Διά 10.000 κρούσεις καί διά 6 = 100 στατιστικῶς προκύπτει ὅτι ὑπάρχει 68,27% πιθανότης ὅτι τό ἀληθές ἀποτέλεσμα κεῖται μεταξύ 9.900-10100 καί πιθανότης 95,45% ὅτι τοῦτο κεῖται μεταξύ 9.800-10200. Ἤτοι εἰς 68,27% τῶν μετρήσεων αἱ ἀποκλίσεις εἶναι μικρότεραι τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως 6 καί πιθανότης 4,5% ὅτι εἶναι μεγαλύτεραι τῆς 26. Οὕτω ὑπάρχει 95,45% πιθανότης ὅτι τό ἐπί τοῖς % σφᾶλμα εἶναι μικρότερον τοῦ 2%.