* ΠΕΡΙ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Εἰς ἑκάστην πειραματικήν ἐργασίαν ἡ ἀκρίβεια τῶν μετρήσεων ἐνέχει μεγάλην σημασίαν. Εἶναι ὅμως γνωστόν ὅτι, κατά τήν ἐπανάληψιν τῶν αὐτῶν μετρήσεων, αἱ λαμβανόμεναι τιμαί διαφέρουν τῶν προηγουμένων διά λόγους ἀναγομένους εἰς τήν ἀτέλειαν τῶν ἀνθρωπίνων αἰσθήσεων, εἰς ἀτελείας τῶν χρησιμοποιουμένων ὀργάνων, εἰς ἐξωτερικάς συνθήκας κατά τήν ἐκτέλεσιν τοῦ πειράματος κ.λ.π.

Ἐάν κατά τάς n μετρήσεις ἑνός μεγέθους, πραγματικῆς τιμῆς χ, ἔχομεν τάς τιμάς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n$, τότε κάθε μέτρησις ἐμπεριέχει σφάλμα $\Delta\alpha_i$ ἤτοι.

$$\Delta\alpha_1=\chi-\alpha_1,\quad \Delta\alpha_2=\chi-\alpha_2,$$
$$\Delta\alpha_3=\chi-\alpha_3,\quad \Delta\alpha_n=\chi-\alpha_n \qquad (1)$$

καί γενικῶς $\Delta\alpha_i = \chi-\alpha_i$ ἔνθα $i=1,2\ldots n$ (1α)

Τά σφάλματα κατατάσσονται, ὡς γνωστόν, εἰς συστηματικά καί εἰς τυχαῖα σφάλματα. Χαρακτηριστικόν τῶν τυχαίων σφαλμάτων εἶναι ὅτι ἡ τιμή των ἔχει τήν αὐτήν πιθανότητα θετικοῦ ἤ ἀρνητικοῦ σημείου. Τοῦτο σημαίνει ὅτι κατά τήν μέτρησιν ἑνός μεγέθους τό ἀποτέλεσμα ἔχει τήν αὐτήν πιθανότητα ν'ἀποκλίνῃ πρός μεγαλυτέρας ἤ, μικροτέρας τιμάς τῆς ἀληθοῦς τοιαύτης. Ὡς ἐκ τούτου δι' αὐξήσεως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μετρήσεων καθίσταται δυνατή ἡ λῆψις ἀκριβεστέρων ἀποτελεσμάτων.

Ἡ ἐξίσωσις (1) χαρακτηρίζει τό σφάλμα μιᾶς μετρήσεως. Εἰς τήν ἐξίσωσιν ταύτην τά μεγέθη $\alpha_1, \alpha_2\ldots\alpha_n$ εἶναι γνωστά. Τό χ (ἡ ἀληθής τιμή τοῦ μετρουμένου μεγέθους) εἶναι ἄγνωστον καί ὡς ἐκ τούτου τό σφάλμα δέν δύναται νά ὑπολογισθῇ ἀμέσως. Δι'ἀθροίσεως τῶν ἐξισώσεων (1) ἔχομεν

$$\Delta\alpha_1+\Delta\alpha_2+\ldots\Delta\alpha_n = n\chi-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_n)$$

$$\text{ἤ}\quad \chi=\frac{\Delta\alpha_2+\Delta\alpha_2+\ldots+\Delta\alpha_n}{n}+\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_n}{n}$$

Λόγῳ τῆς αὐτῆς πιθανότητος ὑπάρξεως θετικῶν καί ἀρνητικῶν σφαλμάτων, τό πρῶτον μέρος τῆς δεξιᾶς πλευρᾶς

$$t=\frac{I}{??}-\frac{\frac{m_{eq}}{1000}\cdot\frac{v_1-v_2}{5}\cdot C\; 31{,}78\cdot F/31{,}78\cdot t}{m_{eq}\cdot F/31{,}78\cdot t}=31{,}78\times\frac{m}{1000}\ldots$$

τῆς ἐξισώσεως ταύτης διά $n \longrightarrow \infty$ τείνει εἰς τό μηδέν. Διά τοῦτο θεωροῦμεν ὡς ἀληθῆ τιμήν χ τό ἀριθμητικόν μέσον τῶν ἐπί μέρους μετρήσεων ἤτοι

$$\chi = \bar{\alpha} = \frac{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}{n} \qquad (2)$$

καί οὕτω ἡ ἐξίσωσις (1α) λαμβάνει τήν μορφήν

$$\Delta\alpha_i=\bar{\alpha}-\alpha_1 \quad \text{ἔνθα } i = 1,2 \dots n \qquad (3)$$

Αἱ ἐπί μέρους τιμαί $\Delta\alpha_i$ δύνανται νά ἔχουν θετικόν ἤ ἀρνητικόν σημεῖον.

Διά τήν ἀξιολόγησιν τῆς σειρᾶς τῶν μετρήσεων χρησιμοποιεῖται ἡ ἔννοια τοῦ μέσου σφάλματος ὡς καί τοῦ μέσου τετραγωνικοῦ σφάλματος.

Τό μέσον σφάλμα ὁρίζεται ἀπό τήν ἐξίσωσιν:

$$\Delta\bar{\alpha} = \pm \frac{|\Delta\alpha_1|+|\Delta\alpha_2|+\dots+|\Delta\alpha_n|}{n} = \pm\frac{\Sigma(d)}{n} \qquad (4)$$

Ἔνθα d παριστᾷ τήν ἀπόλυτον τιμήν τῆς ἀποκλίσεως ἀπό τό ἀριθμητικόν μέσον. Τό μέσον τετραγωνικόν σφάλμα ὁρίζεται ἀπό τήν ἐξίσωσιν:

$$\Delta\bar{\alpha} = \pm\sqrt{\frac{(\Delta\alpha_1)^2+(\Delta\alpha_2)^2+\dots+(\Delta\alpha_n)^2}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{\Sigma(d^2)}{n-1}} \qquad (4\alpha)$$

Τά κατά τάς ἐξισώσεις (4) καί (4α) σφάλματα εἶναι τά μέσα σφάλματα ἑκάστης μετρήσεως. Ἐφ' ὅσον ἡ μέση τιμή τοῦ σφάλματος εἶναι συνδεδεμένη ὁμοίως μέ ἕν σφάλμα, διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ μέσου σφάλματος τῆς μέσης τιμῆς (διά τό ὁποῖον τελικῶς ἐνδιαφερόμεθα), πρέπει τά Δα τῶν ἐξισώσεων (4) καί (4α) νά διαιρεθοῦν διά $\sqrt{n}$. Οὕτω δι' αὐξήσεως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μετρήσεων τό μέσον σφάλμα τῆς μέσης τιμῆς καθίσταται ὁλονέν μικρότερον.

Ἔστω ὅτι ἐμετρήθη ἡ στροφή μιᾶς ὀπτικές ἐνεργοῦ οὐσίας καί ἔδωσε τά ἑξῆς ἀποτελέσματα:

$27,84^\circ$-$27,83^\circ$-$27,84^\circ$-$27,80^\circ$-$27,82^\circ$-$27,84^\circ$

Ἡ ἀριθμητική μέση τιμή εἶναι $27,828^\circ$. Αἱ ἀποκλίσεις ἀπό τήν μέσην τιμήν (ἀνεξαρτήτως σημείου) εἶναι :

0,012- 0,003 - 0,012 - 0,028 - 0,008 - 0,012

Τό ἄθροισμα εἶναι 0,075 καί ἡ μέση ἀπόκλισις $0,012^\circ$

Ἄρα τό μέσον σφάλμα ἑκάστης μετρήσεως εἶναι:

$$\pm\sqrt{\frac{\Sigma\,(d^2)}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{12^2+3^2+12^2+28^2+8^2+12^2}{5}}\cdot 10^{-3} = \pm\ 16,1\cdot 10^{-3} =$$

$= \pm\ 0,0016$

Τό μέσον σφάλμα τῆς μέσης τιμῆς εἶναι:

$$\pm\sqrt{\frac{\Sigma(d^2)}{n\,(n-1)}} = \pm\sqrt{\frac{12^2+3^2+12^2+28^2+8^2+12^2}{6\cdot 5}}\cdot 10^{-3} = \pm\ 6,6\cdot 10^{-3} \simeq$$

$\simeq \pm\ 0,007$

ἤτοι ἔχομεν $27,828^\circ \pm 0,007^\circ$.

Ἔστω ὅτι ἐμετρήθη ἡ ἠλεκτρική ἀντίστασις ἀγωγοῦ εἰς δύο σειράς μετρήσεων.

Κατά τήν πρώτην σειράν ἔστω ὅτι ἔχομεν (εἰς Ohm)

$R_1=1,38 - R_2=1,36 - R_3=1,37 - R_4=1,38 - R_5=1,35$

Κατά τήν δευτέραν σειράν μετρήσεων ἔχομεν:

$R'=1,40 - R_2'=1,32 - R_3'=1,35 - R_4'=1,38 - R_5'=1,39$ Ohm

Εἰς τήν πρώτην σειράν ἡ διαφορά μεταξύ μεγαλυτέρας καί μικροτέρας τιμῆς εἶναι:

$$1,38 - 1,35 = 0,03$$

Ἡ ἀριθμητική μέση τιμή $\overline{R}$ εἶναι:

$$\overline{R} = \frac{1,38+1,36+1,37+1,38+1,35}{5} = 1,368$$

καί

$$\overline{\Delta R} = \pm\frac{|1,368-1,38|+|1,368-1,36|+|1,368-1,37|+|1,368-1,38|+|1,368-1,35|}{5} = \pm 0,010$$

Ἀντιστοίχως διά τήν δευτέραν σειράν μετρήσεων ἔχομεν:

$$1,40 - 1,32 = 0,08$$

$$\overline{R}' = \frac{1,40+1,32+1,35+1,38+1,39}{5} = 1,368$$

καί

$$\overline{\Delta R}' = \pm\frac{|1,368-1,40|+|1,368-1,32|+|1,368-1,35|+|1,368-1,38|+|1,368-1,39|}{5} = \pm 0,026$$

Ἡ πρώτη σειρά μετρήσεων εἶναι ἀκριβεστέρα ἐφ'ὅσον αἱ ἀποκλίσεις τῶν ἐπιμέρους μετρήσεων εἶναι μικρότεραι. Ἡ διαφορά μεταξύ τῶν δύο ἀκραίων τιμῶν εἶναι 0,03 διά τήν πρώτην σειράν τῶν μετρήσεων καί 0,08 διά τήν δευτέραν. Ἀντιστοίχως διά τό μέσον σφάλμα ἔχομεν 0,010 καί 0,026.

Τό σφάλμα $\Delta\overline{\alpha}$ καλεῖται ἀπόλυτον σφάλμα. Ἡ τιμή τοῦ ἀπολύτου σφάλματος ἐπιτρέπει νά διαπιστώσωμεν τήν ἀκρίβειαν τοῦ πειράματος καί τήν ὀρθήν ἐκλογήν τοῦ ὀργάνου μετρήσεων. Δέν χαρακτηρίζει ὅμως τήν ἀκρίβειαν τῶν μετρήσεων. Ὡς ἐκ τούτου εἰσήχθη ἡ ἔννοια τοῦ σχετικοῦ σφάλματος, ὅπερ καθορίζεται ὡς ὁ λόγος τοῦ μέσου ἀπολύτου σφάλματος πρός τό ἀριθμητικόν μέσον, ἤτοι :

$$\frac{\Delta\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}} = \pm \frac{|\Delta\alpha_1| + |\Delta\alpha_2| + |\ldots| + |\Delta\alpha_n|}{n\overline{\alpha}}$$

Ἐάν π.χ. κατά τήν μέτρησιν ἑνός μήκους 50 cm ἔχωμεν ἀπόλυτον σφάλμα ± 0,01 cm , τότε ἀντιστοιχεῖ σχετικόν σφάλμα $\pm \frac{0,01}{50} = \pm\ 0,0002$. Διά τό αὐτό ἀπόλυτον σφάλμα ±0,01 cm ἔχομεν κατά τήν μέτρησιν ἑνός μήκους 1 cm σχετικόν σφάλμα $\pm \frac{0,01}{1} = \pm\ 0,01$, ἤτοι τό σχετικόν σφάλμα εἰς τήν δευτέραν περίπτωσιν εἶναι 50 φοράς μεγαλύτερον ἀπό τήν πρώτην περίπτωσιν.

Συνήθως διά τήν εὕρεσιν ἑνός μεγέθους ἀπαιτοῦνται νά μετρηθοῦν περισσότερα μεγέθη τά ὁποῖα συνδέονται δι' ὡρισμένης σχέσεως μετά τοῦ πρώτου. Ἡ μέθοδος χαρακτηρίζεται ὡς ἔμμεσος. Εἶναι σαφές ὅτι τά ἐπί μέρους σφάλματα κατά τήν μέτρησιν τῶν μεγεθῶν θά ἐπιδράσουν ἐπί τοῦ συνολικοῦ σφάλματος τοῦ πρός μέτρησιν μεγέθους.

Θεωρήσωμεν τήν ἁπλῆν περίπτωσιν ὅτι ἔχομεν μίαν μόνον μεταβλητήν ἤτοι :

$$\psi = f(\alpha)$$

Ἐάν, κατά τήν μέτρησιν, ἔχωμεν σφάλμα $\Delta\alpha$, τό ψ θά ἔχῃ ἕν σφάλμα $\Delta\psi$ ἤτοι :

$$\psi + \Delta\psi = f(\alpha+\Delta\alpha)$$

Ἐφ' ὅσον εἶναι πάντοτε $\Delta\alpha \ll \alpha$ ἡ ἀνάπτυξις τοῦ $f(\alpha+\Delta\alpha)$ κατά τήν σειράν TAYLOR δίδει :

$$\psi + \Delta\psi = f(\alpha+\Delta\alpha) = f(\alpha) + \frac{df}{d\alpha}\Delta\alpha + \left[\frac{d^2f(\Delta\alpha)^2}{d\alpha^2 . 2!} + \frac{d^3f(\Delta\alpha)^3}{d\alpha^3 . 3!} + \ldots\right]$$

Ἐάν παραλείψωμεν τούς ἐντός ἀγκύλης ὅρους, ἐφ'ὅσον $\Delta\alpha$ εἶναι ἐπαρκῶς μικρόν, καί ἐπειδή $\psi = f(\alpha)$ ἔχομεν:

$$\Delta\psi = \frac{df}{d\alpha}\Delta\alpha = f_\alpha \Delta\alpha.$$

Γενικῶς ἄν $\psi = f(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$

$$\Delta\psi = \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\right)\Delta\alpha_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_2}\right)\Delta\alpha_2 + \ldots = f_{\alpha_1}\Delta\alpha_1 + f_{\alpha_2}\Delta\alpha_2 +$$

Ἔνθα $f\alpha_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\right), f\alpha_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_2}\right) \ldots$

καί $\frac{\Delta\psi}{\psi} = \frac{f\alpha_1}{f}\Delta\alpha_1 + \frac{f\alpha_2}{f}\Delta\alpha_2 + \ldots\ldots$

Διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ μεγίστου σφάλματος πρέπει τά ἐπί μέρους σφάλματα νά προστεθοῦν ἤτοι :

$$\Delta\psi = \pm \left[|fa\ \Delta\alpha_1| + |f\alpha_2 \Delta\alpha_2| + \ldots \right]$$

καί $$\frac{\Delta\psi}{\psi} = \pm \left[\left|\frac{f\alpha_1}{f}\Delta\alpha_1\right| + \left|\frac{f\alpha_2}{f}\Delta\alpha_2\right| + \ldots \right]$$

Ἔστω $\psi = k \cdot \alpha_1^{n_1} \cdot \alpha_2^{n_2} \cdot \alpha_3^{-n_3} \cdot \alpha_4^{-n_4}$

ὅπου k, n_1, n_2, n_3, n_4 = σταθεραί.

Ἡ πορεία διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ ἀπολύτου σφάλματος ἔχει ὡς ἑξῆς:

Διαφορίζομεν τήν ἐξίσωσιν, ἀντικαθιστῶμεν τά διαφορικά $d\psi$, $d\alpha_1$, $d\alpha_2$, $d\alpha_3$, $d\alpha_4$ διά τῶν $\Delta\psi$, $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$, $\Delta\alpha_3$, $\Delta\alpha_4$, θέτομεν εἰς ἀγκύλην τό δεξιόν μέρος τῆς ἐξισώσεως μέ τό $\pm$ πρό αὐτῆς, τά δέ $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$, $\Delta\alpha_3$, $\Delta\alpha_4$ θεωροῦμεν απαντα θετικά, ἤτοι :

$$d\psi = n_1 d\alpha_1 + n_2 d\alpha_2 - n_3 d\alpha_3 - n_4 d\alpha_4$$

$$\Delta\psi = \pm \left[|n\ \Delta\alpha_1| + |n_2 \Delta\alpha_2| + |n_3\ \Delta\alpha_3| + |\ {}_4\Delta\alpha_4\ | \right]$$

'Εν συνδυασμῷ δέ μέ τήν ἀρχικήν συνάρτησιν εὑρίσκεται τό σχετικόν σφάλμα. 'Ομοίως εὑρίσκεται ἀπ'εὐθείας ἐκ τῆς συναρτήσεως $\ln\psi$.

ἤτοι $\ln\psi = \ln k + n_1\ln\alpha_1 + n_2\ln\alpha_2 - n_3\ln\alpha_3 - n_4\ln\alpha_4$

$$d\ln\psi = \frac{d\psi}{\psi} = \frac{n_1}{\alpha_1}d\alpha_1 + \frac{n_2}{\alpha_2}d\alpha_2 - \frac{n_3}{\alpha_3}d\alpha_3 - \frac{n_4}{\alpha_4}d\alpha_4$$

καί $$\frac{\Delta\psi}{\psi} = \pm\left[\left|n_1\frac{\Delta\alpha_1}{\alpha_1}\right| + \left|n_2\frac{\Delta\alpha_2}{\alpha_2}\right| + \left|n_3\frac{\Delta\alpha_3}{\alpha_3}\right| + \left|n_4\frac{\Delta\alpha_4}{\alpha_4}\right|\right]$$

'Εκ τῆς ἐξισώσεως προκύπτει ὅτι τό σχετικόν σφάλμα $\frac{\Delta\psi}{\psi}$ ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἐκθετῶν ἐπί τά σχετικά σφάλματα τῶν μετρουμένων μεγεθῶν. Εἰς τήν ἁπλουστέραν περίπτωσιν καθ'ἥν $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1$, τό σχετικόν σφάλμα τοῦ ζητουμένου μεγέθους θά ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν σχετικῶν σφαλμάτων τῶν μετρουμένων μεγεθῶν.

Ὅταν ἡ τιμή τοῦ μεγέθους εἶναι ἀνάλογος (εὐθέως ἤ ἀντιστρόφως) τῆς μετρουμένης ποσότητος, τότε τό σχετικόν σφάλμα θά εἶναι ἀριθμητικῶς ἴσον πρός τό σχετικόν σφάλμα τῆς μετρουμένης ποσότητος.

'Η περιφέρεια κύκλου εἶναι $2\pi r$. 'Εφ'ὅσον οἱ ἀριθμοί 2 καί π εἶναι ἐλεύθεροι λαθῶν ἕπεται ὅτι τό σχετικόν σφάλμα εἰς τό τελικόν ἀποτέλεσμα θά εἶναι τό αὐτό μέ τό σχετικόν σφάλμα εἰς τό r. 'Εάν π.χ. τό r μετρηθῇ μέ τό σχετικόν σφάλμα 0,1% τότε τό σφαλμα εἰς τήν περιφέρειαν δέν θά πρέπει νά εἶναι μεγαλύτερον ἀπό 0,1%. Ἄρα ἡ τιμή τοῦ π θά ληφθῇ ἔτσι ωστε νά ἔχῃ μικρότερον σχετικόν σφάλμα. Γενικῶς ἐάν $\chi = k\psi$, $d\chi = kd\psi$,

$$\text{καί} \quad \frac{d\chi}{\chi} = \frac{kd\psi}{k\psi} = \frac{d\psi}{\psi}$$

ἤτοι τό σχετικόν σφάλμα $\frac{d\psi}{\chi}$ εἶναι ἴσον πρός τό σχετικόν σφάλμα $\frac{d\psi}{\psi}$.

Ἔστω ψ = α.β. τοῦ Pb καί K=α.β. τοῦ ὀξυγόνου (γνωστόν). 'Εάν χ μέρη Pb ἑνοῦνται μέ 1 μέρος ὀξυγόνου, πρός σχηματισμόν PbO τότε τό α.β. τοῦ Pb εὑρίσκεται ἐκ τῶν σχέσεων $\frac{\psi}{K} = \frac{\chi}{1}$, ἤ $\psi = K\chi$.

καί $d\psi = K d\chi$ ἤ $\frac{d\psi}{\psi} = \frac{d\chi}{\chi}$

Συνεπῶς σφάλμα 1% εἰς τόν προσδιορισμόν τοῦ χ εἰσάγει ἴσον σφάλμα εἰς τόν ὑπολογισμόν τοῦ ψ ἤτοι τοῦ α.β. τοῦ Pb.

Ὁμοίως κατά τόν ὑπολογισμόν τῆς ἐπιφανείας κύκλου $=\pi r^2$, σφάλμα 0,1% εἰς τό r , θά προκαλέσῃ σφαλμα εἰς τό ἀποτέλεσμα 0,2% ἤτοι δύο φοράς μεγαλύτερον διότι:

$\chi = k\psi^2$, $d\chi = k2\psi d\psi$, $\frac{d\chi}{\chi} = \frac{k2\psi d\psi}{k\psi^2} = 2\frac{d\psi}{\psi}$ ἤτοι τό σχετικόν σφάλμα εἰς τό χ εἶναι δύο φοράς μεγαλύτερον ἀπό τό σχετικόν σφάλμα εἰς τό ψ.

Ἐάν θεωρήσωμεν ὅτι 1 μέρος Ag (ὡς $AgNO_3$) ἀπαιτεῖ χ μέρη NaCl πρός καταβύθισίν του, καί ἐάν α, β, ψ εἶναι τά ἀτομικά βάρη τῶν Ag, Cl , Na τότε

$$\frac{\psi+\beta}{\alpha} = \frac{\chi}{1} \quad ἤ \quad \psi=\alpha\chi-\beta, \quad \alpha = \frac{\psi+\beta}{\chi}$$

ἄρα $$\frac{d\psi}{\psi} = \frac{\alpha d\chi}{\alpha\chi-\beta} = \frac{(\psi+\beta)d\chi}{(\alpha\chi-\beta)\chi} = \frac{\psi+\beta}{\psi} \cdot \frac{d\chi}{\chi}$$

Ἄν $\psi=23$, $\beta=35{,}5$, $\frac{d\psi}{\psi} = 2{,}54\,\frac{d\chi}{\chi}$

ἤτοι σφάλμα 1% εἰς τόν προσδιορισμόν τοῦ Cl θά προκαλέσῃ σφάλμα 2,5% εἰς τό α.β. τοῦ Na.

Ἐάν ἡ τιμή ψ ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα ἤ τήν διαφοράν δύο μεγεθῶν τότε θά ἔχωμεν:

$$\psi=\alpha_1+\alpha_2. \quad \Delta\psi = \pm\left[|\Delta\alpha_1|+|\Delta\alpha_2|\right]$$

$$\frac{\Delta\psi}{\psi} = \pm\left[\frac{|\Delta\alpha_1|+|\Delta\alpha_2|}{\alpha_1+\alpha_2}\right]$$

Ἐάν $\Delta\alpha_1=\Delta\alpha_2$ τότε $\frac{\Delta\psi}{\psi} = \pm\frac{2\Delta\alpha}{\alpha_1+\alpha_2}$

Ἐάν $\psi=\alpha_1-\alpha_2$, θά εἶναι :

$$\frac{\Delta\psi}{\psi} = \pm\left[\frac{|\Delta\alpha_1|+|\Delta\alpha_2|}{\alpha_1-\alpha_2}\right]$$

ἄν $\Delta\alpha_1=\Delta\alpha_2=\Delta\alpha$ τότε $\frac{\Delta\psi}{\psi} = \pm \frac{2\Delta\alpha}{\alpha_1-\alpha_2}$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι τό σχετικόν σφάλμα, ἀκόμη καί εἰς μικρά ἀπόλυτα σφάλματα $\Delta\alpha_1$ καί $\Delta\alpha_2$, δύναται νά λάβη μεγάλην τιμήν οταν τό ψ εἶναι διαφορά δύο μεγεθῶν. Τό σφάλμα τοῦτο εἶναι τόσον μεγαλύτερον ὅσον τά μετρούμενα μεγέθη διαφέρουν ἐλάχιστα μεταξύ των.

Κατά τήν μέτρησιν θερμοκρασίας $t_1=\alpha_1$, $t_2=\alpha_2$

$$\psi=t_1-t_2 \quad \text{καί} \quad \frac{\Delta\psi}{\psi} = \pm \frac{|\Delta t_1|+|\Delta t_2|}{t_1-t_2} = \pm \frac{2\Delta t}{t_1-t_2}$$

ἐάν $t_1-t_2=5^o$ καί ἡ θερμοκρασία μετρεῖται μέ ἀκρίβειαν $0{,}1^o$, τότε τό σχετικόν σφάλμα εἶναι $\pm \frac{2.0{,}1}{5} = \pm 0{,}04$ ἤτοι 4%.

Ἐάν $t_1-t_2 = 0{,}2^o$ τότε τό σχετικόν σφάλμα εἶναι $\pm \frac{2.0{,}1}{0{,}2} = \pm 1$ ἤτοι 100%.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νά προσδιορίσωμεν τό σχετικόν σφάλμα κατά τόν υπολογισμόν τοῦ μοριακοῦ βάρους κρυοσκοπικῶς.

Ἔχομεν τόν τύπον $M= k\frac{1000.\ m_A}{m_B}$

ἔνθα M = τό μ.β. τῆς οὐσίας, m_A= ἡ μᾶζα τῆς διαλυθείσης οὐσίας, m_B= ἡ μᾶζα τοῦ διαλύτου καί $\Theta= t_o-t$ = διαφορά θερμοκρασίας. Κατά τόν προσδιορισμόν τοῦ μ.β. τό σφάλμα ΔM εἶναι συνάρτησις τῶν ἀπ'εὐθείας μετρουμένων μεγεθῶν m_A, m_B, t (Δm_A, Δm_B, $\Delta\Theta$).

Συμφώνως πρός τά προηγούμενα ἔχομεν:

$$\frac{\Delta M}{M} = \pm\left[\frac{\Delta m_A}{m_A} + \frac{\Delta m_B}{m_B} + \frac{\Delta\Theta}{\Theta}\right]$$

Ἔστω $m_A=0{,}3gr$ καί ὅτι τό ἀπόλυτον σφάλμα τοῦ ἀναλυτικοῦ ζυγοῦ εἶναι $\Delta m_A=0{,}0002$ gr. $m_B=20$ gr. καί ἔστω ὅτι ζυγίζεται μέ συνήθη ζυγόν σφάλματος $\Delta m_B = 0,05$ gr. Ἡ ἀκρίβεια ἀναγνώσεως εἰς τό θερμόμετρον BECKMANN ἔστω ὅτι εἶναι $0,002^o$, ἡ δέ θερμοκρασία πήξεως τοῦ διαλύτου (εἰς τρεῖς μετρήσεις) ἦτο:

$$t_1 = 5,801, \quad t_2 = 5,790, \quad t_3 = 5,802$$

ἄρα $$\bar{t} = \frac{5,801+5,790+5,802}{3} = 5,797$$

$$\Delta t_1 = |5,797 - 5,801| = 0,004$$
$$\Delta t_2 = |5,797 - 5,790| = 0,007$$
$$\Delta t_3 = |5,797 - 5,802| = 0,005$$

$$\Delta\bar{t} = \frac{0,004+0,007+0,005}{3} = \pm\ 0,005$$

Ἡ θερμοκρασία πήξεως τοῦ διαλύματος διά τάς τρεῖς μετρήσεις ἦτο ἀντιστοίχως:

$$t'_1 = 5,500, \quad t'_2 = 5,504, \quad t'_3 = 5,495$$

ἄρα $$\bar{t}' = \frac{5,500+5,504+5,495}{3} = 5,500$$

$$\Delta t'_1 = 0, \quad \Delta t'_2 = 0,004, \quad \Delta t'_3 = 0,005$$

$$\overline{\Delta t}' = \frac{0+0,004+0,005}{3} = \pm\ 0,003$$

$$\Delta\Theta = \Delta\bar{t} + \Delta\bar{t}' = 0,005 + 0,003 = 0,008$$

$$\Theta = \bar{t} - \bar{t}' = t_o - t = 5,797-5,500=0,297$$

ἄρα :

$$\frac{\Delta\Theta}{\Theta} = \frac{0,008}{0,297} = 0,027, \qquad \frac{\Delta m_A}{m_A} = \frac{0,0002}{0,3} = 6,6.10^{-4}$$

$$\frac{\Delta m_B}{m_B} = \frac{0,05}{20} = 2,5.10^{-4}$$

καί συνεπῶς τό σχετικόν σφάλμα κατά τόν προσδιορισμόν τοῦ μ.β. κρυοσκοπικῶς εἶναι:

$$\frac{\Delta M}{M} = \pm\left[6,6.10^{-4}+2,5.10^{-4}+2,7.10^{-2}\right] = \pm\ 0,028$$

ἤτοι τό μέγιστον σχετικόν σφάλμα κατά τόν προσδιορισμόν τούτου ἦτο 2,8%. Ὁ ὑπολογισμός δεικνύει ὅτι τό σχετικόν σφάλμα κατά τόν προσδιορισμόν τοῦ μ.β. κρυοσκοπικῶς ἐξαρτᾶται κυρίως ἐκ τῆς ἀκριβείας μετρήσεως τῆς θερμοκρασίας. Διά νά ἐλαττωθῇ τό σφάλμα θά ἠδύνατο νά λάβῃ κανείς μεγαλυτέραν ποσότητα οὐσίας ὥστε νά αὐξηθῇ ἡ διαφορά $\Theta = t_0 - t$. Ἡ χρησιμοποιηθεῖσα ὅμως διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ μ.β. ἐξίσωσις ἰσχύει δι'ἀραιά διαλύματα καί συνεπῶς αὔξησις τῆς συγκεντρώσεως ὁδηγεῖ εἰς τήν ἐμφάνισιν ἑτέρου συστηματικοῦ σφάλματος. Ἄρα δέν ἔχει νόημα ἡ ζύγισις τοῦ διαλύτου νά γίνεται μέ ἀκριβέστερον ζυγόν ἐφ'ὅσον τοῦτο δέν ὁδηγεῖ εἰς τήν αὔξησιν τῆς ἀκριβείας κατά τόν προσδιορισμόν τοῦ μ.β.

Κατά τήν μέτρησιν τῆς ἠλεκτρικῆς ἀντιστάσεως διά τῆς μεθόδου τῆς ἀντισταθμίσεως εὑρέθη εἰς τρεῖς μετρήσεις ἡ τιμή R ὡς ἑξῆς:

$$R_1=30,15,\quad R_2=30,00,\quad R_3=30,10\ (\text{ Ohm })$$

$$\text{Ἄρα}\quad \overline{R} = \frac{30,15+30,00+30,10}{3} = \frac{90,25}{3} = 30,08$$

$$\text{Ἔχομεν}\quad |\Delta R|_1= 0,07,\ |\Delta R|_2= 0,08,\ |\Delta R|_3= 0,02$$

$$\text{καί}\quad \overline{\Delta R} = 0,06 \quad \text{ἄρα}\quad \overline{R} = 30,08 \pm 0,06$$

καί τό σχετικόν σφάλμα εἶναι :

$$\frac{\overline{\Delta R}}{R} = \frac{0,06}{30,08} = 0,002 \quad \text{ἤτοι}\quad 0,2\%$$