

Στροφορμή

Θα οριστεί ως (γενικευμένη) στροφορμή κάθε

διανυσματικός τελεστής $\hat{\vec{J}} = (\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$

του οποίου οι συνιστώσες $\hat{J}_x, \hat{J}_y$ και $\hat{J}_z$ ικανοποιούν

τις ακόλουθες μεταθετικές σχέσεις:

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar \hat{J}_z, [\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hbar \hat{J}_x, [\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i\hbar \hat{J}_y$$

° Αποδεικνύεται ότι:

$$[\hat{J}^2, \hat{J}_x] = [\hat{J}^2, \hat{J}_y] = [\hat{J}^2, \hat{J}_z] = 0$$

υπονοεί $\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$

Συνεπώς ο $\hat{J}^2$ μπορεί να έχει κοινό εύνοτο ιδιοσυναρτη-
σεων με μία μόνο από τις συνιστώσες του. Έστω την $\hat{J}_z$.

Στην συνέχεια ορίζονται οι τελεστές "εξίμακος":

$$\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y \quad \text{και} \quad \hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y$$

Για τους τελεστές αυτούς ισχύουν:

α) $[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm] = \pm\hbar \hat{J}_\pm$, β) $[\hat{J}^2, \hat{J}_\pm] = 0$ και

$$\gamma) \hat{J}^2 = \hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_z^2 + \hbar \hat{J}_z$$

Αποδείξεις

$$\begin{aligned} \alpha) [\hat{J}_z, \hat{J}_+] &= [\hat{J}_z, \hat{J}_x] + i [\hat{J}_z, \hat{J}_y] = i\hbar \hat{J}_y - i \cdot i\hbar \hat{J}_x = \\ &= \hbar (\hat{J}_x + i\hat{J}_y) = \hbar \hat{J}_+ \end{aligned}$$

ομοίως και ο $\hat{J}_-$.

$$\beta) [\hat{J}^2, \hat{J}_\pm] = [\hat{J}^2, \hat{J}_x] \pm i [\hat{J}^2, \hat{J}_y] = 0 \pm 0 = 0$$

$$\begin{aligned} \gamma) \hat{J}_+ \hat{J}_- &= (\hat{J}_x + i\hat{J}_y)(\hat{J}_x - i\hat{J}_y) = \hat{J}_x^2 + i\hat{J}_y\hat{J}_x - i\hat{J}_x\hat{J}_y + \hat{J}_y^2 = \\ &= \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 - i[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - i \cdot i\hbar \hat{J}_z \Rightarrow \\ &\Rightarrow \hat{J}^2 = \hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_z^2 - \hbar \hat{J}_z \end{aligned}$$

$$\text{ομοίως } \hat{J}^2 = \hat{J}_- \hat{J}_+ + \hat{J}_z^2 + \hbar \hat{J}_z$$

Θα δείξει ότι εάν μια συνάρτηση f είναι ιδιοσυνάρτηση των $\hat{J}^2$ και $\hat{J}_z$ δηλαδή

$$\hat{J}^2 f = \lambda f \quad \text{και} \quad \hat{J}_z f = \mu f$$

τότε οι συναρτήσεις $(\hat{J}_{\pm} f)$ είναι επίσης ιδιοσυναρτήσεις των $\hat{J}^2$ και $\hat{J}_z$.

Απόδειξη

$$a) \quad \hat{J}^2 (\hat{J}_{\pm} f) = \hat{J}_{\pm} (\hat{J}^2 f) = \hat{J}_{\pm} \lambda f = \lambda (\hat{J}_{\pm} f)$$

δηλ. είναι και μοτίβια με την ίδια ιδιοτιμή λ .

$$b) \quad \hat{J}_z (\hat{J}_{\pm} f) = (\pm \hbar \hat{J}_{\pm} + \hat{J}_{\pm} \hat{J}_z) f = \pm \hbar \hat{J}_{\pm} f + \hat{J}_{\pm} \mu f \\ = (\pm \hbar + \mu) (\hat{J}_{\pm} f) \Rightarrow \hat{J}_z (\hat{J}_{\pm} f) = (\mu \pm \hbar) (\hat{J}_{\pm} f)$$

δηλαδή είναι με ιδιοτιμή την μ μειωμένη κατά $\hbar$ ($\hat{J}_{-} f$) ή αυξημένη κατά $\hbar$ ($\hat{J}_{+} f$). Γι' αυτό οι τέλεστες $\hat{J}_{\pm}$ ονομάζονται τέλεστες κτιμακός.

Εφαρμόζοντας διαδοχικά π.χ τον $\hat{J}_{+}$ στην f η φορές αυθόρμησε το μ κατά $\hbar$. Όμως υπάρχει ένα όριο στις δυνατές ιδιοτιμές του $\hat{J}_z$ διότι:

$$\langle \hat{J}^2 \rangle = \langle \hat{J}_x^2 \rangle + \langle \hat{J}_y^2 \rangle + \langle \hat{J}_z^2 \rangle \geq \langle \hat{J}_z^2 \rangle$$

$$\rightarrow \langle f | \hat{J}^2 | f \rangle \geq \langle f | \hat{J}_z^2 | f \rangle \Rightarrow \lambda \geq \mu^2$$

$$\rightarrow |\mu| \leq \sqrt{\lambda}$$

Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να υπάρχει μια κατάσταση $f_{\max}$ για την οποία να ισχύει:

$$\hat{J}_+ f_{\max} = 0$$

Ερωτάω ότι για αυτή την κατάσταση:

$$\hat{J}^2 f_{\max} = \lambda f_{\max}, \quad \hat{J}_z f_{\max} = \mu_{\max} f_{\max}$$

Θα θέσω $\mu_{\max} = j\hbar$ όπου j ένας τυχαίος αριθμός.

Επίσης θα ισχύει:

$$\begin{aligned} \hat{J}^2 f_{\max} &= (\hat{J}_- \hat{J}_+ + \hat{J}_z^2 + \hbar \hat{J}_z) f_{\max} = \\ &= 0 + (j\hbar)^2 f_{\max} + \hbar (j\hbar) f_{\max} = j(j+1)\hbar^2 f_{\max} \end{aligned}$$

$$\text{Αντ. } \lambda = j(j+1)\hbar^2$$

Όλα τα παραπάνω ισχύουν για την διαδοχική εφαρμογή των $\hat{J}_-$. Επειδή όπως είδαμε $|\mu| \leq \sqrt{\lambda}$

$$\rightarrow -\sqrt{\lambda} \leq \mu \leq \sqrt{\lambda} \quad \text{θα έχουμε και κάτω γραμμή για } \mu.$$

Αρα θα υπάρχει $f_{\min}$ για την οποία θα ισχύει
$$\hat{J}_- f_{\min} = 0$$

και έστω: $\hat{J}^2 f_{\min} = \lambda f_{\min}$ $\hat{J}_z f_{\min} = j' \hbar f_{\min}$

Επίσης $\hat{J}^2 f_{\min} = (\hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_z^2 - \hbar \hat{J}_z) f_{\min} =$
 $= 0 + (j' \hbar)^2 f_{\min} + \hbar j' \hbar f_{\min} = \hbar^2 j' (j' + 1) f_{\min}$

Αντ. $\lambda = j' (j' + 1) \hbar^2$ όπως είδαμε ότι επίσης
 $\lambda = j (j + 1) \hbar^2$

$$\Rightarrow j(j+1) = j'(j'+1) \Rightarrow j^2 - j'^2 + j + j' = 0$$

$$\Rightarrow (j+j')(j-j') + (j+j') = 0 \Rightarrow (j+j')(j-j'+1) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{j = -j'}$$

(η λύση $j' = j+1$ θα έδινε ιδιοτιμή $j' \hbar = (j+1) \hbar > j \hbar$
που δεν επιτρέπεται αφού $j \hbar$ είναι το μέγιστο μ)

Τα παραπάνω μᾶς ὁδηγοῦν στο συμπέρασμα ὅτι
 γράφοντας τὴν ἰσοτιμὴ ὡς $\mu = m\hbar$ τὸ m πρέπει
 νὰ κυμαίνεται μεταξύ $-j$ καὶ j ($-j \leq m \leq j$) κατὰ
 N ἀκέραια βήματα, δηλαδὴ $j = -j + N \Rightarrow j = \frac{N}{2}$.

Τὸ τελευταῖο σημαίνει ὅτι τὸ j μπορεῖ νὰ λαμβά-
 νει ἀκέραιες ἢ ἡμιακέραιες τιμὲς μόνο. Δηλ.

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \text{ καὶ } m = -j, \dots, +j$$

Γιὰ κάθε δεδομένη τιμὴ τοῦ j τὰ εἶναι δυνατὰς
 $(2j+1)$ τιμὲς τοῦ m . (Ἐκφύττωσις). Οἱ ἰσοσυνάρτη-
 σεις f δὲ γράφονται: f_j^m ὅπου γαίνεται ἡ ἀντι-
 στοιχία μὲ τὶς σφαιρικὰς ἀρμονικὰς Y_l^m .

Ποιὰ εἶναι ἡ δράση τῶν $\hat{J}_\pm$ ἐπὶ τῶν f_j^m ;

Ἀπάντησις

$$\text{Ἐπειδὴ } \hat{J}_z (\hat{J}_+ f_j^m) = (m+1)\hbar (\hat{J}_+ f_j^m)$$

$$\hat{J}_+ (\hat{J}_+ f_j^m) \sim f_j^{m+1} \quad \text{δηλ.} \quad (\hat{J}_+ f_j^m) = C_+ f_j^{m+1}$$

και Ιπτεΐται ο C_+ . Θα έχουμε:

$$\langle \hat{J}_+ f_j^m | \hat{J}_+ f_j^m \rangle = |C_+|^2 \langle f_j^{m+1} | f_j^{m+1} \rangle = |C_+|^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |C_+|^2 &= \langle \hat{J}_+ f_j^m | \hat{J}_+ f_j^m \rangle = \langle f_j^m | \hat{J}_- \hat{J}_+ | f_j^m \rangle = \\ &= \langle f_j^m | \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hat{J}_z \hbar | f_j^m \rangle = \\ &= \langle f_j^m | j(j+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2 - m\hbar^2 | f_j^m \rangle = \\ &= [j(j+1) - m(m+1)] \hbar^2 \underbrace{\langle f_j^m | f_j^m \rangle}_{=1} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_+ = \hbar [j(j+1) - m(m+1)]^{1/2} \text{ και ομοίως}$$

$$C_- = \hbar [j(j+1) - m(m-1)]^{1/2}$$

Ετσι τελικώς:

$$\hat{J}_\pm f_j^m = \hbar [j(j+1) - m(m\pm 1)]^{1/2} f_j^{m\pm 1}$$

Στις περιπτώσεις που πρόκειται για τροχιακή
στροφορμή το j παίρνει μόνο ακέραιες τιμές
ενώ ιδιοσυναρτήσεις είναι οι γνωστές σφαιρικές αρ-
μονικές Y_l^m .

Υπάρχει όμως και ένα είδος εγγενούς στροφορ-
μής χαρακτηριστικής των στοιχειωδών σωματιδίων
που ονομάζεται spin και οι ιδιοσυναρτήσεις του
δεν μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει χωρικών
συντεταγμένων ενώ το j μπορεί να παίρει τόσο
ακέραιες όσο και ημισακέραιες τιμές.

Δύο $\vec{J}$ ως προς στροφές.

Έστω δύο στροφές $\vec{J}_1, \vec{J}_2$ με ιδιοσυναρτήσεις $|j_1 m_1\rangle$ και $|j_2 m_2\rangle$. Ερδιαφερόμεθα για την συνθετική στροφή $\vec{J}$ του συστήματος.

Γνωρίζουμε

$$[\hat{J}^2, \hat{J}_z] = 0 \quad [\hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2] = 0$$

$$[\hat{J}_{1x}, \hat{J}_{2x}] = [\hat{J}_{1y}, \hat{J}_{2y}] = [\hat{J}_{1z}, \hat{J}_{2z}] = 0$$

Κλασσικά ισχύει:

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$$

Κβαντικά $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$

$$\text{δηλ. } \hat{J}_x = \hat{J}_{1x} + \hat{J}_{2x}$$

$$\hat{J}_y = \hat{J}_{1y} + \hat{J}_{2y}$$

$$\hat{J}_z = \hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z}$$

Για να δούμε εάν πρόκειται για στροφή $\vec{J}$ ε-
ξέτασουμε εάν πληρούνται οι γνωστές μεταθετικές
σχέσεις.

$$\begin{aligned}
 [\hat{J}_x, \hat{J}_y] &= [\hat{J}_{1x} + \hat{J}_{2x}, \hat{J}_{1y} + \hat{J}_{2y}] = \\
 &= [\hat{J}_{1x}, \hat{J}_{1y}] + [\hat{J}_{1x}, \hat{J}_{2y}] + [\hat{J}_{2x}, \hat{J}_{1y}] + [\hat{J}_{2x}, \hat{J}_{2y}] = \\
 &= i\hbar \hat{J}_{1z} + 0 + 0 + i\hbar \hat{J}_{2z} = i\hbar (\hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z}) = i\hbar \hat{J}_z
 \end{aligned}$$

ὁμοίως καὶ οἱ ἄλλοι.

Θὰ ἔχουμε:

$$\begin{aligned}
 \hat{J}_1^2 |j_1 m_1\rangle &= j_1(j_1+1)\hbar^2 |j_1 m_1\rangle \\
 \hat{J}_{1z} |j_1 m_1\rangle &= m_1 \hbar |j_1 m_1\rangle \\
 \hat{J}_2^2 |j_2 m_2\rangle &= j_2(j_2+1)\hbar^2 |j_2 m_2\rangle \\
 \hat{J}_{2z} |j_2 m_2\rangle &= m_2 \hbar |j_2 m_2\rangle
 \end{aligned}$$

μὲ $j_1, j_2 = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$

Ἀναζητοῦμε ἰσοσυνάρτησεις τοῦ $\hat{J}^2$ ἐστὶ ὥστε:

$$\begin{aligned}
 \hat{J}^2 |j m_j\rangle &= j(j+1)\hbar^2 |j m_j\rangle \\
 \hat{J}_z |j m_j\rangle &= m_j \hbar |j m_j\rangle
 \end{aligned}$$

καὶ ἐρωτοῦμε εἰς ἂν μποροῦμε νὰ καθορίσουμε τὰ j
γνωρίζοντας τὰ j_1 καὶ j_2 , καὶ συνάρτησε τῶν $|j_1 m_1\rangle$
καὶ $|j_2 m_2\rangle$

Οι μεταπίτες $[\hat{J}^2, \hat{J}_1^2] = [\hat{J}^2, \hat{J}_2^2] = 0$

Διότι $\hat{J}^2 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + 2\hat{J}_1 \cdot \hat{J}_2$ Άρα οι ιδιοσυναρτήσεις των $\hat{J}^2, \hat{J}_1^2$ και $\hat{J}_2^2$ μπορούν να προσδιορισθούν ταυτόχρονα.

Επίσης:

$$[\hat{J}_z, \hat{J}_1^2] = [\hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z}, \hat{J}_1^2] = 0$$

$$[\hat{J}_z, \hat{J}_2^2] = [\hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z}, \hat{J}_2^2] = 0$$

Άρα είναι δυνατός ο ταυτόχρονος προσδιορισμός των $\hat{J}^2, \hat{J}_z, \hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2$ που θα συμβολίζουμε: $|j, j_z, j_1, j_2\rangle$

Όχι όμως και των $\hat{J}_{1z}, \hat{J}_{2z}$ διότι π.χ:

$$\begin{aligned} [\hat{J}_{1z}, \hat{J}^2] &= [\hat{J}_{1z}, \hat{J}_x^2] + [\hat{J}_{1z}, \hat{J}_y^2] + [\hat{J}_{1z}, \hat{J}_z^2] = \\ &= [\hat{J}_{1z}, \hat{J}_{1x}^2 + \hat{J}_{2x}^2 + 2\hat{J}_{1x}\hat{J}_{2x}] + [\hat{J}_{1z}, \hat{J}_{1y}^2 + \hat{J}_{2y}^2 + 2\hat{J}_{1y}\hat{J}_{2y}] + 0 = \\ &= [\hat{J}_{1z}, \hat{J}_{1x}^2 + \hat{J}_{1y}^2] + 2[\hat{J}_{1z}, \hat{J}_{1x}]\hat{J}_{2x} + 2[\hat{J}_{1z}, \hat{J}_{1y}]\hat{J}_{2y} = \\ &= [\hat{J}_{1z}, \hat{J}_1^2 - \hat{J}_{1z}^2] + 2i\hbar\hat{J}_{1y}\hat{J}_{2x} - 2i\hbar\hat{J}_{1x}\hat{J}_{2y} = \\ &= 0 + 2i\hbar(\hat{J}_{1y}\hat{J}_{2x} - \hat{J}_{1x}\hat{J}_{2y}) \neq 0 \end{aligned}$$

και ομοίως $[\hat{J}_{2z}, \hat{J}^2] \neq 0$

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση γινόμενο των:

$$|j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle \equiv |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$$

οι συναρτήσεις αυτές προφανώς είναι ιδιοσυναρτήσεις των $\hat{J}_1^2, \hat{J}_1^z, \hat{J}_2^2, \hat{J}_2^z$. Εξετάσουμε τώρα τους $\hat{J}^z, \hat{J}^2$.

$$\begin{aligned}\hat{J}^z |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle &= (\hat{J}_1^z + \hat{J}_2^z) |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle = \\ &= (m_1 + m_2) \hbar |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle\end{aligned}$$

δηλαδή ιδιοσυνάρτηση του $\hat{J}^z$ με ιδιοτιμή $(m_1 + m_2)\hbar$.

Όχι όμως απαραίτητα και του $\hat{J}^2 = (\hat{J}_1^x + \hat{J}_1^y)^2 + (\hat{J}_1^y + \hat{J}_1^z)^2 + (\hat{J}_1^z + \hat{J}_1^x)^2$

Αναζητούμε τώρα ιδιοσυναρτήσεις των $\hat{J}^2, \hat{J}^z, \hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2$ που συμβολίζουμε $|j_1 j_2 j m_j\rangle$ δηλ. με κванτικούς αριθμούς

j_1, j_2, j, m_j . Μπορούμε να γράψουμε:

$$|j_1 j_2 j m_j\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{+j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{+j_2} C_{m_1 m_2}^{j, m_j} |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$$

^a όπου πρέπει να προσδιορισθούν οι συντελεστές.

^b Οι παραπάνω συντελεστές ονομάζονται συντελεστές

Wigner ή γνωστοί ως Clebsch-Gordan.

και για ενα: $C_{m_1 m_2}^{j m_j} = \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m_j \rangle$

Διων:

$$\sum_{m_1' m_2'} C_{m_1' m_2'}^{j m_j} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 m_1' j_2 m_2' \rangle =$$

$$= \sum_{m_1' m_2'} C_{m_1' m_2'}^{j m_j} \langle j_1 m_1 | j_1 m_1' \rangle \langle j_2 m_2 | j_2 m_2' \rangle =$$

$$= \sum_{m_1' m_2'} C_{m_1' m_2'}^{j m_j} \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'} = C_{m_1 m_2}^{j m_j}$$

Στη συνέχεια θα δειξουμε στις $|j_1 j_2 j m_j\rangle$ με τον $\hat{J}_z$

Πρεπει: $\hat{J}_z |j_1 j_2 j m_j\rangle = m_j \hbar |j_1 j_2 j m_j\rangle = m_j \hbar \sum_{m_1 m_2} C_{m_1 m_2}^{j m_j} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$

Επιστ: $\hat{J}_z |j_1 j_2 j m_j\rangle = (\hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z}) \sum_{m_1 m_2} C_{m_1 m_2}^{j m_j} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$

$$= \sum_{m_1 m_2} \left\{ (\hat{J}_{1z} |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle + (\hat{J}_{2z} |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle) \right\} =$$

$$= \sum_{m_1 m_2} \left\{ C_{m_1 m_2} m_1 \hbar |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle + m_2 \hbar |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle \right\} =$$

$$= \sum_{m_1 m_2} C_{m_1 m_2} (m_1 + m_2) \hbar |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$$

Για να ισχυει:

$$m_j \hbar \sum_{m_1 m_2} C_{m_1 m_2}^{j m_j} |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle = \sum_{m_1 m_2} C_{m_1 m_2}^{j m_j} (m_1 + m_2) \hbar |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$$

Θα πρέπει $m_1 + m_2 = m_j$ ώστε το $(m_1 + m_2)h$ να βγαίνει κοινός παράγοντας. Δηλαδή οι όροι του αθροίσματος για τους οποίους $m_1 + m_2 \neq m_j$ πρέπει να μηδενίζονται ή αλλιώς:

$$C_{m_1 m_2}^{j m_j} = 0 \quad \text{εκτός εάν} \quad \underline{m_j = m_1 + m_2}$$

Θα ισχύουν επίσης:

$$-j_1 \leq m_1 \leq j_1 \quad \text{και} \quad -j_2 \leq m_2 \leq j_2$$

$$\text{ή} \quad -j_1 \leq m_j - m_2 \leq j_1 \quad \text{και} \quad -j_2 \leq m_j - m_1 \leq j_2$$

για όλες τις τιμές m_1, m_2, m_j επομένως και για τις μέγιστες $m_1 = j_1, m_2 = j_2, m_j = j$. Έτσι:

$$-j_1 \leq j - j_2 \leq j_1 \Rightarrow j_2 - j_1 \leq j \leq j_1 + j_2$$

$$-j_2 \leq j - j_1 \leq j_2 \Rightarrow j_1 - j_2 \leq j \leq j_1 + j_2$$

Οι δύο τελευταίες συνδυάζονται εις την:

$$\underline{|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2}$$

Έτσι έχουμε περιορισμούς για τις δυνατές τιμές των κβαντικών αριθμών j, m_j .