**Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων σε δευτεροβάθμια συνάρτηση μιας μεταβλητής**

Δίνεται σύνολο ζευγών δεδομένων ($x_i$, $y_i$), $i$ = 1, 2, … $N$. Οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής $x$ δεν έχουν σφάλμα. Με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων της υπολογιζόμενης συναρτήσεως από τα δεδομένα $y_i$.

$$S = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - f(x_i)\right]^2 \text{ , όπου } f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Η ελαχιστοποίηση θα επιτευχθεί με επιλογή των κατάλληλων τιμών των παραμέτρων της συναρτήσεως, δηλ. των $a_0$, $a_1$, $a_2$. Αν θεωρήσουμε το $S$ ως συνάρτηση των παραμέτρων, στο ελάχιστο οι μερικές παράγωγοι του $S$ ως προς κάθε μια παράμετρο θα είναι 0. Έτσι προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial a_0}\left[y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right]^2 = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial a_1}\left[y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right]^2 = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial a_2}\left[y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right]^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} 2\left[y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right](-1) = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} 2\left[y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right](-x_i) = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} 2\left[y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right](-x_i^2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} a_0 + \sum_{i=1}^{N} a_1 x_i + \sum_{i=1}^{N} a_1 x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} a_0 x_i + \sum_{i=1}^{N} a_1 x_i^2 + \sum_{i=1}^{N} a_1 x_i^3 = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} a_0 x_i^2 + \sum_{i=1}^{N} a_1 x_i^3 + \sum_{i=1}^{N} a_1 x_i^4 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 y_i \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle a_0 \sum_{i=1}^{N} 1 + a_1 \sum_{i=1}^{N} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \displaystyle a_0 \sum_{i=1}^{N} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{N} x_i^3 = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \\ \displaystyle a_0 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{N} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{N} x_i^4 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 y_i \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_0 = \dfrac{D_{a_0}}{D} \\ a_1 = \dfrac{D_{a_1}}{D} \\ a_2 = \dfrac{D_{a_2}}{D} \end{array}\right\} \text{ όπου}$$

$$D_{a_0} = \begin{vmatrix} \sum y_i & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i y_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 y_i & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{vmatrix} = \sum y_i \begin{vmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{vmatrix} - \sum x_i y_i \begin{vmatrix} \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{vmatrix} + \sum x_i^2 y_i \begin{vmatrix} \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \end{vmatrix}$$

$$D_{a_1} = \begin{vmatrix} N & \sum y_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i y_i & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^2 y_i & \sum x_i^4 \end{vmatrix} = -\sum y_i \begin{vmatrix} \sum x_i & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^4 \end{vmatrix} + \sum x_i y_i \begin{vmatrix} N & \sum x_i^2 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^4 \end{vmatrix} - \sum x_i^2 y_i \begin{vmatrix} N & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^3 \end{vmatrix}$$

$$D_{a_2} = \begin{vmatrix} N & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^2 y_i \end{vmatrix} = \sum y_i \begin{vmatrix} \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \end{vmatrix} - \sum x_i y_i \begin{vmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \end{vmatrix} + \sum x_i^2 y_i \begin{vmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix}$$

και $D = \begin{vmatrix} N & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{vmatrix}$.

Ή $D_{a_0} = C_0 B_{11} - C_1 B_{21} + C_2 B_{31}$ , $D_{a_1} = C_0 B_{12} - C_1 B_{22} + C_2 B_{32}$ , $D_{a_2} = C_0 B_{13} - C_1 B_{23} + C_2 B_{33}$ , όπου θέσαμε $C_0 = \sum y_i , C_1 = \sum x_i y_i , C_2 = \sum x_i^2 y_i$ και $B_{ij}$ είναι οι ελάσσονες ορίζουσες της *D*. Παρατηρούμε ότι $B_{12} = B_{21} , B_{13} = B_{31} , B_{23} = B_{32}$

Ο υπολογισμός των αβεβαιοτήτων των υπολογισμένων παραμέτρων προκύπτει από την διάδοση σφάλματος. Τα σφάλματα (αβεβαιότητες) των $y_i$ μεταφέρουν το σφάλμα τους στις παραμέτρους. Για τυχαία σφάλματα (δηλ. με κατανομή Gauss) ισχύει ότι η διακύμανση ενός μεγέθους (το τετράγωνο της αβεβαιότητας αυτού του μεγέθους) ισούται με άθροισμα των διακυμάνσεων των μεγεθών από τα οποία υπολογίστηκε πολλαπλασιασμένες επί την μερική παράγωγο ως προς καθένα από αυτά τα μεγέθη.

$$\sigma_{a_0}^2 = \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{\partial a_0}{\partial y_i} \right)^2 \sigma_{y_i}^2 = \frac{\sigma_y^2}{D^2} \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{\partial D_{a_0}}{\partial y_i} \right)^2$$

$$\sigma_{a_1}^2 = \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{\partial a_1}{\partial y_i} \right)^2 \sigma_{y_i}^2 = \frac{\sigma_y^2}{D^2} \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{\partial D_{a_1}}{\partial y_i} \right)^2$$

$$\sigma_{a_2}^2 = \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{\partial a_2}{\partial y_i} \right)^2 \sigma_{y_i}^2 = \frac{\sigma_y^2}{D^2} \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{\partial D_{a_2}}{\partial y_i} \right)^2$$

, όπου θέσαμε $\sigma_{y_i}^2 = \sigma_y^2 = \frac{S}{N-3}$ , δηλ. έχουμε θεωρήσει ότι όλα τα δεδομένα έχουν το ίδιο σφάλμα και την ίδια βαρύτητα (στατιστικό βάρος) που υπολογίζεται από την ποιότητα του αποτελέσματος της ελαχιστοποιήσεως, το *S*, λαμβάνοντας υπόψιν το πλήθος των βαθμών ελευθερίας, $N - 3$ = το πλήθος των δεδομένων μείον το πλήθος των υπολογισμένων παραμέτρων.

$$\frac{\partial D_{a_0}}{\partial y_i} = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} x_j^3 \\ \sum_{j=1}^{N} x_j^3 & \sum_{j=1}^{N} x_j^4 \end{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial y_j}{\partial y_i} - \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} x_j & \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} x_j^3 & \sum_{j=1}^{N} x_j^4 \end{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial x_j y_j}{\partial y_i} + \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} x_j & \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} x_j^3 \end{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial x_j^2 y_j}{\partial y_i}$$

$$\frac{\partial D_{a_1}}{\partial y_i} = - \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} x_j & \sum_{j=1}^{N} x_j^3 \\ \sum_{j=1}^{N} x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} x_j^4 \end{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial y_j}{\partial y_i} + \begin{vmatrix} N & \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} x_j^4 \end{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial x_j y_j}{\partial y_i} - \begin{vmatrix} N & \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} x_j & \sum_{j=1}^{N} x_j^3 \end{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial x_j^2 y_j}{\partial y_i}$$

$$\frac{\partial D_{a_2}}{\partial y_i} = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} x_j & \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} x_j^3 \end{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial y_j}{\partial y_i} - \begin{vmatrix} N & \sum_{j=1}^{N} x_j \\ \sum_{j=1}^{N} x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} x_j^3 \end{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial x_j y_j}{\partial y_i} + \begin{vmatrix} N & \sum_{j=1}^{N} x_j \\ \sum_{j=1}^{N} x_j & \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \end{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial x_j^2 y_j}{\partial y_i}$$

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial D_{a_0}}{\partial y_i} &= \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} x_j^3 \\ \sum_{j=1}^{N} x_j^3 & \sum_{j=1}^{N} x_j^4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} x_j & \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} x_j^3 & \sum_{j=1}^{N} x_j^4 \end{vmatrix} x_i + \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} x_j & \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} x_j^3 \end{vmatrix} x_i^2 \\
\frac{\partial D_{a_1}}{\partial y_i} &= -\begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} x_j & \sum_{j=1}^{N} x_j^3 \\ \sum_{j=1}^{N} x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} x_j^4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} N & \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} x_j^4 \end{vmatrix} x_i - \begin{vmatrix} N & \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} x_j & \sum_{j=1}^{N} x_j^3 \end{vmatrix} x_i^2 \\
\frac{\partial D_{a_2}}{\partial y_i} &= \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} x_j & \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} x_j^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} N & \sum_{j=1}^{N} x_j \\ \sum_{j=1}^{N} x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} x_j^3 \end{vmatrix} x_i + \begin{vmatrix} N & \sum_{j=1}^{N} x_j \\ \sum_{j=1}^{N} x_j & \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \end{vmatrix} x_i^2
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_{a_0}^2 &= \frac{\sigma_y^2}{D^2} \sum_{i=1}^{N} \left[ \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} x_j^3 \\ \sum_{j=1}^{N} x_j^3 & \sum_{j=1}^{N} x_j^4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} x_j & \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} x_j^3 & \sum_{j=1}^{N} x_j^4 \end{vmatrix} x_i + \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} x_j & \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} x_j^3 \end{vmatrix} x_i^2 \right]^2 \\
\sigma_{a_1}^2 &= \frac{\sigma_y^2}{D^2} \sum_{i=1}^{N} \left[ -\begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} x_j & \sum_{j=1}^{N} x_j^3 \\ \sum_{j=1}^{N} x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} x_j^4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} N & \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} x_j^4 \end{vmatrix} x_i - \begin{vmatrix} N & \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} x_j & \sum_{j=1}^{N} x_j^3 \end{vmatrix} x_i^2 \right]^2 \\
\sigma_{a_2}^2 &= \frac{\sigma_y^2}{D^2} \sum_{i=1}^{N} \left[ \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} x_j & \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} x_j^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} N & \sum_{j=1}^{N} x_j \\ \sum_{j=1}^{N} x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} x_j^3 \end{vmatrix} x_i + \begin{vmatrix} N & \sum_{j=1}^{N} x_j \\ \sum_{j=1}^{N} x_j & \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \end{vmatrix} x_i^2 \right]^2
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_{a_0}^2 &= \frac{\sigma_y^2}{D^2} \sum_{i=1}^{N} \left[ B_{11} - B_{12} x_i + B_{13} x_i^2 \right]^2 \\
\sigma_{a_1}^2 &= \frac{\sigma_y^2}{D^2} \sum_{i=1}^{N} \left[ -B_{12} + B_{22} x_i - B_{23} x_i^2 \right]^2 \\
\sigma_{a_2}^2 &= \frac{\sigma_y^2}{D^2} \sum_{i=1}^{N} \left[ B_{13} - B_{23} x_i + B_{33} x_i^2 \right]^2
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_{a_0}^2 &= \frac{\sigma_y^2}{D^2} \left( B_{11}^2 N - 2 B_{11} B_{12} \sum x_i + 2 B_{11} B_{13} \sum x_i^2 + B_{12}^2 \sum x_i^2 - 2 B_{12} B_{13} \sum x_i^3 + B_{13}^2 \sum x_i^4 \right) \\
\sigma_{a_1}^2 &= \frac{\sigma_y^2}{D^2} \left( B_{12}^2 N - 2 B_{12} B_{22} \sum x_i + 2 B_{12} B_{23} \sum x_i^2 + B_{22}^2 \sum x_i^2 - 2 B_{22} B_{23} \sum x_i^3 + B_{23}^2 \sum x_i^4 \right) \\
\sigma_{a_2}^2 &= \frac{\sigma_y^2}{D^2} \left( B_{13}^2 N - 2 B_{13} B_{23} \sum x_i + 2 B_{13} B_{33} \sum x_i^2 + B_{23}^2 \sum x_i^2 - 2 B_{23} B_{33} \sum x_i^3 + B_{33} \sum x_i^4 \right)
\end{aligned}\right\}
$$

28/11/2019

**Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων σε δευτεροβάθμια συνάρτηση μιας μεταβλητής με στατιστικά βάρη**

Δίνεται σύνολο ζευγών δεδομένων ($x_i$, $y_i$) με στατιστικά βάρη $w_i$, $i = 1, 2, \ldots N$. Οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής $x$ δεν έχουν σφάλμα. Με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων της υπολογιζόμενης συναρτήσεως από τα δεδομένα $y_i$.

$$S = \sum_{i=1}^{N} w_i \left[ y_i - f(x_i) \right]^2 \text{ , όπου } f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Η ελαχιστοποίηση θα επιτευχθεί με επιλογή των κατάλληλων τιμών των παραμέτρων της συναρτήσεως, δηλ. των $a_0$, $a_1$, $a_2$. Αν θεωρήσουμε το $S$ ως συνάρτηση των παραμέτρων, στο ελάχιστο οι μερικές παράγωγοι του $S$ ως προς κάθε μια παράμετρο θα είναι 0. Έτσι προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} w_i \frac{\partial}{\partial a_0} \left[ y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 \right]^2 = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} w_i \frac{\partial}{\partial a_1} \left[ y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 \right]^2 = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} w_i \frac{\partial}{\partial a_2} \left[ y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 \right]^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} 2\left[ y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 \right]\left( -w_i \right) = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} 2\left[ y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 \right]\left( -w_i x_i \right) = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} 2\left[ y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 \right]\left( -w_i x_i^2 \right) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} a_0 w_i + \sum_{i=1}^{N} a_1 w_i x_i + \sum_{i=1}^{N} a_1 w_i x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i y_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} a_0 w_i x_i + \sum_{i=1}^{N} a_1 w_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{N} a_1 w_i x_i^3 = \sum_{i=1}^{N} w_i x_i y_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} a_0 w_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{N} a_1 w_i x_i^3 + \sum_{i=1}^{N} a_1 w_i x_i^4 = \sum_{i=1}^{N} w_i x_i^2 y_i \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle a_0 \sum_{i=1}^{N} w_i + a_1 \sum_{i=1}^{N} w_i x_i + a_2 \sum_{i=1}^{N} w_i x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i y_i \\ \displaystyle a_0 \sum_{i=1}^{N} w_i x_i + a_1 \sum_{i=1}^{N} w_i x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{N} w_i x_i^3 = \sum_{i=1}^{N} w_i x_i y_i \\ \displaystyle a_0 \sum_{i=1}^{N} w_i x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{N} w_i x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{N} w_i x_i^4 = \sum_{i=1}^{N} w_i x_i^2 y_i \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_0 = \dfrac{D_{a_0}}{D} \\ a_1 = \dfrac{D_{a_1}}{D} \\ a_2 = \dfrac{D_{a_2}}{D} \end{array}\right\} \text{ όπου}$$

$$D_{a_0} = \begin{vmatrix} \sum w_i y_i & \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 \\ \sum w_i x_i y_i & \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i^3 \\ \sum w_i x_i^2 y_i & \sum w_i x_i^3 & \sum w_i x_i^4 \end{vmatrix} = \sum w_i y_i \begin{vmatrix} \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i^3 \\ \sum w_i x_i^3 & \sum w_i x_i^4 \end{vmatrix} - \sum w_i x_i y_i \begin{vmatrix} \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 \\ \sum w_i x_i^3 & \sum w_i x_i^4 \end{vmatrix} + \sum w_i x_i^2 y_i \begin{vmatrix} \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 \\ \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i^3 \end{vmatrix}$$

$$D_{a_1} = \begin{vmatrix} \sum w_i & \sum w_i y_i & \sum w_i x_i^2 \\ \sum w_i x_i & \sum w_i x_i y_i & \sum w_i x_i^3 \\ \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i^2 y_i & \sum w_i x_i^4 \end{vmatrix} = -\sum w_i y_i \begin{vmatrix} \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^3 \\ \sum w_i x_i^2 & \sum x_i^4 w_i \end{vmatrix} + \sum w_i x_i y_i \begin{vmatrix} \sum w_i & \sum w_i x_i^2 \\ \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i^4 \end{vmatrix} - \sum w_i x_i^2 y_i \begin{vmatrix} \sum w_i & \sum w_i x_i^2 \\ \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^3 \end{vmatrix}$$

$$D_{a_2} = \begin{vmatrix} \sum w_i & \sum w_i x_i & \sum w_i y_i \\ \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i y_i \\ \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i^3 & \sum w_i x_i^2 y_i \end{vmatrix} = \sum w_i y_i \begin{vmatrix} \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 \\ \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i^3 \end{vmatrix} - \sum w_i x_i y_i \begin{vmatrix} \sum w_i & \sum w_i x_i \\ \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i^3 \end{vmatrix} + \sum w_i x_i^2 y_i \begin{vmatrix} \sum w_i & \sum w_i x_i \\ \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 \end{vmatrix}$$

και $D = \begin{vmatrix} \sum w_i & \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 \\ \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i^3 \\ \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i^3 & \sum w_i x_i^4 \end{vmatrix}$.

Ή $D_{a_0} = C_0 B_{11} - C_1 B_{21} + C_2 B_{31}$, $D_{a_1} = C_0 B_{12} - C_1 B_{22} + C_2 B_{32}$, $D_{a_2} = C_0 B_{13} - C_1 B_{23} + C_2 B_{33}$,

όπου θέσαμε $C_0 = \sum w_i y_i, C_1 = \sum w_i x_i y_i, C_2 = \sum w_i x_i^2 y_i$ και $B_{ij}$ είναι οι ελάσσονες ορίζουσες της $D$. Παρατηρούμε ότι $B_{12} = B_{21}, B_{13} = B_{31}, B_{23} = B_{32}$

Ο υπολογισμός των αβεβαιοτήτων των υπολογισμένων παραμέτρων προκύπτει από την διάδοση σφάλματος. Τα σφάλματα (αβεβαιότητες) των $y_i$ μεταφέρουν το σφάλμα τους στις παραμέτρους. Για τυχαία σφάλματα (δηλ. με κατανομή Gauss) ισχύει ότι η διακύμανση ενός μεγέθους (το τετράγωνο της αβεβαιότητας αυτού του μεγέθους) ισούται με άθροισμα των διακυμάνσεων των μεγεθών από τα οποία υπολογίστηκε πολλαπλασιασμένες επί την μερική παράγωγο ως προς καθένα από αυτά τα μεγέθη.

$$\sigma_{a_0}^2 = \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{\partial a_0}{\partial y_i} \right)^2 \sigma_{y_i}^2 = \frac{1}{D^2} \sum_{i=1}^{N} w_i^{-1} \left( \frac{\partial D_{a_0}}{\partial y_i} \right)^2$$

$$\sigma_{a_1}^2 = \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{\partial a_1}{\partial y_i} \right)^2 \sigma_{y_i}^2 = \frac{1}{D^2} \sum_{i=1}^{N} w_i^{-1} \left( \frac{\partial D_{a_1}}{\partial y_i} \right)^2$$

, όπου θέσαμε $\sigma_{y_i}^2 = w_i^{-1}$ σύμφωνα με τον ορισμό

$$\sigma_{a_2}^2 = \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{\partial a_2}{\partial y_i} \right)^2 \sigma_{y_i}^2 = \frac{1}{D^2} \sum_{i=1}^{N} w_i^{-1} \left( \frac{\partial D_{a_2}}{\partial y_i} \right)^2$$

των στατιστικών βαρών.

$$w_i^{-1} \frac{\partial D_{a_0}}{\partial y_i} = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^3 \\ \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^3 & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^4 \end{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial y_j}{\partial y_i} - \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} w_j x_j & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^3 & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^4 \end{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial x_j y_j}{\partial y_i} + \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} w_j x_j & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^3 \end{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial x_j^2 y_j}{\partial y_i}$$

$$w_i^{-1} \frac{\partial D_{a_1}}{\partial y_i} = - \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} w_j x_j & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^3 \\ \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^4 \end{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial y_j}{\partial y_i} + \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} w_j & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^4 \end{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial x_j y_j}{\partial y_i} - \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} w_j & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} w_j x_j & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^3 \end{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial x_j^2 y_j}{\partial y_i}$$

$$w_i^{-1} \frac{\partial D_{a_2}}{\partial y_i} = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} w_j x_j & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^3 \end{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial y_j}{\partial y_i} - \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} w_j & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j \\ \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^3 \end{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial x_j y_j}{\partial y_i} + \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} w_j & \sum_{j=1}^{N} x_j w_j \\ \sum_{j=1}^{N} w_j x_j & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 \end{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial x_j^2 y_j}{\partial y_i}$$

$$\left.\begin{aligned}
w_i^{-1}\,\frac{\partial D_{a_0}}{\partial y_i} &= \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^3 \\ \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^3 & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} w_j x_j & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^3 & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^4 \end{vmatrix} x_i + \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} w_j x_j & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^3 \end{vmatrix} x_i^2 \\
w_i^{-1}\,\frac{\partial D_{a_1}}{\partial y_i} &= -\begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} w_j x_j & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^3 \\ \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} w_j & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^4 \end{vmatrix} x_i - \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} w_j & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} w_j x_j & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^3 \end{vmatrix} x_i^2 \\
w_i^{-1}\,\frac{\partial D_{a_2}}{\partial y_i} &= \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} w_j x_j & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} w_j & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j \\ \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^3 \end{vmatrix} x_i + \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} w_j & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j \\ \sum_{j=1}^{N} w_j x_j & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 \end{vmatrix} x_i^2
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{a_0}^2 &= \frac{1}{D^2}\sum_{i=1}^{N}\left[\begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^3 \\ \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^3 & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} w_j x_j & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^3 & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^4 \end{vmatrix} x_i + \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} w_j x_j & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^3 \end{vmatrix} x_i^2\right]^2 \\
\sigma_{a_1}^2 &= \frac{1}{D^2}\sum_{i=1}^{N}\left[-\begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} w_j x_j & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^3 \\ \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} w_j & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^4 \end{vmatrix} x_i - \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} w_j & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} w_j x_j & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^3 \end{vmatrix} x_i^2\right]^2 \\
\sigma_{a_2}^2 &= \frac{1}{D^2}\sum_{i=1}^{N}\left[\begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} w_j x_j & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 \\ \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} w_j & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j \\ \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^3 \end{vmatrix} x_i + \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} w_j & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j \\ \sum_{j=1}^{N} w_j x_j & \sum_{j=1}^{N} w_j x_j^2 \end{vmatrix} x_i^2\right]^2
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{a_0}^2 &= \frac{1}{D^2}\sum_{i=1}^{N}\left[B_{11} - B_{12}x_i + B_{13}x_i^2\right]^2 \\
\sigma_{a_1}^2 &= \frac{1}{D^2}\sum_{i=1}^{N}\left[-B_{12} + B_{22}x_i - B_{23}x_i^2\right]^2 \\
\sigma_{a_2}^2 &= \frac{1}{D^2}\sum_{i=1}^{N}\left[B_{13} - B_{23}x_i + B_{33}x_i^2\right]^2
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{a_0}^2 &= \frac{1}{D^2}\left(B_{11}^2 N - 2B_{11}B_{12}\sum x_i + 2B_{11}B_{13}\sum x_i^2 + B_{12}^2\sum x_i^2 - 2B_{12}B_{13}\sum x_i^3 + B_{13}^2\sum x_i^4\right) \\
\sigma_{a_1}^2 &= \frac{1}{D^2}\left(B_{12}^2 N - 2B_{12}B_{22}\sum x_i + 2B_{12}B_{23}\sum x_i^2 + B_{22}^2\sum x_i^2 - 2B_{22}B_{23}\sum x_i^3 + B_{23}^2\sum x_i^4\right) \\
\sigma_{a_2}^2 &= \frac{1}{D^2}\left(B_{13}^2 N - 2B_{13}B_{23}\sum x_i + 2B_{13}B_{33}\sum x_i^2 + B_{23}^2\sum x_i^2 - 2B_{23}B_{33}\sum x_i^3 + B_{33}\sum x_i^4\right)
\end{aligned}\right\}$$

16/8/2020