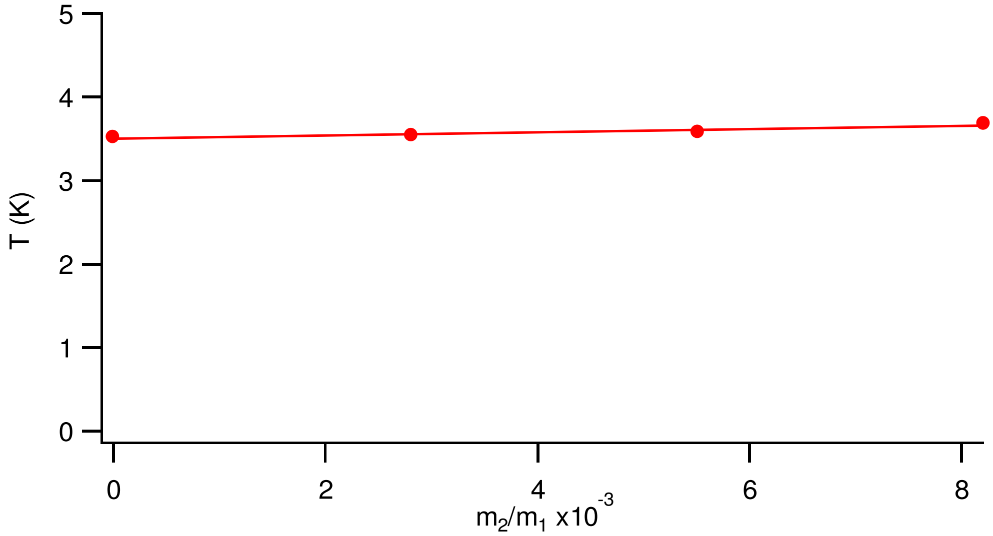
Ορθοί και λανθασμένοι τρόποι απεικονίσεως δεδομένων σε διάγραμμα

Από μετρήσεις σημείου ζέσεως σειράς διαλυμάτων προκύπτουν τα εξής δεδομένα:

T (K)	**m_2/m_1**
3.52	0.00000
3.54	0.00281
3.58	0.00552
3.68	0.00821

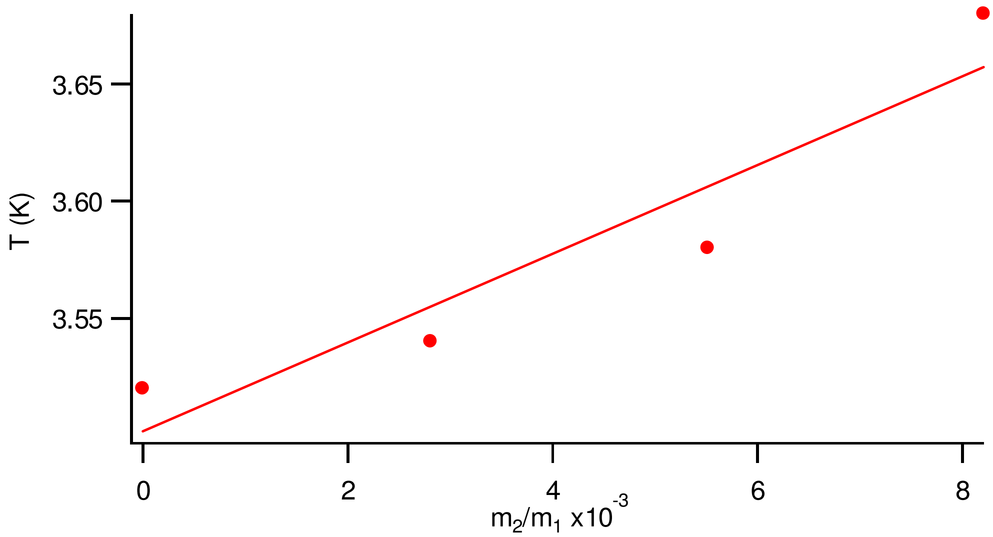
Σύμφωνα με την θεωρία τα δεδομένα πρέπει να περιγράφονται από ευθεία με εξίσωση $y = a\,x + b$, όπου $y = T$ και $x = m_2/m_1$.

Κατασκευάζουμε διάγραμμα με τις τιμές αυτές:



Υπολογίζουμε την εξίσωση της ευθείας με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων και βρίσκουμε ότι $y = 18.97\,x + 3.502$. Η στατιστική επεξεργασία προσδιορίζει και τις αβεβαιότητες των a και b: $\sigma_a = 4.9$, $\sigma_b = 0.025$. Πώς εξηγείται η μεγάλη τιμή του σ_a η οποία φαίνεται παράδοξη κρίνοντας από την ποιότητα του διαγράμματος με το μάτι; Μήπως το διάγραμμα αντί να αναδεικνύει την καλή ποιότητα των μετρήσεων συγκαλύπτει την κακή τους ποιότητα με ατυχή επιλογή των διαστημάτων τιμών στους άξονες;

Κατασκευάζουμε το ίδιο διάγραμμα έχοντας αναπτύξει τις τιμές του κατακόρυφου άξονα ώστε να αξιοποιείται όλος ο διαθέσιμος χώρος από τις μετρήσεις:



Δεν χρειάζεται να επαναλάβουμε τον υπολογισμό της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων γιατί τα δεδομένα είναι τα ίδια, άρα και η εξίσωση της ευθείας είναι η ίδια με πριν. Όμως τώρα είναι σαφές γιατί έχει μεγάλη αβεβαιότητα η κλίση της ευθείας.

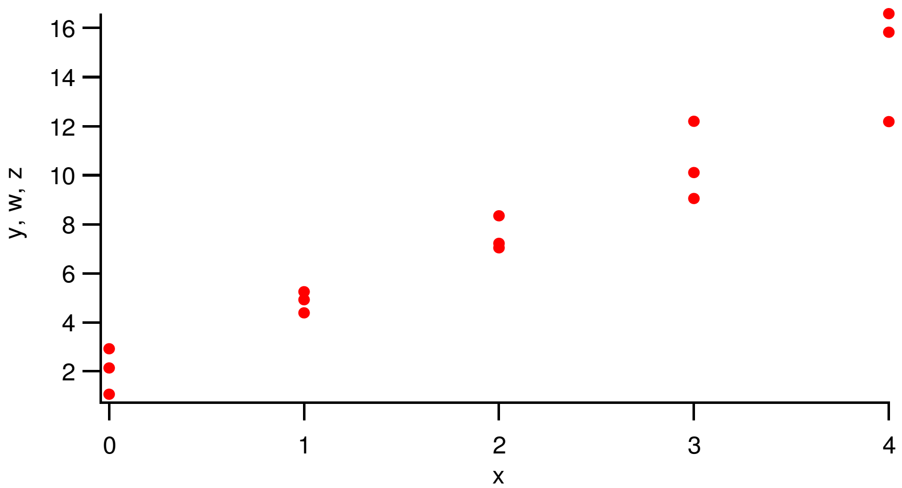
Δηλ. για να φανεί η ποιότητα των μετρήσεων και η διακύμανση των τιμών είναι απαραίτητο να γίνεται τέτοια επιλογή του διαστήματος τιμών στους άξονες ώστε να αξιοποιείται όλη η επιφάνεια του διαγράμματος.

Όταν σε ένα διάγραμμα θέλουμε να παραστήσουμε 2 ή περισσότερες σειρές μετρήσεων, είναι σκόπιμο να χρησιμοποιούμε κατάλληλο συμβολισμό για να διακρίνουμε ποια σημεία αντιστοιχούν σε ποιά σειρά μετρήσεων. Για αυτό το λόγο ποικίλουμε το χρώμα ή το σύμβολο (+, *, □, ■, ●, ○) και σημειώνουμε σε υπόμνημα τι παριστάνουμε με κάθε σύμβολο και χρώμα.

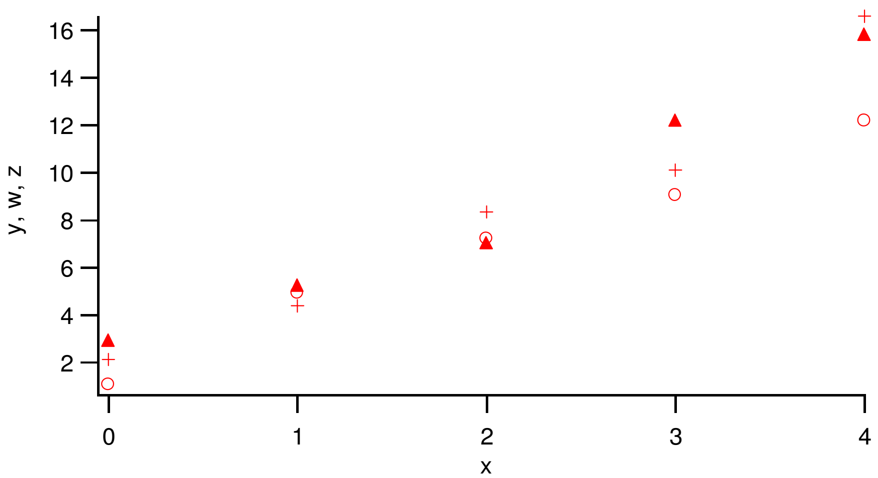
Δίνονται 3 σειρές μετρήσεων:

x	y	w	z
0.00	2.13	1.07	2.92
1.00	4.39	4.92	5.24
2.00	8.34	7.22	7.04
3.00	10.10	9.05	12.19
4.00	16.58	12.18	15.81

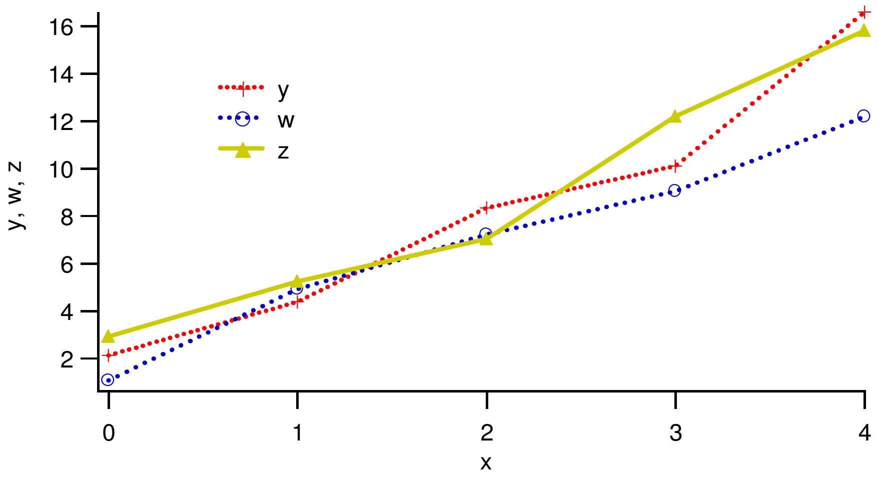
Σχεδιάζουμε διάγραμμα με όλες τις τιμές y, w, z συναρτήσει των τιμών x:



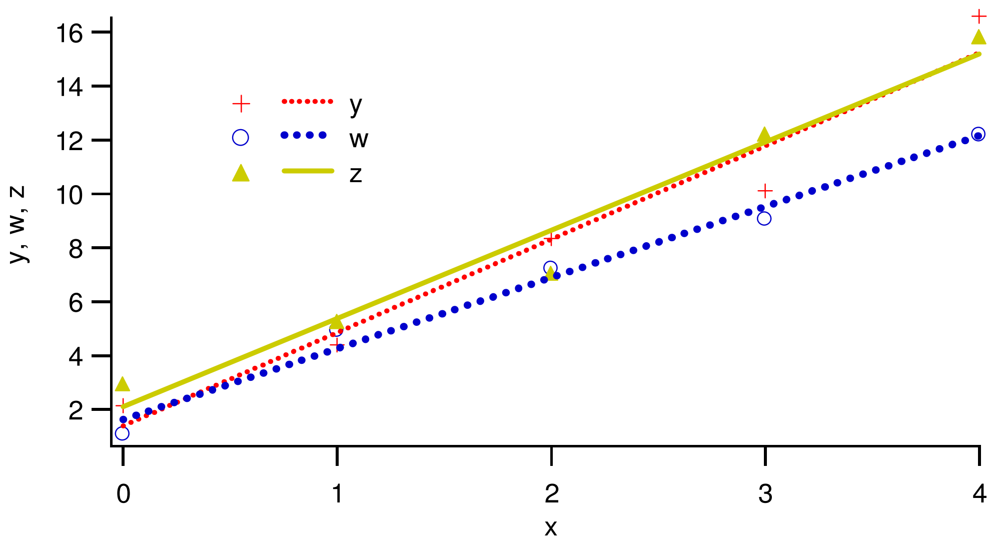
Δεν μπορούμε να διακρίνουμε πώς ομαδοποιούνται οι τιμές. Όμως αν αλλάξουμε συμβολισμό, αυτό είναι εφικτό:



ή, ακόμη καλύτερα:



Αν εφαρμόσουμε την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων στις 3 σειρές μετρήσεων προκύπτουν οι εξής ευθείες:



με εξισώσεις αντίστοιχα:

y = 3.46 (±0.4) x + 1.4 (±1)

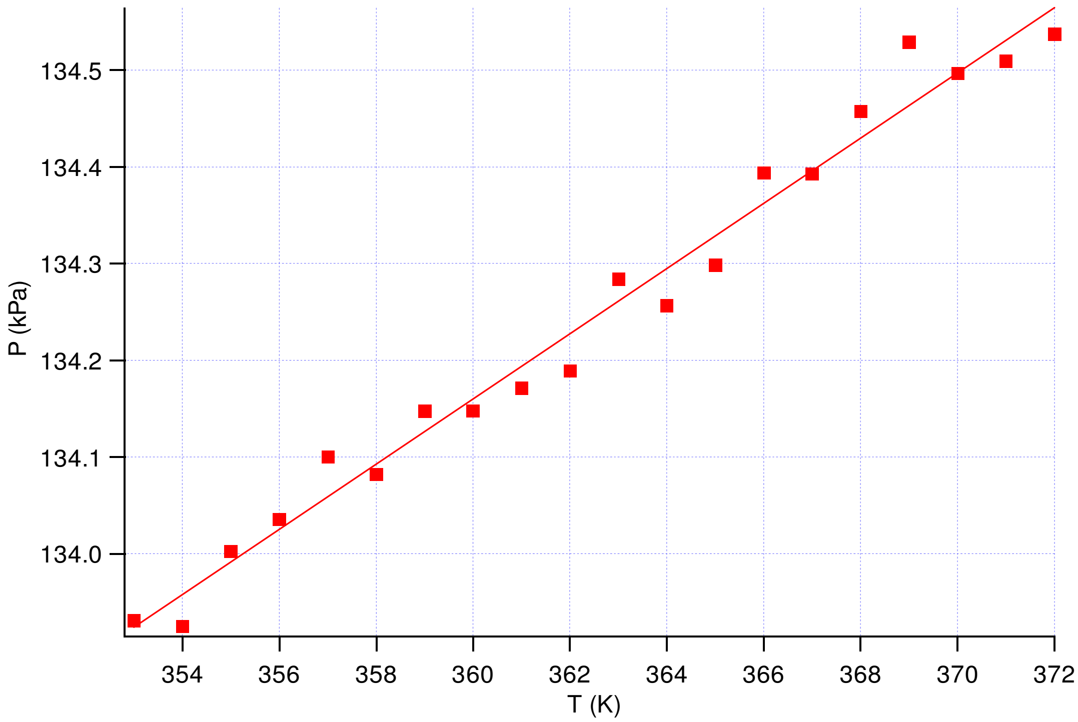
w = 2.63 (±0.19) x + 1.61 (±0.5)

z = 3.27 (±0.4) x + 2.1 (±0.9)

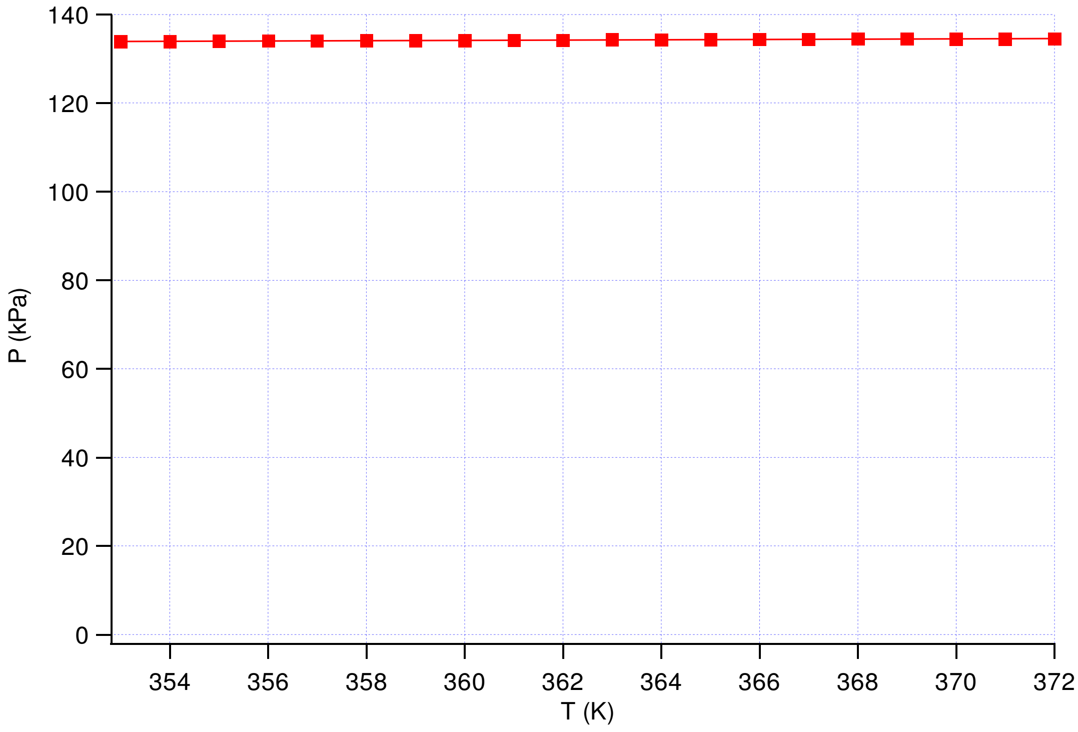
Γραφική επεξεργασία δεδομένων (επανάληψη για εμπέδωση)

Πολλές φορές τα δεδομένα μας περιγράφονται ικανοποιητικά από μια γραμμική συνάρτηση, δηλ. τα ζεύγη τιμών (x_i, y_i) έχουν τέτοιες τιμές ώστε να υπάρχουν παράμετροι α και β οι οποίες να ικανοποιούν σε μεγάλη προσέγγιση την σχέση

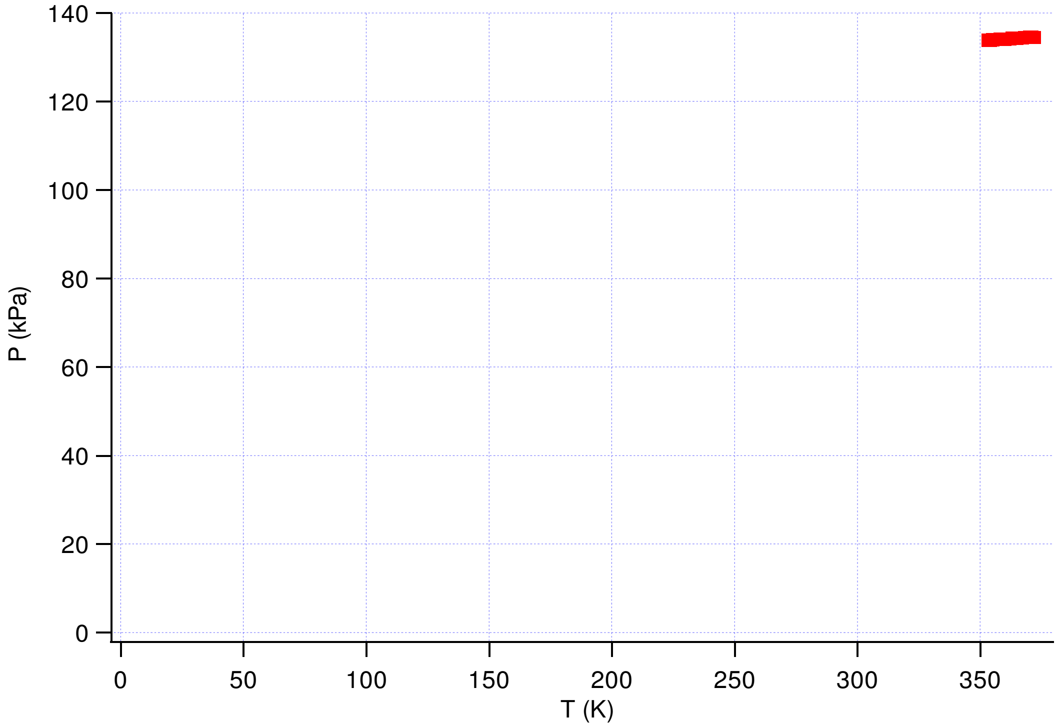
$y_i = \alpha x + \beta$ για όλα τα δεδομένα με i = 1, 2, ... N.



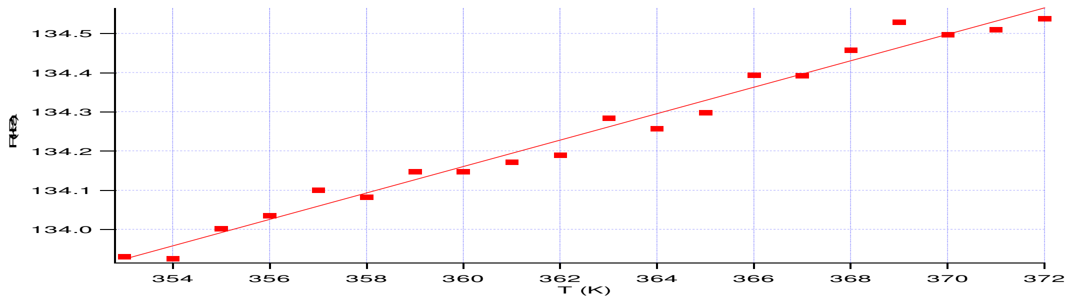
Όταν σχεδιάζουμε τα δεδομένα σε διάγραμμα, επιλέγουμε το διάστημα τιμών σε κάθε άξονα να είναι το κατάλληλο ώστε τα σημεία να μην περιορίζονται σε μικρό τμήμα, όπως στο επόμενο σχήμα:



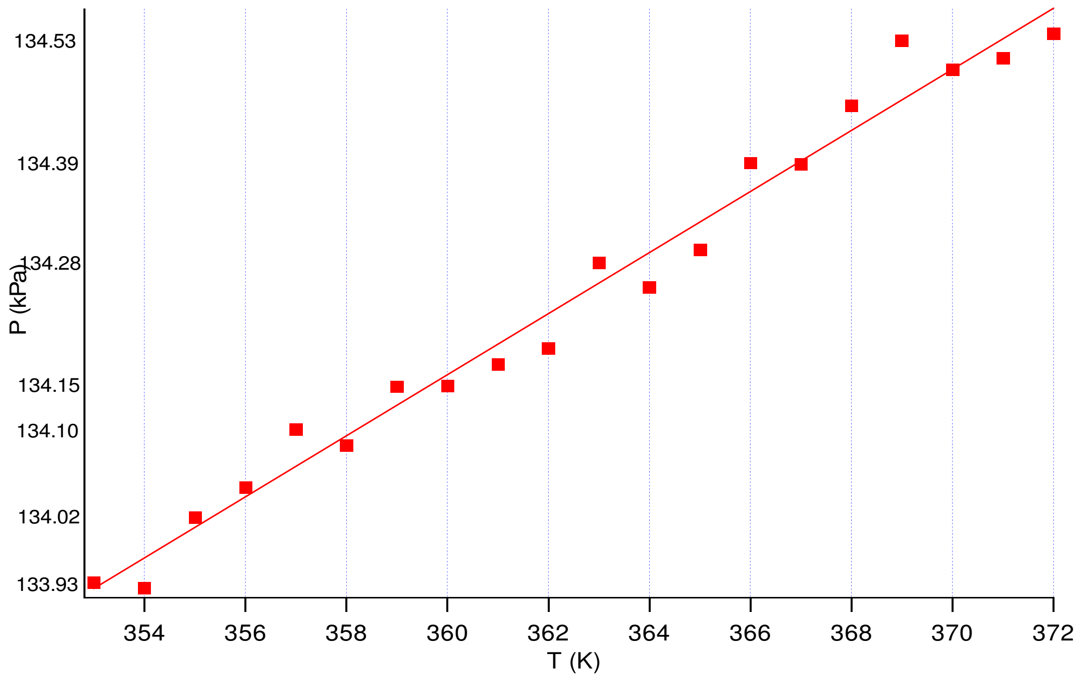
ή στο επόμενο:



Φροντίζουμε να είναι ευανάγνωστες οι τιμές στους άξονες και σε ισαπέχουσες θέσεις, όχι έτσι:



ή έτσι:



Η καλύτερη ευθεία μπορεί να σχεδιασθεί με οπτική εκτίμηση ή με υπολογισμό (με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων). Αν την σχεδιάσουμε με οπτική εκτίμηση, προσπαθούμε να ισοκατανείμουμε τα σημεία εκατέρωθεν της ευθείας. Αν κάνουμε υπολογισμό της εξισώσεως που περιγράφει την ευθεία, δεν χαράσσουμε την ευθεία κατ'εκτίμηση, αλλά χρησιμοποιούμε την εξίσωση για να προσδιορίσουμε τις συντεταγμένες δύο σημείων, τα σημειώνουμε στο διάγραμμα και τα ενώνουμε με ευθεία γραμμή.
Η εξίσωση της ευθείας κατά τον οπτικό σχεδιασμό της καλύτερης ευθείας απαιτεί εκτίμηση της κλίσης (α) και του σταθερού όρου (β). Οι δύο παράμετροι έχουν τις κατάλληλες μονάδες ώστε η πράξη α x + β να δίνει μέγεθος με μονάδες του y. Παρατηρώντας το (σωστό) διάγραμμα διαπιστώνουμε ότι η ευθεία περνά από τα σημεία (355.2 K, 134 kPa) και (370 K, 134.5 kPa).
Άρα $\alpha = \dfrac{(134.5 - 134.0)\,\mathrm{kPa}}{(370 - 355.2)\,\mathrm{K}} = \dfrac{0.5\,\mathrm{kPa}}{14.8\,\mathrm{K}} = 0.03378\,\dfrac{\mathrm{kPa}}{\mathrm{K}}$.
Ο σταθερός όρος υπολογίζεται με την βοήθεια της κλίσης και του ενός εκ των δύο σημείων, π.χ. β = 134.5 kPa – 0.03378 kPa K^{-1} x 370 K = 122.00 kPa.
Δεν μετρούμε τις συντεταγμένες των σημείων σε εκατοστά του μέτρου, ή, αν το κάνουμε, πολλαπλασιάζουμε τις τιμές αυτές με τους συντελεστές αναλογίας, δηλ. πόσα kPa ή K αντιστοιχούν ανά εκατοστό. Αν παραλείψουμε τους συντελεστές, η κλίση έχει τιμή η οποία, αντί να εξαρτάται από τις πειραματικές τιμές, εξαρτάται από την δική μας επιλογή του τρόπου σχεδιάσεως των τιμών στο διάγραμμα.
Με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, οι παράμετροι υπολογίζονται ως εξής:
α = 0.03373 kPa K^{-1} και β = 122.02 kPa. Οι τιμές αυτές είναι πολύ κοντά στις τιμές που προσδιορίσαμε γραφικά. Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων έχει το πλεονέκτημα ότι μας δίνει μια αμερόληπτη (ανεξάρτητη από τον παρατηρητή) τιμή για τις παραμέτρους και παρέχει επίσης τις αβεβαιότητες των παραμέτρων. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, οι αβεβαιότητες είναι $\sigma_\alpha = 0.0012$ και $\sigma_\beta = 0.4$.

25/6/2008, 1/7/2008