Σώμα θερμοχωρητικότητας C_V και θερμοκρασίας T_1 τοποθετείται σε δεξαμενή θερμότητας θερμοκρασίας T_2. Να προσδιορισθεί η ολική μεταβολή της εντροπίας. Να εξετασθούν χωριστά οι περιπτώσεις: $T_1>T_2$, $T_1<T_2$.

Λύση:

Η τελική θερμοκρασία του σώματος είναι T_2.

$\Delta S_{ολικό} \equiv \Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$

Με δεδομένο ότι $C_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \Rightarrow dS = \frac{C_P}{T}dT$. Τότε

$$\Delta S_1 = \Delta S_1 = \int_1^2 dS_1 = \int_1^2 \frac{C_P}{T}dT = \int_1^2 C_P d\ln T = C_P(\ln T_2 - \ln T_1) = C_P \ln\frac{T_2}{T_1}$$

$\Delta S_2 = \frac{\Delta H_2}{T_2}$ Εφόσον το σύστημα σώματος και δεξαμενής είναι απομονωμένο υπό σταθερή πίεση, $0 = \Delta H_{ολικο} = \Delta H_1 + \Delta H_2 \Rightarrow \Delta H_2 = -\Delta H_1$

$\Delta H_1 = \int_1^2 dH_1 = \int_1^2 C_P dT = C_P(T_2 - T_1)$, συνεπώς $\Delta S_2 = -\frac{C_P(T_2 - T_1)}{T_2}$

Άρα: $\Delta S = C_P \ln\frac{T_2}{T_1} - \frac{C_P(T_2 - T_1)}{T_2} = C_P\left(\ln\frac{T_2}{T_1} - 1 + \frac{T_1}{T_2}\right)$

Α) $0 < T_2 < T_1 \Rightarrow 0 < \frac{T_2}{T_1} < 1$, ορίζω $\frac{T_2}{T_1} = 1 - a$ με $0 < a < 1$

Αναπτύσσω σε σειρά Taylor

$$\ln\frac{T_2}{T_1} = \ln(1-a) = -\left(a + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{4}a^4 + \dots\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}a^n$$

Το ίδιο με το $\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{\frac{T_2}{T_1}} = \frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$

$$\Delta S = C_P\left(\ln(1-a) - 1 + \frac{1}{1-a}\right) = C_P\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}a^n - 1 + \sum_{n=0}^{\infty}a^n\right) = C_P\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n}a^n > 0$$

Β) $0 < T_1 < T_2 \Rightarrow 0 < \frac{T_1}{T_2} < 1$, ορίζω $\frac{T_1}{T_2} = 1 - a$ με $0 < a < 1$

Αναπτύσσω πάλι σε σειρά Taylor

$$\ln\frac{T_2}{T_1} = -\ln\frac{T_1}{T_2} = -\ln(1-a) = \left(a + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{4}a^4 + \dots\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}a^n$$

$$\Delta S = C_P\left(-\ln(1-a) - 1 + (1-a)\right) = C_P\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}a^n > 0$$

Τελικώς, η ολική μεταβολή της εντροπίας είναι θετική, ανεξάρτητα από το ποιά από τις δύο θερμοκρασίες είναι μεγαλύτερη και σε συμφωνία με τον 2^o Νόμο της Θερμοδυναμικής. Το αποτέλεσμα ήταν αναμενόμενο δοθέντος ότι η μεταβολή της θερμοκρασίας του σώματος γίνεται με μη αντιστρεπτό τρόπο.