Δύο όμοια δοχεία διαχωρίζονται από ημιπερατή μεμβράνη η οποία επιτρέπει την διέλευση μορίων νερού, αλλά όχι άλλων διαλυμένων μορίων. Τα δοχεία έχουν βάση εμβαδού 1 m^2 και περιέχουν από 1 m^3 με συγκεντρώσεις 0.1 mol/L και 0.05 mol/L διαλυμένων συστατικών. Να υπολογίσετε την υψομετρική διαφορά των ελεύθερων σταθμών που διαμορφώνεται με την διέλευση μορίων νερού και την αποκατάσταση της ισορροπίας μεταξύ των δύο δοχείων.

Λύση:

Αν μετακινηθεί όγκος ΔV από το δοχείο με την μικρότερη συγκέντρωση προς το άλλο, τροποποιούνται οι συγκεντρώσεις των διαλυμάτων, αλλά και η στάθμη σε κάθε δοχείο.

$C_1 = C_1^0 \dfrac{V_0}{V_0 + \Delta V}$, $C_2 = C_2^0 \dfrac{V_0}{V_0 - \Delta V}$, $\Delta P = \rho g \Delta h$. Στην ισορροπία $\Delta P = \Pi_1 - \Pi_2$, όπου $\Pi_1 = C_1 RT$ και $\Pi_2 = C_2 RT$, ενώ $\Delta V = A\dfrac{\Delta h}{2}$. Με αντικατάσταση στην συνθήκη ισορροπίας έχουμε: $\rho g\, 2\dfrac{\Delta V}{A} = \left(C_1^0 \dfrac{V_0}{V_0 + \Delta V} - C_2^0 \dfrac{V_0}{V_0 - \Delta V}\right) RT \Rightarrow$

$$\frac{2\rho g}{ART}\frac{\Delta V}{V_0}(V_0 + \Delta V)(V_0 - \Delta V) = C_1^0 (V_0 - \Delta V) - C_2^0 (V_0 + \Delta V) \Rightarrow$$

$$\frac{2\rho g}{ART}\frac{\Delta V}{V_0}\left(\frac{V_0 + \Delta V}{V_0}\right)\left(\frac{V_0 - \Delta V}{V_0}\right) V_0 = C_1^0 \frac{V_0 - \Delta V}{V_0} - C_2^0 \frac{V_0 + \Delta V}{V_0} \Rightarrow$$

Θέτοντας $x = \dfrac{\Delta V}{V_0}$ όπου $-1 < x < 1$ και

$$K = \frac{2\rho g}{ART} V_0 = \frac{2 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3} \times 10 \text{ m s}^{-2} 1\,\text{m}^3}{1\,\text{m}^2 \times 8.314 \text{ J K}^{-1}\text{mol}^{-1} \times 300 \text{ K}} = 8.018 \text{ mol m}^{-3} = 0.008018 \text{ mol dm}^{-3}$$

έχουμε $Kx(1+x)(1-x) = C_1^0(1-x) - C_2^0(1+x) \Rightarrow Kx^3 + \left(C_1^0 + C_2^0 - K\right)x - C_1^0 + C_2^0 = 0$

Αν υποθέσουμε ότι $|x| << 1 \Rightarrow 1 + x \approx 1 \approx 1 - x$, τότε η εξίσωση απλοποιείται στην

$$Kx = C_1^0 - C_2^0 \Rightarrow x = \frac{C_1^0 - C_2^0}{K} \Rightarrow x = \frac{(0.1 - 0.05)\,\text{mol}\,\left(10^{-3}\,\text{m}^3\right)^{-1}}{8.018 \text{ mol m}^{-3}} = 6.24 > 1$$

Άρα δεν είναι καλή υπόθεση. Αν υποθέσουμε ότι η μεταφορά του διαλύτη δεν αλλάζει σημαντικά την στάθμη, άρα δεν εμφανίζεται υδροστατική πίεση, τότε η εξίσωση απλοποιείται ως εξής:

$C_1^0(1-x) - C_2^0(1+x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{C_1^0 - C_2^0}{C_1^0 + C_2^0} \Rightarrow x = \dfrac{0.1 - 0.05}{0.1 + 0.05} = \dfrac{1}{3}$ που δεν συμφωνεί απόλυτα με την υπόθεση (ότι δεν μεταβλήθηκε η στάθμη του υγρού), αλλά δεν είναι αφύσικο το αποτέλεσμα.

Ακριβές αποτέλεσμα μπορεί να υπολογισθεί με επαναληπτική μέθοδο, π.χ. την Newton-Raphson.

Με $f(x) = Kx^3 + (C_1^0 + C_2^0 - K)x - C_1^0 + C_2^0$ και $f'(x) = 3Kx^2 + (C_1^0 + C_2^0 - K)$, υπολογίζουμε βελτιωμένες τιμές της μεταβλητής με την σχέση $x_i = x_{i-1} - \dfrac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$.

Θέτοντας $x_0 = \dfrac{1}{3}$, παίρνουμε $x_1 = 0.349757$, $x_2 = 0.349742$, $x_3 = 0.349742$.

Άρα $\Delta h = 2\dfrac{xV_0}{A} = 2 \times \dfrac{0.349742 \times 1\ \mathrm{m}^3}{1\ \mathrm{m}^2} = 0.69948\ \ \mathrm{m}$

7/6/2021, 28/9/2021